

## 二〇一九年全国高中数学联赛甘肃赛区预赛试卷

(考试时间: 2019 年 6 月 30 日 9: 00—11: 30, 满分 150 分)

| 题号  | 一 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 总分 |
|-----|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 得分  |   |    |    |    |    |    |    |    |
| 评分人 |   |    |    |    |    |    |    |    |
| 复核人 |   |    |    |    |    |    |    |    |

一、填空题(共 10 小题, 每小题 7 分, 满分 70 分。请直接将答案写在题中的横线上)

1、已知  $a \geq -2$ , 且  $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$ ,  $B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\}$ ,  $C = \{t | t = x^2, x \in A\}$ ,

若  $C \subseteq B$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

2、 $\triangle ABC$  的三边分别为  $a, b, c$ ,  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心, 已知  $b^2 - 2b + c^2 = 0$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

3、已知  $a = \log_4 e, b = \log_3 4, c = \log_4 5$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是\_\_\_\_\_.

4、若方程  $a = \left| \sqrt{1-x^2} - x - 1 \right|$  有实数解, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

5、在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ ,  $a_n + a_{n+1} = 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ , 设  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,

则  $S_{2017} - 2S_{2018} + S_{2019}$  的值为\_\_\_\_\_.

6、在复平面内, 复数  $z_1, z_2, z_3$  的对应点分别为  $Z_1, Z_2, Z_3$ , 若  $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}, \overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = 0$ ,

$|z_1 + z_2 - z_3| = 2$ , 则  $|z_3|$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

7、已知函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & x \leq 1, \end{cases}$  若  $m < n$ , 且  $f(m) = f(n)$ , 则  $n - m$  的最小值是\_\_\_\_\_.

8、已知椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过椭圆的右焦点作一条直线  $l$  交椭圆于点  $P, Q$ , 则  $\triangle F_1PQ$  内切圆面积的最大值是\_\_\_\_\_.

9、已知  $x > 0, y > 0$  且  $\frac{1}{2x+y} + \frac{1}{y+1} = 1$ , 则  $x + 2y$  的最小值为\_\_\_\_\_.

10、定义两点  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  之间的“坐标距离”为:  $d(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ . 若  $C(x, y)$  到点  $A(1, 3), B(6, 9)$  的“坐标距离”相等, 其中实数  $x, y$  满足  $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$ , 则所有满足条件的点  $C$  的轨迹的长之和为\_\_\_\_\_.

二、解答题（共 6 小题，满分 80 分。要求写出解题过程）

11、（13 分）已知向量  $\vec{m} = (\cos \frac{x}{2}, -1)$ ,  $\vec{n} = (\sqrt{3} \sin \frac{x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2})$ , 设函数  $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + 1$ .

(1) 若  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(x) = \frac{11}{10}$ , 求  $\cos x$  的值;

(2) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 且满足  $2b \cos A \leq 2c - \sqrt{3}a$ , 求  $f(B)$  的取值范围.

12、（13 分）2019 年数学奥林匹克竞赛试行改革：某市在高二一年中举行 5 次联合竞赛，学生如果其中 2 次成绩达到该市前 20 名即可进入省队培训，不用参加其余的竞赛，而每个学生最多也只能参加 5 次竞赛。规定：若前 4 次竞赛成绩都没有达全市前 20 名，则第 5 次不能参加竞赛。假设某学生每次成绩达全市前 20 名的概率都是  $\frac{1}{4}$ ，每次竞赛成绩达全市前 20 名与否互相独立。

(1) 求该学生进入省队的概率。

(2) 如果该学生进入省队或参加完 5 次竞赛就结束，记该学生参加竞赛的次数为  $\xi$ ，求  $\xi$  的分布列及  $\xi$  的数学期望。

13、（13 分）已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4}$ , 且  $a_{n+1} = \frac{(n-1)a_n}{n-a_n}$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求证：对一切  $n \in N^*$ , 有  $\sum_{k=1}^n a_k^2 < \frac{7}{6}$ .

14、（13 分）已知三棱锥  $P-ABC$ （如图 1）的平面展开图（如图 2）中，四边形  $ABCD$  为边长等于  $2\sqrt{2}$  的正方形， $\triangle ABE$  和  $\triangle BCF$  均为正三角形，在三棱锥  $P-ABC$  中：

(I) 证明：平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ;

(II) 若点  $M$  为棱  $PA$  上一点且  $\frac{PM}{MA} = \frac{1}{2}$ , 求二面角  $P-BC-M$  的余弦值.

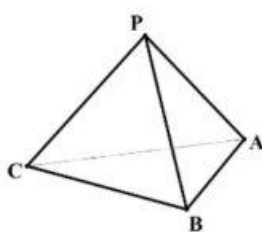


图1

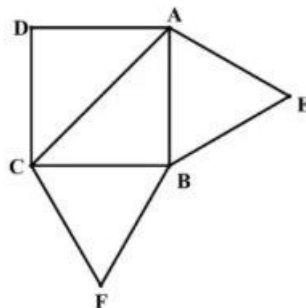


图2

15、(14 分) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 其短轴为 4, 离心率为  $e_1$ , 双曲线  $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1$

( $m > 0, n > 0$ ) 的渐近线为  $y = \pm x$ , 离心率为  $e_2$ , 且  $e_1 \cdot e_2 = 1$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 设椭圆  $E$  的右焦点为  $F$ , 过点  $G(4, 0)$  作斜率不为 0 的直线交椭圆  $E$  于  $M, N$  两点, 设直线  $FM$  和  $FN$  的斜率为  $k_1, k_2$ , 试判断  $k_1 + k_2$  是否为定值, 若是定值, 求出该定值; 若不是定值, 请说明理由.

16、(14 分) 已知函数  $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$ .

(1) 若  $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$  在  $x = x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$  处导数相等, 证明:  $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2$ ;

(2) 若对于任意  $k \in (-\infty, 1)$ , 直线  $y = kx + b$  与曲线  $y = f(x)$  都有唯一公共点, 求实数  $b$  的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: zizzsw。



微信扫一扫, 快速关注