

2018 年全国高中数学联赛河南省预赛高一试题

(考试时间:2018 年 5 月 13 日上午 8:30-11:00)

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	总分
得分						
评卷人						
复查人						

考生注意:1.本试卷共五道大题,满分 140 分.

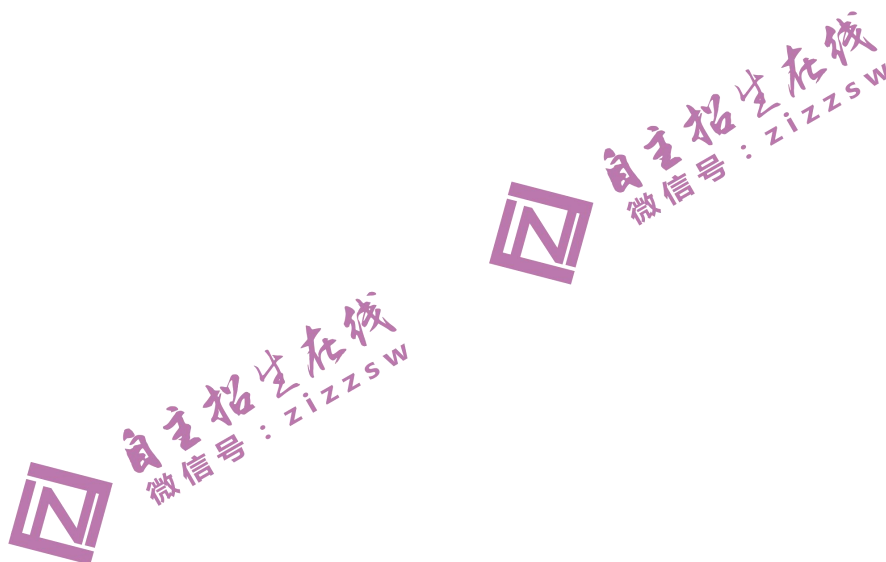
2.解答书写时不要超过密封线.

一.填空题(共 8 小题,每小题 8 分,满分 64 分)

得分	
评卷人	

1.集合 $P = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $M = \{x | mx - 1 = 0\}$, 且 $M \subseteq P$, 则满足条件的实数 m 组成的集合为_____.

2.函数 $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$



3. 已知函数 $f(x) = \frac{2^{|2x|} - 2018x^3 + 1}{4^{|x|} + 1}$ 在 R 上的最大值为 M , 最小值为 m ,

则 $M + m =$ _____.

4. 已知四面体 $ABCD$ 中, $AB = CD = 5, AD = BC = \sqrt{34}, AC = BD = \sqrt{41}$, 则该四面体的体积为 _____.

5. 已知关于 x 的方程 $x^3 + ax^2 + bx - a - b - 1 = 0$ 有两个根分别在 $(0, 1), (1, +\infty)$ 内,

则 $\frac{2a+b+1}{a+1}$ 的取值范围是 _____.

6. 在直线 $x = 3$ 上任取一点 P , 过点 P 向圆 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 作两条切线, 其切点分别为 A, B , 则直线 AB 经过一个定点, 该定点的坐标为 _____.

7. 已知 $\angle A$ 为锐角, 则 $\sqrt{\sin^4 A + 1} + \sqrt{\cos^4 A + 4}$ 的最小值为 _____.

8. 甲乙两人打乒乓球, 甲每局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 当有一人领先两局!



$x_i (i \in N_+)$ 的概率为 p_i , 这里要求 $x_i < x_{i+1} (i \in N_+)$, 则 $S = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i =$ _____.

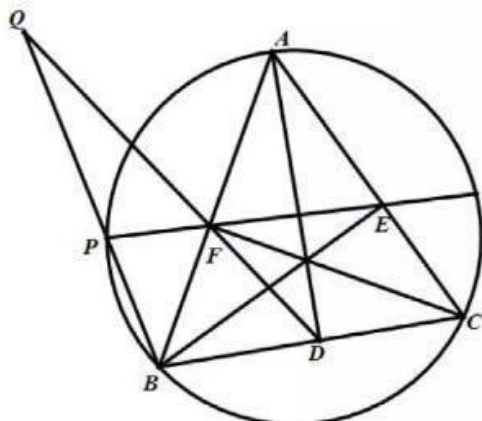
得分	
评卷人	

二.(本题满分 16 分)(1)证明对于任意的正实数 a, b 都有: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

(2)已知正数 x, y 满足: $x + y = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值.

得分	
评卷人	

三.(本题满分 20 分)设锐角 $\triangle ABC$ 边 BC, CA, AB 上的垂足分别为 D, E, F , 直线 EF 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的一个交点为 P , 直线 BP 与 DF 交于点 Q . 证明: $AP = AQ$.



得分	
评卷人	

四.(本题满分 20 分)已知实数 x, y 满足:

$$1 + \cos^2(x + y - 1) = \frac{x^2 + y^2 + 2(x+1)(1-y)}{x - y + 1}, \text{ 求 } xy \text{ 的最小值.}$$

得分	
评卷人	

五.(本题满分 20 分)设 S, T 是两个非空集合, 若存在一个从 S 到 T 的函数 $y = f(x)$ 满足:

(i) $T = \{f(x) | x \in S\}$;

(ii) $\forall x_1, x_2 \in S$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$.

那么称这两个集合“保序同构”.

证明:(1) $A = (0, 1), B = R$ 是保序同构的;

(2)判断 $A = Z, B = Q$ 是不是保序同构的, 若是, 请给出一个函数的表达

2018 年全国高中数学联赛河南省预赛高一参考答案

一. 填空题

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right\}$	$[\sqrt{2}, 2]$	2	20	(0,2)	$(\frac{4}{3}, 2)$	$\sqrt{10}$	$\frac{18}{5}$

二.(1)由 $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, 故 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ -----4分

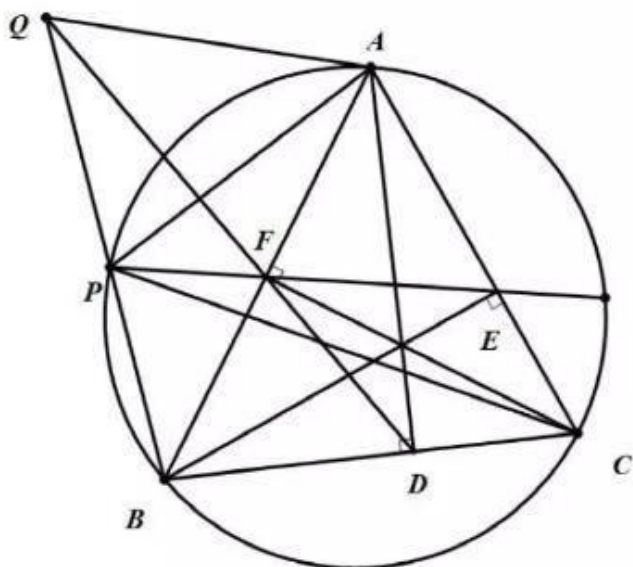
(2) $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = (\frac{1}{x} + \frac{4}{y})(x+y)$ -----8分

$$= 1+4 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y}$$

$$\geq 5+2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} = 9$$
 -----12分

等号在 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ 处取到, 故最小值为 9. -----16分

三.



如上图所示, 由于 D, E, F 是垂足, 则 $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$,

故 B, F, E, C 四点共圆, 从而 $\angle AFE = \angle ACB$ -----5分

$$\text{而} \begin{cases} \angle BFD = \angle FQB + \angle FBQ \\ \angle BCA = \angle PCB + \angle PCA \\ \angle FBQ = \angle ABP = \angle PCA \end{cases} \text{ -----10分}$$

$$\Rightarrow \angle FQB = \angle PCB = \angle PAF$$

故 A, F, P, Q 四点共圆——15 分

$$\Rightarrow \angle AQP = \angle AFE = \angle ACB = \angle APQ$$

$$\Rightarrow AP = AQ \text{——20 分}$$

$$\begin{aligned} \text{四. } 1 + \cos^2(x+y-1) &= \frac{x^2 + y^2 + 2(x+1)(1-y)}{x-y+1} = \frac{(x^2 + y^2 - 2xy) + 2(x-y) + 1 + 1}{x-y+1} \\ &= \frac{(x-y+1)^2 + 1}{x-y+1} = x-y+1 + \frac{1}{x-y+1} \text{——5 分} \end{aligned}$$

由于 $0 < 1 + \cos^2(x+y-1) \leq 2$, 故 $x-y+1 > 0$, 从而 $x-y+1 + \frac{1}{x-y+1} \geq 2$ ——10 分

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos^2(x+y-1) = 2 \\ x-y+1 = 1 \end{cases} \text{——15 分}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x+y-1) = 1 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-1 = k\pi, k \in Z \\ x = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = \frac{1+k\pi}{2}, k \in Z \Rightarrow xy = \left(\frac{1+k\pi}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}, k \in Z$$

$$\text{故 } (xy)_{\min} = \frac{1}{4} \text{——20 分}$$

$$\text{五. (1) 令 } f(x) = \tan\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right] (x \in A),$$

则 $f(x)$ 单调增, 且其值域为 R , 因此 A 和 B 是保序同构的;——10 分

(2) 集合 $A = Z, B = Q$ 不是保序同构的.

事实上, 若集合 $A = Z, B = Q$ 是保序同构的,

则存在函数 $y = f(x)$, 使得 $f(1) = a, f(2) = b$, 其中 $a, b \in Q, a < b$.——15 分

考察数 $c = \frac{a+b}{2} \in Q$, 则 $a < c < b$, 由于 A 和 B 是保序同构的, 则存在 $x \in Z$ 使 $f(x) = c$,

结合 $y = f(x)$ 单调递增, 则 $1 < x < 2$, 矛盾.——20 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

