2018年北京市中学生数学竞赛高中一年级初赛
参考解答

2018 年 4 月 7 日

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{0.1, 1, 10\}$，$B=\{y\,|\,y=\lg x, x\in A\}$，则 $A\cap B=$

（A）1. （B）$\{1\}$. （C）$\varnothing$. （D）0.

答：B.

解：由 $A=\{0.1, 1, 10\}$，易知 $B=\{-1, 0, 1\}$，所以 $A\cap B=\{1\}$.

2. 如图，$\odot O$ 的直径 $AB=8$，C 为 $\odot O$ 上一点，$\angle COA=60°$. 延长 AB 到点 P，使 $BP=\dfrac{1}{2}BO$，连 CP 交半圆于点 D，过点 P 作 AP 的垂线交 AD 的延长线于 H，则 PH 的长度为

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. （B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. （C）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. （D）$\sqrt{3}$.

答：C.

解：连结 BD，BH，

$\because AB$ 是直径，$\therefore \angle ADB=90°$，因此 $\angle BDH=90°$.

$\because HP\perp AP$ 于点 P，$\therefore \angle BPH=90°$.

即 $\angle BDH+\angle BPH=180°$，所以 B、D、H、P 四点共圆，

$\therefore \angle PBH=\angle PDH$.

$\because \angle COA=60°$，$\therefore \angle ADC=30°$，因此 $\angle PDH=\angle ADC=30°$，故 $\angle PBH=30°$.

$\because AB=8$，$BP=\dfrac{1}{2}BO$，$\therefore BP=2$，$\therefore PH=2\cdot\tan 30°=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. 若 $f(x)$ 是 R 上周期为 5 的奇函数，且满足 $f(7)=9$，则 $f(2020)-f(2018)=$

（A）6. （B）7. （C）8. （D）9.

答：D.

解：因为 $f(x)$ 是 R 上周期为 5 的奇函数，所以

$f(2020)-f(2018)=f(5\times404+0)-f(5\times404-2)=f(0)+f(2)=0+f(7)=0+9=9$.

4. 如图，平面直角坐标系 x-O-y 中，A, B 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在第 I 象限的图象上两点，满足 $\angle AOB=60°$ 且 $OA=OB$，则 $\triangle OAB$ 的面积等于

（A）$2\sqrt{3}$. （B）$\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. （C）$\sqrt{3}$. （D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

答：C.

解：依题意，$\triangle OAB$ 是正三角形. 又 A, B 是函数

所以 A, B 关于直线 $y=x$ 轴对称.

设点 $A(a,\ \frac{1}{a})$，则点 $B(\frac{1}{a}, a)$. $OA^2=a^2+\frac{1}{a^2}$

$$AB^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-a\right)^2=2\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

由 $OA=AB$ 得 $\quad a^2+\frac{1}{a^2}=2\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

化简得 $a^2+\frac{1}{a^2}-4=0$，即 $a^2+\frac{1}{a^2}=4$. 因此 $OA^2=4$.

所以，正△OAB 的面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times OA^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\sqrt{3}$.

5．已知$[x]$表示不超过 x 的最大整数，若 $[x+0.1]+[x+0.2]+[x+0.3]+[x+0.4]+[x+0.5]+[x+0.6]+[x+0.7]+[x+0.8]+[x+0.9]=104$，则 x 的最小值是

（A）11.5.　　（B）10.5.　　（C）9.5.　　（D）8.5.

答：A.

解：因为 $0<0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9<1$，$104\div 9=11\frac{5}{9}$，

所以 $11<x<12$，因为 $104=11\times 4+12\times 5$，即

$$[x+0.1]=[x+0.2]=[x+0.3]=[x+0.4]=11,$$
$$[x+0.5]=[x+0.6]=[x+0.7]=[x+0.8]=[x+0.9]=12,$$

由$[x+0.5]=12$ 可推知 $12\leqslant x+0.5<13$，即 $11.5\leqslant x<12.5$.

由$[x+0.9]=12$ 可推知 $12\leqslant x+0.9<13$，即 $11.1\leqslant x<12.1$.

所以 $11.5\leqslant x<12.1$. 因此 x 的最小值是 11.5.

6．设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，若存在两不等实数 $x_1, x_2\in$ R，使得 $f(\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P．那么以下函数：

① $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$；　② $f(x)=x^2$；　③ $f(x)=\left|x^2-1\right|$；　④ $f(x)=x^3$

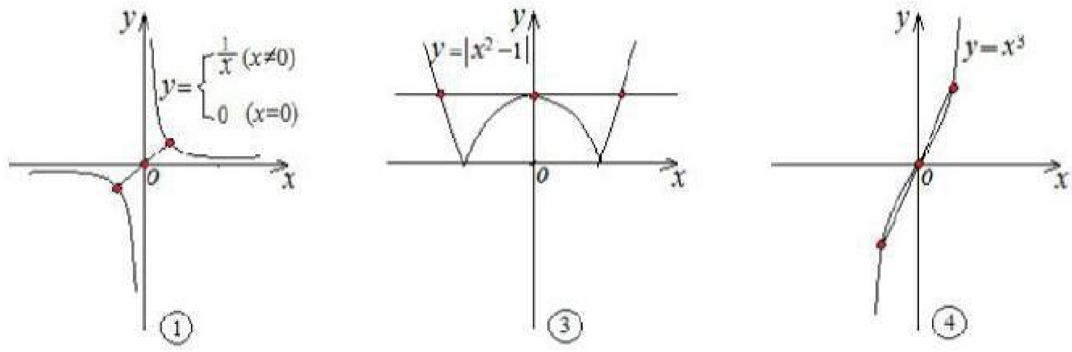
中，不具有性质 P 的函数为

（A）①.　　（B）②.　　（C）③.　　（D）④.

答：B.

解：具有性质 P 的函数的特点是：存在一条直线与函数图象有三个交点，且其中一个是另外两个交点的中点．画图可知①、③、④都是具有

三个交点，②是不具有性质 P 的函数



二、填空题

1．已知实数 a, b, c, d 满足 $5^a=4$，$4^b=3$，$3^c=2$，$2^d=5$，则$(abcd)^{2018}$=______.

答：1.

解：化 $5^a=4$，$4^b=3$，$3^c=2$，$2^d=5$ 为对数，有

$$a=\log_5 4=\frac{\ln 4}{\ln 5},\quad b=\frac{\ln 3}{\ln 4},\quad c=\frac{\ln 2}{\ln 3},\quad d=\frac{\ln 5}{\ln 2},$$

所以
$$(abcd)^{2018}=\left(\frac{\ln 4}{\ln 5}\times\frac{\ln 3}{\ln 4}\times\frac{\ln 2}{\ln 3}\times\frac{\ln 5}{\ln 2}\right)^{2018}=1^{2018}=1.$$

2．满足 $a^2+ab+b^2=2018$ 的正整数解(a,b)构成的集合是______.

答：$\varnothing$.

解：若 a,b 同为奇数或一奇一偶，则 a^2+ab+b^2 是奇数，不能等于 2018；如果 a,b 同为偶数，那么 a^2+ab+b^2 被 4 整除，而 2018 不被 4 整除，因此方程 $a^2+ab+b^2=2018$ 的解集为$\varnothing$.

3．一个三角形的一边长为 8，面积为 12，则这个三角形的周长的最小值=______.

答：18.

解：如图，在$\triangle ABC$ 中，设 $BC=8$，BC 边上的高为 h，

则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 8\times h=12,$$

解得 $h=3$.

在 BC 的一侧作直线 $l/\!/BC$ 且与 BC 的距离为 3，以 l 为对称轴作出点 C 的对称点 C'，连接 BC'，与 l 交于 A'，$\triangle A'BC$ 的周长是最小的.

这是因为 $AB+AC=AB+AC'\geqslant BC'=BA'+A'C'=BA'+A'C$，此时 $A'B=A'C$，

又因为 $A'B^2=BD^2+A'D^2=4^2+3^2=25$，所以 $A'C=A'B=5$.

因此 $\triangle ABC$ 周长的最小值为 $5+5+8=18$.

4．若三位数 $n=\overline{abc}$ 是一个平方数，并且其数字和 $a+b+c$ 也是一个平方数，称 n 为超级平方数．设超级平方数的集合为 A，

$S(A)$，则与$\dfrac{S(A)}{|A|}$最接近的整数是______.

答：376.

解：不难列举出三位的平方数为：100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484，529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961，共 22 个，其中的超级平方数有 13 个，

$$A=\{100, 121, 144, 169, 196, 225, 324, 400, 441, 484, 529, 900, 961\}.$$

$$S(A)=100+121+144+169+196+225+324+400+441+484+529+900+961=4994,$$

所以$\dfrac{S(A)}{|A|}=\dfrac{4994}{13}\approx 384.15$，因此与$\dfrac{S(A)}{|A|}$最接近的整数是 384.

5．已知正整数 x, y, z 满足 $xyz=(22-x)(22-y)(22-z)$，且 $x+y+z<44$，$x^2+y^2+z^2$ 的最大值和最小值分别记作 M 和 N，则 $M+N=$______.

答：926.

解：由已知可知 x, y, z 均为小于 22 的正整数，由题设等式得

$$2xyz=22^3-22^2(x+y+z)+22(xy+yz+zx),$$

从而 $11|xyz$，所以 x, y, z 中至少有一个数等于 11.

不妨设 $x=11$，由题设等式得 $y+z=22$．由于 y, z 都是正整数，又

$$y^2+z^2=\frac{(y+z)^2+(y-z)^2}{2}=\frac{22^2+(y-z)^2}{2}=242+\frac{1}{2}(y-z)^2,$$

易知，当 $y=z=11$ 时，y^2+z^2 取最小值 242，

6. 在 3×3 的“九宫格”中填数，使每行、每列及两条对角线上的三数之和都相等，有 3 个方格已经填的数分别为 4, 7, 2018，如右图，则“九宫格”中其余 6 个方格所填数之和为______.

4	7	
		2018

答：−11042.5.

解：将其余 6 个格子标上字母，如右下图，由 $a+2018+b=4+7+b$ 得 $a=-2007$．则主对角线的 3 数之和为 $x-2003$，也就是每行、每列及两条对角线上的三数之和都等于 $x-2003$.

4	7	b
c	x	2018
e	d	a

由 $4+7+b=x-2003$ 得 $b=x-2014$，

由 $c+x+2018=x-2003$ 得 $c=-4021$，

由 $d+x+7=x-2003$ 得 $d=-2010$，

由 $e+d+a=x-2003$ 得 $e+(-2010)+(-2007)=x-2003$，即 $e=x+2014$.

4	7	−3015.5
−4021	−1001.5	2018
1012.5	−2010	−2007

由副对角线 3 数之和，得 $e+x+b=x-2003$，即 $(x+2014)+(x-2014)=-2003$，所以 $x=-1001.5$.

因此，

其余 6 个数之和$=3\times(-1001.5-2003)-(4+7+2018)=-11042.5$.

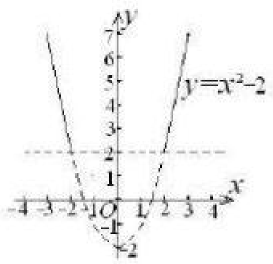
所填“九宫格”的数如左图所示.

7．已知函数 $f(x)$满足 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，那么 $f(x)$的值域为______.

当 $|y-z|=|21-1|=20$ 时，y^2+z^2 取最大值，此时 $M=11^2+21^2+1^2=563$．所以 $M+N=563+363=926$．

答：$[2,+\infty)$．

解：设函数 $y=f(x)$满足 $f\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^2+\frac{1}{t^2}$



$$\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} & (|x|\ge 2) \\ y=t^2+\dfrac{1}{t^2} & (y\ge 2) \end{cases}$$

$$y=t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2$$

所以所求函数是 $f(x)=x^2-2$ $(|x|\geqslant 2)$，其图像如右图．易知 $f(x)=x^2-2$ $(|x|\geqslant 2)$的值域是$[2,+\infty)$．

8．如图，凸五边形 $ABCDE$ 中，$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDE$、$\triangle DEA$、$\triangle EAB$ 的面积都等于 1，则五边形 $ABCDE$ 的面积=______．

答：$\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)$．

解：　如右图，设 BD、CE 的交点为 P，因为 $\triangle ABC$ 的面积=$\triangle EAB$ 的面积=1，所以 $AB/\!/EC$．

类似可证 $BD/\!/AE$．所以 $ABPE$ 是平行四边形．所以

$\triangle BPE$ 的面积 $=\triangle EAB$ 的面积 $=1$．

设$\triangle BCP$ 的面积 $=x$，则

$\triangle EPD$ 的面积 $=x$，$\triangle CDP$ 的面积 $=1-x$．

因为 $\dfrac{\Delta BCP\text{的面积}}{\Delta CDP\text{的面积}}=\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{\Delta BPE\text{的面积}}{\Delta PDE\text{的面积}}$，所以 $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{x}$，

即　$x^2=1-x$，即 $x^2+x-1=0$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（负根舍）．所以，

五边形 $ABCDE$ 的面积

$=\triangle CDE$ 的面积$+2\times\triangle EAB$ 的面积$+\triangle BCP$ 的面积

$=3+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})$．

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注