2018年全国高中数学联合竞赛湖北省预赛试题参考答案和评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设10分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中5分为一个档次，不要增加其他中间档次．

一、填空题（本题满分80分，每小题10分。）

1. 若对任意的$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，不等式$4+2\sin\theta\cos\theta-a\sin\theta-a\cos\theta\le 0$恒成立，则实数$a$的最小值为__4__．

2. 设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$4a_{n+1}-a_{n+1}a_n+4a_n=9$，则$a_{2018}=$__$\frac{5}{3}$__．

3. 设$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的单调函数，若对任意的$x\in(0,+\infty)$，都有$f[f(x)-2\log_2 x]=4$，则不等式$f(x)<6$的解集为__$\{x\,|\,0<x<4\}$__．

4. 已知点P在离心率为$\sqrt{2}$的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上，$F_1,F_2$为双曲线的两个焦点，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径$r$与外接圆半径$R$之比为__$\frac{\sqrt{6}}{2}-1$__．

5. 设G为$\triangle ABC$的重心，若$BG\perp CG$，$BC=\sqrt{2}$，则$AB+AC$的最大值为__$2\sqrt{5}$__．

6. 一枚骰子连续投掷四次，从第二次起每次出现的点数都不小于前一次出现的点数的概率为__$\frac{7}{72}$__．

7. 设正实数x,y满足$x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{27}{4}$，则$P=\frac{15}{x}-\frac{3}{4y}$的最小值为__6__．

8. 设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^3-n$，$n\in\mathbf{N}^*$，该数列中个位数字为0的项按从小到大的顺序排列构成数列$\{b_n\}$，则b_{2018}被7除所得的余数为__4__．

二、解答题（本题满分70分，第9题20分，第10题、第11题25分。）

9. 已知O为坐标原点，$N(1,0)$，M为直线$x=-1$上的动点，$\angle MON$的平分线与直线MN交于点P，记点P的轨迹为曲线E．

（1）求曲线E的方程；

（2）过点$Q(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$作斜率为$k$的直线$l$，若直线$l$与曲线$E$恰好有一个公共点，求$k$的取值范围．

解　（1）设$P(x,y)$，$M(-1,t)$，易知$0\le x<1$．

因为OP平分$\angle MON$，所以$\overrightarrow{MP}=\frac{|OM|}{|ON|}\overrightarrow{PN}=\sqrt{1+t^2}\,\overrightarrow{PN}$，所以

$$x+1=\sqrt{1+t^2}(1-x) \quad ①$$

$$y-t=\sqrt{1+t^2}(0-y) \quad ②$$

………………………5分

由①，②可得$t=\frac{2y}{1-x}$，代入①得$\frac{x+1}{1-x}=\sqrt{1+(\frac{2y}{1-x})^2}$，化简即得曲线$E$的方程为

$y^2=x(0\le x<1)$.

……………………10 分

（2）记 $A(1,1),B(1,-1)$，则 $k_{QA}=1$，$k_{QB}=-\frac{1}{3}$.

直线 l 的方程为 $y+\frac{1}{2}=k(x+\frac{1}{2})$，与抛物线方程 $y^2=x$ 联立，消去 x 得

$ky^2-y+\frac{1}{2}(k-1)=0$.

当直线 l 与抛物线 $y^2=x$ 相切于点 T 时，$\Delta=1-2k(k-1)=0$，解得 $k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

……………………15 分

当 $k=k_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时，$y_T=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，切点 T 在曲线 E 上；

当 $k=k_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 时，$y_T=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，切点 T 不在曲线 E 上.

若直线 l 与曲线 E 恰好有一个公共点，则有 $k_{QB}<k\le k_{QA}$ 或 $k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，故所求 k 的取值范围为 $(-\frac{1}{3},1]\cup\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\}$.

……………………20 分

10. 对任意正整数 m,n，定义函数 $f(m,n)$ 如下：

① $f(1,1)=1$；

② $f(m+1,n)=f(m,n)+2(m+n)$；

③ $f(m,n+1)=f(m,n)+2(m+n-1)$.

（1）求 $f(m,n)$ 的解析式；

（2）设 $a_n=\frac{\sqrt{f(n,n)}}{2^{n-1}}$（$n\in\mathbf{N}^*$），$S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，证明：$S_n<6$.

解 （1）由条件②可得：

$f(2,1)-f(1,1)=2\times(1+1)=2\times2$，

$f(3,1)-f(2,1)=2\times(2+1)=2\times3$，

……

$f(m,1)-f(m-1,1)=2(m-1+1)=2m$，

将上述 $m-1$ 个等式相加得 $f(m,1)-f(1,1)=2(2+3+\cdots+m)$.

而 $f(1,1)=1$，所以 $f(m,1)=2(2+3+\cdots+m)+1=m^2+m-1$. ……………………5 分

由条件③可得：

$f(m,2)-f(m,1)=2(m+1-1)=2m$，

$f(m,3)-f(m,2)=2(m+2-1)=2(m+1)$，

……

$f(m,n)-f(m,n-1)=2(m+n-1-1)=2(m+n-2)$，

将上述 $n-1$ 个等式相加得 $f(m,n)-f(m,1)=2[m+(m+1)+\cdots+(m+n-2)]$.

而 $f(m,1)=m^2+m-1$，所以

$f(m,n)=2[m+(m+1)+\cdots+(m+n-2)]+m^2+m-1=m^2+2mn+n^2-m-3n+1$.

……………………10 分

（2）因为 $f(n,n)=n^2+2n\cdot n+n^2-n-3n+1=(2n-1)^2$，所以 $a_n=\frac{\sqrt{f(n,n)}}{2^{n-1}}=(2n-1)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$，

……………………15 分

所以

$S_n=1\cdot(\frac{1}{2})^0+3\cdot(\frac{1}{2})^1+\cdots+(2n-1)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$，

$\frac{1}{2}S_n=1\cdot(\frac{1}{2})^1+3\cdot(\frac{1}{2})^2+\cdots+(2n-3)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}+(2n-1)\cdot(\frac{1}{2})^n$，

两式相减得：

$\frac{1}{2}S_n=1+2\cdot(\frac{1}{2})^1+2\cdot(\frac{1}{2})^2+\cdots+2\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}-(2n-1)\cdot(\frac{1}{2})^n$

$=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$，

故 $S_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $S_n<6$.

…………………………25 分

11．已知正数 a,b 满足 $a+b=1$，求 $M=\sqrt{1+2a^2}+2\sqrt{(\frac{5}{12})^2+b^2}$ 的最小值.

解 由柯西不等式可得 $(2a^2+1)(\frac{1}{2}+\lambda^2)\ge(a+\lambda)^2$，$[b^2+(\frac{5}{12})^2](1+\mu^2)\ge(b+\frac{5}{12}\mu)^2$，所以

$$M=\sqrt{1+2a^2}+2\sqrt{(\frac{5}{12})^2+b^2}\ge\frac{a+\lambda}{\sqrt{\frac{1}{2}+\lambda^2}}+2\cdot\frac{b+\frac{5}{12}\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\qquad ①$$

取等号的条件分别为

$$4a^2=\frac{1}{\lambda^2}\qquad ②$$

$$b^2=\frac{(\frac{5}{12})^2}{\mu^2}\qquad ③$$

…………………………10 分

当 $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\lambda^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+\mu^2}}$ 时，有 $\mu^2=4\lambda^2+1$，结合②，③得 $(1+\frac{1}{a^2})b^2=(\frac{5}{12})^2$.

又 $a+b=1$，所以 $b^2+\frac{b^2}{(1-b)^2}=(\frac{5}{12})^2$，整理得 $144b^4-288b^3+263b^2+50b-25=0$，故

$(4b-1)(36b^3-63b^2+50b+25)=0$ ④ …………………………15 分

记 $f(b)=36b^3-63b^2+50b+25$，则 $f'(b)=108b^2-126b+50=108(b-\frac{7}{12})^2+\frac{53}{4}>0$，所以 $f(b)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，所以，当 $0<b<1$ 时，$f(b)>f(0)=25>0$. 于是，由④可得 $b=\frac{1}{4}$，从而 $a=\frac{3}{4}$.

…………………………20 分

代入②，③求得 $\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{5}{3}$.

代入①式，整理得 $M\ge\frac{5\sqrt{34}}{12}$，因此 M 的最小值为 $\frac{5\sqrt{34}}{12}$. …………………………25 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注

自主招生在线 微信号：zizzsw