贵州省预赛试题

一、选择题（每小题 6 分，本大题共 30 分）

1. 小王在 word 文档中设计好一张 A4 规格的表格，根据要求，这种规格的表格需要设计 1000 张，小王欲使用“复制—粘贴”（用鼠标选中表格，右键点击“复制”，然后在本 word 文档中“粘贴”）的办法满足要求. 请问：小王需要使用 “复制--粘贴”的次数至少为（　　）

A. 9 次　　B. 10 次　　C. 11 次　　D. 12 次

解：

设需要“复制--粘贴”的次数至少为n. 则由题意知，第 1 次可以“复制--粘贴”1 张，第 2 次“复制--粘贴”2 张（包括原来设计好的哪一张），第 3 次“复制--粘贴”4 张，…，第n次“复制--粘贴”2^{n-1}张. 所以$1+1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}\geqslant 1000 \Rightarrow 2^n\geqslant 1000$.

故$n\geqslant 10$. 因此，需要“复制--粘贴”的次数至少为 10. 故选 B.

2. 已知一双曲线的的两条渐近线方程为$x-\sqrt{3}y=0$和$\sqrt{3}x+y=0$，则它的离心率是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}+1$

解：

由于两渐近线相互垂直，故此双曲线的离心率与渐近线为$y=\pm x$的双曲线的离心率相同，而以$y=\pm x$为渐近线的双曲线方程为$x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$，它的离心率为$\sqrt{2}$，故选 A.

3. 在空间直角坐标系中，已知$O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，则到面OAB、面OBC、面OAC、面ABC的距离相等的点的个数是（　　）

A. 1　　B. 4　　C. 5　　D. 无穷多

解：

四面体$OABC$的内切球球心以及四个“旁切球”的球心到面OAB、面OBC、面OAC、面ABC的距离相等，故满足条件的点的个数是 5. 故选 C.

4. 若圆柱被一平面所截，其截面椭圆的离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则此截面与圆柱底面所成的锐二面角是（　）

A. $\arcsin\frac{1}{3}$　　B. $\arccos\frac{1}{3}$　　C. $\arcsin\frac{2}{3}$　　D. $\arccos\frac{2}{3}$

解：

由题意知，截面椭圆的短轴长$2b$与圆柱底面直径相同，则截面与

锐二面角 θ 满足：$\cos\theta = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$，其中 $2a$ 为椭圆的长轴长.

由已知 $e = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}} = \sqrt{1-(\frac{b}{a})^2} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$，

即 $\cos\theta = \frac{1}{3}$，所以 $\theta = \arccos\frac{1}{3}$. 故选 B.

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$，设 $A_n = a_1 + a_2 + \text{L} + a_n$，$B_n = b_1 + b_2 + \text{L} + b_n$，若对

$\forall n \in \mathbf{N}^*$，有 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{3n+5}{5n+3}$，则 $\frac{a_{10}}{b_6} = (\quad)$

A. $\frac{35}{33}$　　B. $\frac{31}{29}$　　C. $\frac{175}{99}$　　D. $\frac{155}{87}$

解：

因为 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 为等差数列，且前 n 项和之比 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{3n+5}{5n+3}$，

故可设 $A_n = kn(3n+5)$，$B_n = kn(5n+3)$，

从而 $a_{10} = A_{10} - A_9 = 10k(30+5) - 9k(27+5) = 62k$，

$b_6 = B_6 - B_5 = 6k(30+3) - 5k(25+3) = 58k \Rightarrow \frac{a_{10}}{b_6} = \frac{62k}{58k} = \frac{31}{29}$. 故选 B.

二、**填空题**（每小题 6 分，本大题共 60 分）

6. 已知 O 为 ΔABC 所在平面上一定点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，

其 $\lambda \in [0, +\infty)$，则 P 点的轨迹为 $\underline{\angle BAC\text{ 的角平分线}}$.

解：

由 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$ 而 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，

且 $\lambda \in [0, +\infty)$，所以 $\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$ 表示 $\angle BAC$ 的角平分线上的一个向量.

因此，P 点的轨迹为 $\angle BAC$ 的角平分线.

7. 牛得亨先生、他的妹妹、他的儿子，还有他的女儿都是网球选手.

情况：①最佳选手的孪生同胞与最差选手性别不同；②最佳选手与最差选手年龄相同．则这四人中最佳选手是<u>牛得亨先生的女儿</u>．

解：

由题意知，最佳选手和最佳选手的孪生同胞年龄相同；由②，最佳选手和最差选手的年龄相同；由①，最佳选手的孪生同胞和最差选手不是同一个人．因此，四个人中有三个人的年龄相同．由于牛得亨先生的年龄肯定大于他的儿子和女儿，从而年龄相同的三个人必定是牛得亨先生的儿子、女儿和妹妹。由此，牛得亨先生的儿子，和女儿必定是①中所指的孪生同胞．

因此，牛得亨先生的儿子或女儿是最佳选手，而牛得亨先生的妹妹是最差选手。由①，最佳选手的孪生同胞一定是牛得亨先生的儿子，而最佳选手无疑是牛得亨先生的女儿．

8．方程组 $\begin{cases} x^3+y^3=26, \\ xy(x+y)=-6, \end{cases}$ 的实数解为 $\underline{\begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}}$ 或 $\underline{\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}}$

解：

因为 $\begin{cases} x^3+y^3=26, \\ xy(x+y)=-6, \end{cases}$ 所以 $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=26-18=8$，

即 $x+y=2$，代入 $xy(x+y)=-6$，得 $xy=-3$．

由 $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

9．如图 1，在 $\triangle ABD$ 中，点 C 在 AD 上，

$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}, \angle DBC=\dfrac{\pi}{6}, AB=CD=1$．则 $AC=\underline{\sqrt[3]{2}}$

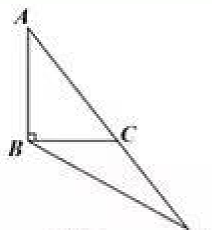


图 1

解：

在 $\triangle ABD$ 中，$\dfrac{AD}{\sin 120^\circ}=\dfrac{1}{\sin D} \Rightarrow \sin D=\dfrac{\sqrt{3}}{2(x+1)}$（其中 $AD=x$）①

在 $\triangle BCD$ 中，$\dfrac{BC}{\sin D}=\dfrac{1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sin D}=2 \Rightarrow \sin D=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2}$②

由①②得 $\dfrac{\sqrt{3}}{2(x+1)}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} \Rightarrow (x+1)\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3} \Rightarrow x^4+2x^3-2x-4=0$

$\Rightarrow (x+2)(x^3-2)=0$, Q $x+2>0, \therefore x^3=2$．即 $x=\sqrt[3]{2}$．

10．函数 $z=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-10x+13}$ 的最小值是 $\underline{\sqrt{10}}$

解：

因为 $z=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-10x+13}$

$$=\sqrt{(x-0)^2+(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(x-3)^2}$$

此即为直线 $y=x$ 上的点 (x,y) 到点 $(0,1)$ 与到点 $(2,3)$ 的距离之和．根据镜像原理，z 的最小值应为点 $(1,0)$ 到点 $(2,3)$ 的距离 $\sqrt{10}$．

11. 若边长为 6 的正 ΔABC 的三个顶点到平面 α 的距离分别为 1，2，3，则 ΔABC 的重心 G 到平面 α 的距离为 $\underline{\left\{0,\frac{2}{3},\frac{4}{3},2\right\}}$．

解：

1）当 ΔABC 的三个顶点在平面 α 的同侧时，由公式 $d=\frac{h_1+h_2+h_3}{3}$ 求得重心 G 到平面 α 的距离为 2；

2）当 ΔABC 的三个顶点中，其中一点与另两点分别在平面 α 的异侧时，求得重心 G 到平面 α 的距离分别为 0，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$．

12. 若实数 a 使得不等式 $|x-2a|+|2x-a|\geqslant a^2$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $\underline{\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]}$．

解：

设 $x=ka(k\in R)$，则 $|ka-2a|+|2ka-a|\geqslant a^2$，即对 $\forall k\in\mathbf{R}$，恒有

$|k-2|+|2k-1|\geqslant|a|\Leftrightarrow|k-2|+|2k-1|_{\min}\geqslant|a|$，而 $|k-2|+|2k-1|_{\min}=\frac{3}{2}$，

所以 $|a|\leqslant\frac{3}{2}\Leftrightarrow a\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$．

13. 若方程 $a^x=x(a>0,a\neq1)$ 有两个不等实根，则实数 a 的取值范围是

$\underline{1<a<e^{\frac{1}{e}}}$．

解：

由 $a^x=x$ 知 $x>0$，故 $x\cdot\ln a-\ln x=0\Rightarrow\ln a=\frac{\ln x}{x}$，

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$．当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上递增，在 $(e,+\infty)$ 上递减.

故 $0<\ln a<f(e)=\dfrac{1}{e}$，即 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$.

14. 顺次连结圆 $x^2+y^2=9$ 与双曲线 $xy=3$ 的交点，得到一个凸四边形. 则此凸四边形的面积为 $\underline{6\sqrt{5}}$.

解：

设 $A(m,n)\ (m>0,n>0)$ 为两曲线在第一象限的一个交点. 由两曲线既关于原点对称，又关于直线 $y=x$ 对称，得另外三个交点坐标为 $B(n,m)$，$C(-m,-n)$，$D(-n,-m)$.

则四边形 $ABCD$ 为矩形，其面积 $S=|AB|\cdot|CD|=\sqrt{2(m-n)^2}\cdot\sqrt{2(m+n)^2}$

$=2\sqrt{(m^2+n^2-2mn)(m^2+n^2+2mn)}=2\sqrt{(9-6)(9+6)}=6\sqrt{5}$.

15. 函数 $y=2(5-x)\sin\pi x-1(0\leqslant x\leqslant 10)$ 的所有零点之和等于 $\underline{\ 60\ }$

解：

函数 $y=2(5-x)\sin\pi x-1(0\leqslant x\leqslant 10)$ 的零点即为方程 $2(5-x)\sin$

间 $[0,10]$ 上的解 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=2\sin\pi x$ 的图像与函数 $y=\dfrac{1}{5-x}$ 的图像在区间 $[0,10]$ 上的交点的横坐标. 因为函数 $y=2\sin\pi x$ 的图像与函数 $y=\dfrac{1}{5-x}$ 的图像均关于点 $(5,0)$ 对称，且在区间 $[0,10]$ 上共有 12 个交点（6 组对称点），每组对称点的横坐标之和为 10，即这 12 个点横坐标之和为 60.

所以函数 $y=2(5-x)\sin\pi x-1(0\leqslant x\leqslant 10)$ 的所有零点之和等于 60.

三、**解答题**（每小题 15 分，本大题共 60 分）：

16. 已知函数 $y=3x+\sqrt{x^2-2x}$，求该函数的值域.

解：

令 $u=x-1$，则 $y=3u+3+\sqrt{u^2-1}$，则 $|u|\geqslant 1$

设 $\sqrt{u^2-1}=|u|-t\geqslant 0$，则 $0<t\leqslant|u|_{\min}=1$，且 $|u|=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t})$ ……………5 分

当 $u>0$ 时，$y=\dfrac{3}{2}(t+\dfrac{1}{t})+3+\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t})-t$

$=t+\dfrac{2}{t}+3$

由于 $0<t\leqslant 1$，故函数单调递减，所以 $y\geqslant 1+2+3=6$ ……………………10 分

当 $u<0$ 时，$y=-\dfrac{3}{2}(t+\dfrac{1}{t})+3+\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t})-t$

$=-2t+\dfrac{1}{t}+3\leqslant 3-2\sqrt{2}$（当且仅当 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $x=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4}$ 时取等号）

所以函数的值域为 $(-\infty,3-2\sqrt{2}]\cup[6,+\infty)$ ……………………………15 分

17. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $y=2x-1$ 与 C 交于 A、B 两点，且 $|AB|=\dfrac{8}{9}\sqrt{5}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $M(2,0)$ 的直线 l（斜率不为零）与椭圆 C 交于不同的两点 E、F（E 在点 F、M 之间)，记 $\lambda=\dfrac{S_{\triangle OME}}{S_{\triangle OMF}}$，求 λ 的取值范围．

由 $\lambda=\dfrac{S_{\triangle OME}}{S_{\triangle OMF}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times OM\times y_1}{\frac{1}{2}\times OM\times y_2}$ 得，$y_1=\lambda y_2$ ②

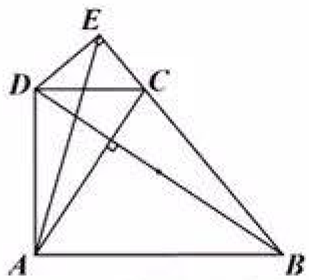
由①②得 $\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}=\dfrac{m^2+2}{8m^2}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4m^2}$

所以 $\dfrac{1}{8}<\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}<\dfrac{1}{4}$，解得 $0<\lambda<3+2\sqrt{2}$，且 $\lambda\neq 1$． ……………………15 分

18. 已知梯形 $ABCD$，边 CD、AB 分别为上、下底，且 $\angle ADC=90^\circ$，对角线 $AC\perp BD$，过 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E．

（1）证明：$AC^2=CD^2+AB\cdot CD$；

（2）证明：$\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{AC\cdot CD}{AC^2-CD^2}$．



证明：如右图.

（1）由于 $\angle ADC=90^\circ$，故 $AC^2=CD^2+AD^2$．

因为对角线 $AC \perp BD$，所以 $\angle DCA = 90^\circ - \angle BDC = \angle ADB$.

而 $\angle ADC = 90^\circ = \angle BAD$，则 $\Delta ACD \sim \Delta BDA$，故 $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot CD$.

因此，有 $AC^2 = CD^2 + AB \cdot CD$. ……………………………………5分

（2）由于 $\angle ADC = 90^\circ$，故 $AC^2 - CD^2 = AD^2$，

所以 $\dfrac{AC \cdot CD}{AC^2 - CD^2} = \dfrac{AC \cdot CD}{AD^2} = \dfrac{AC \cdot CD}{AB \cdot CD} = \dfrac{AC}{AB}$.

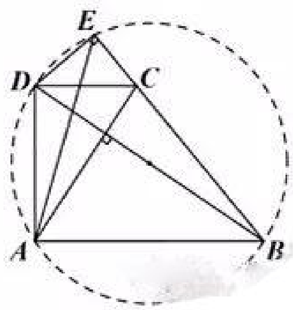
因为 $\angle BAD + \angle DEB = 180^\circ$，

所以 A、B、E、D 四点共圆，故 $\angle AEB = \angle ADB$. ……………………………10分

由于 $\angle BAC = 90^\circ - \angle CAD = \angle ADB$，

且 $\angle AEB = \angle BAC$，$\angle EBA = \angle ABC$，

则 $\Delta ABE \sim \Delta CBA$，故 $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CA}{AB}$.



由（1）知，$\dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{2^k+1} + \dfrac{1}{2^k+2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{k+1}-1} < 1$

故以边长为 $\dfrac{1}{2^k}, \dfrac{1}{2^k+1}, \dfrac{1}{2^k+2}, \cdots, \dfrac{1}{2^{k+1}-1}$ 的正方形可以

并排放入底为 1，高为 $\dfrac{1}{2^k}$ 的矩形内，而不重叠.

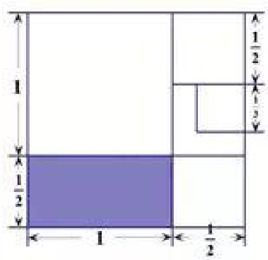


图2

取 $k = 2, 3, 4, \cdots$，即得底分别为

$\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2+1} + \cdots + \dfrac{1}{2^3-1}, \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^3+1} + \cdots + \dfrac{1}{2^4-1},$

$\dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^4+1} + \cdots + \dfrac{1}{2^5-1}, \cdots$，高分别为 $\dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \dfrac{1}{2^4}, \cdots$ 的一系列矩形，……10分

这些矩形的底小于 1，高的和为

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \text{L} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2}.$$

因此，以$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$为边长的正方形中，除了边长为$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$的正方形外，其余的正方形全部可以放入底为 1，高为$\frac{1}{2}$的矩形中（图 2 中阴影部分）.

而边长为$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$的三个正方形显然可以放入底为$\frac{3}{2}$，高为 1 的矩形内（如图 2）.

……………………………………15 分