

2019年北京高一数学预赛试题及答案

一、选择题

1. 已知集合 $M = \{2, 0, 1, 9\}$, A 是 M 的子集, 且 A 中各元素之和为 3 的倍数, 则满足条件的子集 A 的个数是

- (A) 8. (B) 7. (C) 6. (D) 5.

答: B.

解: 经枚举, 各元素之和为 3 的倍数的子集有 $\{0\}$, $\{9\}$, $\{2, 1\}$, $\{0, 9\}$, $\{2, 0, 1\}$, $\{2, 1, 9\}$, $\{2, 0, 1, 9\}$ 共 7 个.

2. 如图, $\angle BAF = \angle FEB = \angle EBC = \angle ECD = 90^\circ$, $\angle ABF = 30^\circ$, $\angle BFE = 45^\circ$, $\angle BCE = 60^\circ$, $AB = 2CD$. 则 $\tan \angle CDE$ 等于

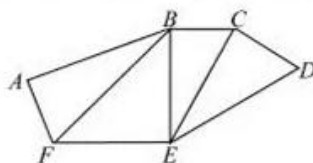
- (A) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. (C) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$. (D) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

答案: 选 A.

解: 因为 $\tan \angle CDE = \frac{EC}{CD}$, 考虑已知条件, 有

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{AB}{CD} = \frac{AB}{BF} \times \frac{BF}{BE} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{EC}{CD} \\ &= \cos 30^\circ \times \frac{1}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ \times \tan \angle CDE \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \tan \angle CDE. \end{aligned}$$

所以 $\tan \angle CDE = \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.



3. 对于无理数 $e = 2.71828182845\dots$, 定义函数 $f(n) = k$, 定义域是正整数, 其中 k 是 e 的小数点后第 n 位的数字, 规定 $f(0) = 2$, 则 $f(f(f(n)))$ 的值域是

- (A) $\{3, 4, 6, 9\}$. (B) $\{2, 0, 1, 9\}$. (C) $\{0, 3, 5, 9\}$. (D) $\{1, 2, 7, 8\}$.

答: D.

解: 易知 $f(n)$ 的值域为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $f(f(n))$ 的值域为 $\{1, 2, 7, 8\}$, $f(f(f(n)))$ 的值域是 $\{1, 2, 7, 8\}$.

4. 在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(\cos 110^\circ, \sin 110^\circ)$, $B(\cos 50^\circ, \sin 50^\circ)$, 则由坐标原点 O 到 AB 中点 M 的距离是

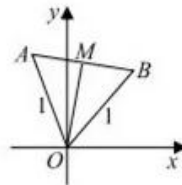
- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) 1.

答: 选 C.

解: 画草图, 易知 $OA = 1$, $OB = 1$,

$$\angle AOB = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ.$$

所以, $\triangle AOB$ 是正三角形. 所以, $|AB| = 1$. 由点 O 到 AB 中点 M 的距离是边长为 1

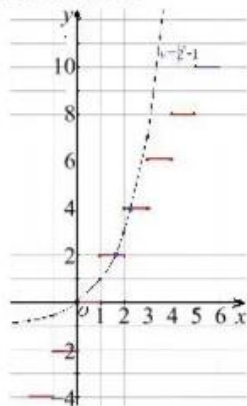


的正三角形的高线的长，即等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

5. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则方程 $2^x - 2[x] - 1 = 0$ 的根的个数是
(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

答: B.

解: 因为方程 $2^x - 2[x] - 1 = 0$ 的根的个数等价于函数 $y = 2^x - 1$ 的图象与函数 $y = 2[x]$ 的图象的交点个数. 在同一个平面直角坐标系中, 分别画出函数 $y = 2^x - 1$ 的图象与函数 $y = 2[x]$ 的图象, 如右图, 两函数的图象共有 3 个交点, 所以方程 $2^x - 2[x] - 1 = 0$ 有 3 个根.

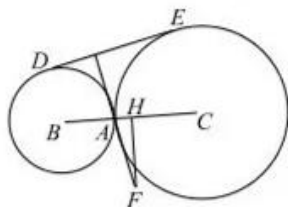


6. 如图, 已知半径分别等于 3 厘米和 5 厘米的 $\odot B$, $\odot C$ 外切于点 A . 两圆的一条外公切线切 $\odot B$ 于点 D , 切 $\odot C$ 于点 E , 过 A 作 DE 的垂线与 BC 的中垂线交于点 F , H 是 BC 的中点. 则 $\triangle AHF$ 的面积等于

- (A) $\frac{\sqrt{11}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{13}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{15}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

答: C.

解: 如图, 连接 BD , CE , 过 B 作 CE 的垂线, 垂足为 M , 因为 DE 是两圆的公切线, D , E 是切点, 所以 $BD \perp DE$, $CE \perp DE$, 于是四边形 $BDEM$ 为矩形, 有 $BM \parallel DE$, $BD = EM$,



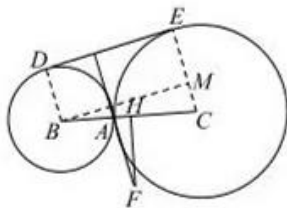
$CM = CE - BD = 2$. 易知, $\triangle FHA \sim \triangle BMC$, 所以 $\frac{S_{\triangle AHF}}{S_{\triangle CMB}} = \left(\frac{AH}{CM}\right)^2$,

$$\text{又 } AH = BH - BA = \frac{BA + AC}{2} - BA = 4 - 3 = 1.$$

在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中, 根据勾股定理, 有 $BM = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$,

所以, $S_{\triangle CMB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{15} \times 2 = 2\sqrt{15}$, 进而有

$$S_{\triangle AHF} = S_{\triangle CMB} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$



二、填空题

1. 计算 $\frac{714285^3 + 285714^3}{714285^3 + 428571^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答: $\frac{7}{8}$.

解1: 原式 = $\frac{(714285 + 285714)(714285^2 - 714285 \times 285714 + 285714^2)}{(714285 + 428571)(714285^2 - 714285 \times 428571 + 428571^2)}$
 $= \frac{(714285 + 285714)(714285^2 - 428571 \times 285714)}{(714285 + 428571)(714285^2 - 285714 \times 428571)}$
 $= \frac{714285 + 285714}{714285 + 428571} = \frac{999999}{1142856} = \frac{7 \times 142857}{8 \times 142857} = \frac{7}{8}$.

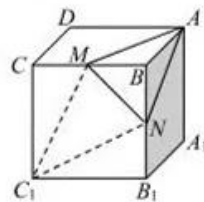
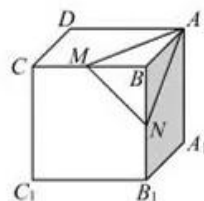
解2: 原式 = $\frac{(142857 \times 5)^3 + (142857 \times 2)^3}{(142857 \times 5)^3 + (142857 \times 3)^3} = \frac{5^3 + 2^3}{5^3 + 3^3} = \frac{133}{152} = \frac{7 \times 19}{8 \times 19} = \frac{7}{8}$.

2. 一个正方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 512cm^3 , 如图, M 为棱 CB 的中点, N 为棱 BB_1 的中点. 过 A, M, N 三点的平面切下一个三棱锥 $B-AMN$, 则三棱锥 $B-AMN$ 的全表面积是 $\underline{\hspace{2cm}} \text{cm}^2$

答: 64.

解: 如右图, 连接 MC_1 和 NC_1 . 易知 $\triangle AMN \cong \triangle C_1MN$, $\triangle ABM \cong \triangle C_1CM$, $\triangle ABN \cong \triangle C_1B_1N$, $\triangle MNB \cong \triangle MNB$.

因此, 三棱锥 $B-AMN$ 的全表面积等于正方形 BB_1C_1C 的面积, 即为 64cm^2 .



3. 函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$, 且 $f(n)=f(n-1)+\frac{1}{n(n-1)}$, 其中 $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}_+$, 那么 $f(2019) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答: $\frac{4037}{2019}$.

解: 因为 $f(n) - f(n-1) = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, 所以

$$f(2) - f(1) = 1 - \frac{1}{2},$$

$$f(3) - f(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$f(4) - f(3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

.....

$$f(2018) - f(2017) = \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018},$$

$$f(2018) - f(2017) = \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018},$$

$$f(2019) - f(2018) = \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}.$$

将以上各式等号两边分别相加得 $f(2019) - f(1) = 1 - \frac{1}{2019}$, 进而有

$$f(2019) = 2 - \frac{1}{2019} = 1\frac{2018}{2019}.$$

4. 整数 a, b, c 满足 $a+b+c=2$, 且 $S=(2a+bc)(2b+ca)(2c+ab) > 200$, 那么 S 的最小值是_____.

答: 256.

解: 因为 $a+b+c=2$, 所以

$$\begin{aligned} S &= (bc-2b-2c+4)(ca-2c-2a+4)(ab-2a-2b+4) \\ &= [(b-2)(c-2)] \cdot [(c-2)(a-2)] \cdot [(a-2)(b-2)] \\ &= (a-2)^2(b-2)^2(c-2)^2 \end{aligned}$$

是个平方数.

因为 $a+b+c=2$, a, b, c 是整数, 所以 a, b, c 中至少有一个是偶数, 因此 S 为偶数, 且已知 $S > 200$, 所以 $S \geq 16^2 = 256$. 而当 $a=4, b=0, c=-2$ 时, $S=256$. 所以 S 的最小值为 256.

5. 将正整数 $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ 按第 k 组含 $k+1$ 个数分组:

$$\underbrace{(1, 2)}_{\text{第1组}}, \underbrace{(3, 4, 5)}_{\text{第2组}}, \underbrace{(6, 7, 8, 9)}_{\text{第3组}}, \underbrace{(10, 11, 12, 13, 14)}_{\text{第4组}}, \dots$$

则 2019 在第_____组中.

答: 63.

解: 易知第 n 组的最后一个数为 $\frac{n(n+1)}{2} + n$, 当 $n=62$ 时, $\frac{62 \times 63}{2} + 62 = 2015$. 可见,

2015 是第 62 组的最后一个数, 因此 2019 应在第 63 组中.

6. 已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 > 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + 3 \leq 0\}$, 若 $a > 0$, 且 $A \cap B$ 中恰有两个整数, 则 a 的取值范围是_____.

答: $[2.625, 2.8)$

解: 因为 $A = \{x | x^2 + x - 6 > 0\}$, 即 $A = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + 3 \leq 0\}$,

又知 $A \cap B$ 中恰有两个整数, 所以 $A \cap B \neq \emptyset$, 因此 B 有实根, $\Delta = 4a^2 - 12 > 0$. 解得 $a > \sqrt{3}$ 或 $a < -\sqrt{3}$. 又因为已知 $a > 0$, 所以 $a > \sqrt{3}$.

所以 $B = \{x | a - \sqrt{a^2 - 3} \leq x \leq a + \sqrt{a^2 - 3}\}$.

由于 $0 < a - \sqrt{a^2 - 3} = \frac{3}{a + \sqrt{a^2 - 3}} < \sqrt{3} < 2$,

所以 $A \cap B$ 中恰有两个整数根只能是 3 和 4.

由于 $f(x)=x^2-2ax+3$, 所以 $f(4)=16-8a+3 \leq 0$, $f(5)=25-10a+3 > 0$, 解得 $\frac{21}{8} \leq a < \frac{14}{5}$, 即 $2.625 \leq a < 2.8$. 也即 $[2.625, 2.8)$.

7. 若 p, q 都是质数, 自然数 $a=p^\alpha q^\beta$ 的约数的个数 $d(a)$ 由公式

$$d(a)=(\alpha+1)(\beta+1)$$

给出. 如 $12=2^2 \times 3^1$, 所以 12 的约数个数为 $d(12)=(2+1)(1+1)=6$, 它们是 1, 2, 3, 4, 6 和 12.

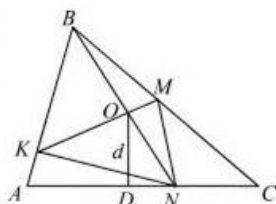
根据给出的计算公式请你回答: 在小于 20^{15} 的 20^{30} 的约数中, 不是 20^{15} 的约数的数共有 _____ 个.

答: 450.

解: $20^{30}=2^{60} \times 5^{30}$, 所以 $d(20^{30})=(60+1)(30+1)=61 \times 31=1891$. 又 $20^{30}=20^{15} \times 20^{15}$, 是个平方数, 除了 20^{15} , 任取一个约数大于 20^{15} 就有一个约数小于 20^{15} , 两数的乘积恰等于 20^{30} , 因此在 20^{30} 的约数中, 小于 20^{15} 的约数共有 $\frac{1891-1}{2}=945$ 个.

另外, 20^{15} 的约数都是 20^{30} 的约数, 又因为 $20^{15}=2^{30} \times 5^{15}$, 得 $d(20^{15})=(30+1)(15+1)=496$. 所以, 小于 20^{15} 的 20^{30} 的约数中, 不是 20^{15} 的约数共有 $945-496+1=450$ 个.

8. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 上分别取点 K 和 M , 使得 $AK:KB=1:4$, $BM:MC=4:5$, 在线段 KM 上取点 O , 使得 $KO:OM=3:1$, N 是射线 BO 与 AC 的交点, $AC=a$, 由点 O 到边 AC 的距离 $OD=d$, 则 $\triangle KMN$ 的面积等于 _____.



答: $\frac{ad}{3}$.

解: 过点 M 作 BN 的平行线, 交 NC 于点 M' , 过点 K 作 BN 的平行线, 交 AN 于点 K' , 连接 OM' , OK' . 则

$S_{\triangle NOM} = S_{\triangle ONM'}$, $S_{\triangle NOK} = S_{\triangle ONK'}$, 相加得 $S_{\triangle KMN} = S_{\triangle OMK'}$.

注意到 $\frac{NM'}{MC} = \frac{BM}{MC} = \frac{4}{5}$, 设 $NM'=4u$, $M'C=5u$.

由 $K'N:NM' = KO:OM = 3:1$, 得 $K'N = 12u$.

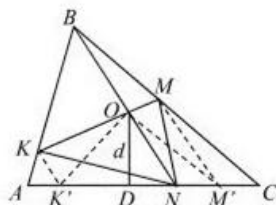
由 $AK':K'N = AK:KB = 1:4$, 得 $AK' = 3u$. 于是

$K'M' = 12u + 4u = 16u$,

$AC = 3u + 12u + 4u + 5u = 24u$.

因此 $K'M':AC = 16u:24u = 2:3$, 得 $K'M' = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}a$.

所以 $S_{\triangle KMN} = S_{\triangle OMK'} = \frac{1}{2}K'M' \times OD = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}a \cdot d = \frac{ad}{3}$.



竞赛与自招

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: **zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注