2017 年全国高中数学联赛广西赛区预赛试卷

（考试时间：2017 年 5 月 21 日上午 9:00—11:00）

题 号	一	9	10	11	12	合计
得 分						
评卷人						
复核人						

注意事项：

1. 本试卷共 12 小题，全卷满分 150 分；
2. 用圆珠笔或钢笔作答，解题书写不要超过装订线；
3. 不能使用计算器.

得分	
评卷人	

一、填空题 (本大题共 8 小题，每小题 10 分，共 80 分，请将答案填写在下面答题卡相应的横线上)

1．______________； 2．________________； 3. ______________； 4.________________；

5．______________； 6．________________； 7．______________； 8. ______________；

1. （赵继源供题）设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右顶点为 A ，上顶点为 B，左焦点为 F ．若 $\angle ABF=90^\circ$，则椭圆的离心率为______________.

解: 由 $\angle ABF=90^\circ$ 和射影定理有 $ac=b^2=a^2-c^2$, 即 $(\frac{c}{a})^2+\frac{c}{a}-1=0$,故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. （赵继源供题）不等式 $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}\geqslant 0$ 的解集是____________ .

解:由 $x^2-2x-3\geq 0$ 得 $x\geq 3$ 或 $x\leq -1$.当 $x\geq 3$ 时满足不等式;当 $x\leq -1$ 时 $x=-1$.

故原不等式的解集是 $\{-1\}\bigcup[3,+\infty)$.

3. （刘辉供题）函数 $y=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的最大值是________.

解 ： 设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. 因 为 $-1\leq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$, 所 以 $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$. 因 为 $t^2=1+2\sin x\cos x$, $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$, $y=\frac{t^2-1}{2}\times\frac{1}{1+t}=\frac{t-1}{2}$ ，所以最大值是 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

4. （赵继源供题）设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正数,其前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$,则 $a_n=$________.

解：由 $a_1=S_1=\frac{1}{2}(a_1+\frac{1}{a_1})$ ，得 $a_1=\frac{1}{a_1}$. 由 $a_n>0$, $a_1=1, S_1=1$.当 $n>1$ 时，由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 及

$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$, $S_n=\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}})$,化得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$.所以 $\{S_n^2\}$ 是等差数列,公差为 1,又

$S_1^2=1$,所以 $S_n^2=n$, $S_n=\sqrt{n}$ $a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$,首项 1 也满足,故 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

5. （黎福庆供题）设 a，b，c，d 为复数，若集合 S＝$\{a$，b，c，$d\}$具有性质“对任意 x，$y\in S$，必有 $xy\in S$”，则当 $a=1, b^2=1, c^2=b$ 时， b＋c＋d 等于________________.

解：∵S＝$\{a$，b，c，$d\}$，由集合中元素的互异性可知当 a＝1 时，b＝－1，c^2＝－1，∴c＝±i.

“对任意 x，$y\in S$ 必有 $xy\in S$”知－i∈S，即 d＝∓i.∴b＋c＋d＝(－1)＋i＋(－i)＝－1.

6. （於慧峰供题）一名篮球队员进行投篮练习. 若第 n 次投篮投中，则第 $n+1$ 次投篮投中的概率为 $\frac{2}{3}$；若第 n 次投篮投不中，则第 $n+1$ 次投篮投中的概率为 $\frac{1}{3}$.若该队员第 1 次投篮投中的概率为 $\frac{2}{3}$,则第 4 次投篮投中的概率为________.

解：设该队员投进第 $n-1$ 个球的概率为 a_{n-1}，投失的概率为 $1-a_{n-1}$.则投进第 n 个球的概率为 $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}(1-a_{n-1})$，即 $a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(a_{n-1}-\frac{1}{2})$, $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}$.故 $a_4=\frac{41}{81}$.

7.（王强芳供题）设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导数 $f'(x)$，对任意的 $x\in\mathrm{R}$ 有 $f(x)+f(-x)=x^2$,在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>x$.若 $f(1+a)-f(1-a)\geqslant 2a$，则实数 a 的范围是______________ .

解：由题意得 $f'(x)>x$，构造函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，则 $g'(x)=f'(x)-x>0$.从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.由条件 $f(x)+f(-x)=x^2$ 得 $g(x)+g(-x)=0$，则 $g(x)$ 是奇函数.因为 $g(x)$ 在 R 上单调递增，由 $f(1+a)-f(1-a)\geqslant 2a$ 知 $g(1+a)-g(1-a)\geqslant 0, g(1+a)\ \geqslant g(1-a)$.所以 $1+a\geqslant 1-a$ 解得 $a\geqslant 0$.

8.（苏华东供题）过半径为 5 的球面上一点 P 作三条两两互相垂直的弦 PA,PB,PC，使得 $PA=2PB$，则 $PA+PB+PC$ 的最大值为______________.

解：由题意，以 PA,PB,PC 为相邻三条棱的长方体内接于球，长方体的体对角线为球的直径.

$PA^2+PB^2+PC^2=100$，即 $5PB^2+PC^2=100$.因此有 $(PA+PB+PC)^2=(3PB+PC)^2=$

$(\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}PB+PC)^2\leqslant(\frac{9}{5}+1)(5PB^2+PC^2)=280$,所以 $PA+PB+PC$ 的最大值为 $2\sqrt{70}$.

二、 **解答题 (本大题共 4 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)**

得分	
评卷人	

9.（唐光明供题）（本小题满分 15 分）

已知数列$\{a_n\}$满足条件：$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1, n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$c_n=\dfrac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}$,记$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k$， 证明：$T_n<1$.

解:（1）由题意得 $a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$.又 $a_1+1=2\neq 0$． 所以数列 $\{a_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列．于是 $a_n=2^n-1$..5 分

（2）$c_n=\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$..10 分

$$\therefore T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}<1$．...15 分

得分	
评卷人	

10. （苏华东供题）（本小题满分 15 分）

设函数 $f(x)=4x^3+bx+1\ (b\in \mathrm{R})$ 对于任意的 $x\in[-1,1]$，都有 $f(x)\geqslant 0$ 成立，求实数b 的取值范围.

解法一：由题意得$4x^3+bx+1\geq 0$在$x\in[-1,1]$上恒成立.

当$x=0$时显然成立. ....5 分

当$x\in(0,1]$时，则有$b\geq -4x^2-\dfrac{1}{x}$.令$g(x)=-4x^2-\dfrac{1}{x}$，则$g'(x)=-8x+\dfrac{1}{x^2}$.由$g'(x)=0$解得$x=\dfrac{1}{2}$.

当$0<x<\dfrac{1}{2}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$单调递增；当$\dfrac{1}{2}<x\leq 1$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(\dfrac{1}{2},1]$单调递减.因此$g(x)$在$x\in(0,1]$时的最大值为$g(\dfrac{1}{2})=-3$，所以$b\geq -3$..10 分

如果 $x\in[-1,0)$，则有 $b\leq -4x^2-\dfrac{1}{x}$.令 $\mathrm{g}(x)=-4x^2-\dfrac{1}{x}$，则 $g'(x)=-8x+\dfrac{1}{x^2}$.当 $-1\leq x<0$ 时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$此时单调递增.因此$g(x)$在$x\in[-1,0)$时的最小值为$g(-1)=-3$，所以$b\leq -3$.

综上，$b=-3$...15 分

解法二:分别令$x=-1$和$x=\dfrac{1}{2}$得：$f(-1)=-b-3\geq 0$即$b\leq -3$；$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}b+\dfrac{3}{2}\geq 0$即$b\geq -3$.

所以$b=-3$是唯一成立的值...5 分

下面验证$b=-3$可以使得对于任意的$x\in[-1,1]$，都有$f(x)\geq 0$成立...10 分

此时$f(x)=4x^3-3x+1$.令$f'(x)=12x^2-3=0$解得$x=\pm\dfrac{1}{2}$.

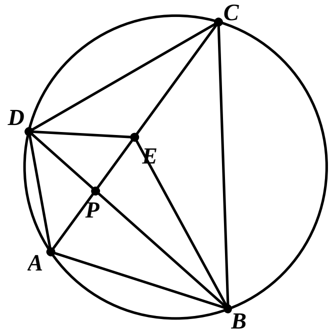
x	$[-1,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1]$
$f'(x)$	大于 0	0	小于 0	0	大于 0
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值为 0	单调递增

由上表可知$b=-3$成立……15 分

得分	
评卷人	

11.（赵继源供题）（本小题满分 20 分）

如图所示，已知圆内接四边形 $ABCD$ 中，AC 和 BD 相交于 P 点，满足 $\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}$.设 E 为 AC 的中点,求证: $\frac{BE}{ED}=\frac{BP}{PD}$.



证明:由托勒密定理得: $AB\bullet CD+AD\bullet BC=AC\bullet BD$

因 $AB\bullet CD=AD\bullet BC$, $AE=EC$,

所以$2AB\bullet CD=2AE\bullet BD=2EC\bullet BD$.

即 $AB\bullet CD=AE\bullet BD=EC\bullet BD$ ……10 分

在ΔCED 和ΔABD 中$\angle ABD=\angle ECD$, $AB\bullet CD=EC\bullet BD$,

所以$\Delta CED\backsim\Delta ABD$ 从而$\angle CED=\angle BAD$ ……15 分

同理$\angle AEB=\angle DCB$.则$\angle AEB=\angle DCB=180^{\circ}-\angle BAD=180^{\circ}-\angle CED=\angle AED$.

即 EP 平分$\angle BED$.故由角平分线定理得$\frac{BE}{ED}=\frac{BP}{PD}$……20 分

得分	
评卷人	

12. （王强芳供题）（本小题满分 20 分）

已知抛物线 C：$y=\frac{1}{2}x^2$ 与直线 l：$y=kx-1$没有公共点.设点 P 为直线 l 上的动点，过 P 作抛物线 C 的两条切线，A，B 为切点． (1)证明：动直线 AB 恒过定点 Q;

(2)设点 P 与（1）中的定点 Q 的连线交抛物线 C 于 M，N 两点，证明：$\frac{PM}{PN}=\frac{QM}{QN}$.

证明 :(1)设 $A(x_1,y_1)$，则 $y_1=\frac{1}{2}x_1^2$. 由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 得 $y'=x$ ，所以 $y'|_{x=x_1}=x_1$.

于是抛物线 C 在 A 点处的切线方程为$y-y_1=x_1(x-x_1)$，即 $y=x_1x-y_1$.

设 $P(x_0,kx_0-1)$，则有 $kx_0-1=x_0x_1-y_1$. 设$B(x_2,y_2)$，同理有 $kx_0-1=x_0x_2-y_2$. ……5 分

则 AB 的方程为$kx_0-1=x_0x-y$,

即 $x_0(x-k)-(y-1)=0$，所以直线 AB 恒过定点$Q(k,1)$. ……10 分

(2)PQ 的方程为 $y=\frac{kx_0-2}{x_0-k}(x-k)+1$，与抛物线方程 $y=\frac{1}{2}x^2$ 联立，消去 y，得

$x^2-\frac{2kx_0-4}{x_0-k}x+\frac{(2k^2-2)x_0-2k}{x_0-k}=0$. 设 $M(x_3,y_3)$， $N(x_4,y_4)$，则

$$x_3+x_4=\frac{2kx_0-4}{x_0-k},x_3x_4=\frac{(2k^2-2)x_0-2k}{x_0-k} \qquad ①$$

要证 $\frac{PM}{PN}=\frac{QM}{QN}$，只需证明 $\frac{x_3-x_0}{x_4-x_0}=\frac{k-x_3}{x_4-k}$，即

$$2x_3x_4-(k+x_0)(x_3+x_4)+2kx_0=0 \qquad ②$$

由①知，②式左边=$\frac{2(2k^2-2)x_0-4k}{x_0-k}-(k+x_0)\frac{2kx_0-4}{x_0-k}+2kx_0$

$=\frac{2(2k^2-2)x_0-4k-(k+x_0)(2kx_0-4)+2kx_0(x_0-k)}{x_0-k}=0$.

故②式成立，从而结论成立. ....20 分