2017年全国高中数学联赛辽宁省初赛参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请依据本评分标准，选择题和填空题只设6分和0分两档，其它各题的评阅，请严格按照本评分标准规定的评分档次给分。

2．如果考生的解题方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，评卷时可参照本评分标准适当划分档次评分，可以5分为一个档次，不要再增加其它中间档次。

一．**选择题**（本题满分30分，每小题6分）

1. (B) **2.** (D) **3.** (B) **4.** (C) **5.** (D)

二．**填空题**（本题满分30分，每小题6分）

6. $f(x)=\sin^2 x-\dfrac{1}{4}$； **7.** $3\sqrt{3}$； **8.** $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； **9.** $\left(\sqrt{2},1\right)$，$\left(\sqrt{2},-1\right)$； **10.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{5}{3}$.

三．**解答题**

11．解： 设

$$\begin{aligned}u&=(x^3+1)(y^3+1)\\&=(xy)^3+(x+y)[(x+y)^2-3xy]+1\end{aligned}$$

由已知$x+y=1$可得：

$$u=(xy)^3-3xy+2. \qquad ......(5分)$$

令$t=xy$，则

$$t=xy=x(1-x)=-x^2+x\le\frac{1}{4},$$

故

$$u=t^3-3t+2, \qquad t\le\frac{1}{4}. \qquad ......(10分)$$

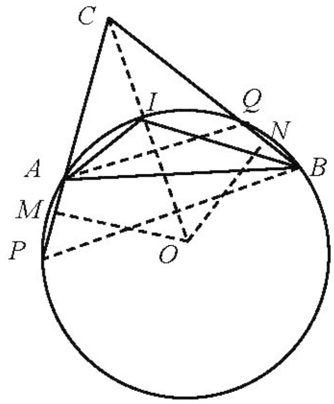
由于 $u'=3t^2-3$，则当$t<-1$时，$u'>0$；当$-1<t\le\dfrac{1}{4}$时，$u'<0$.

因此，u在$t=-1$时取得最大值. ......(15分)

即 $$xy=-1,\ x+y=1.$$

解得：$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$y=\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}$. ......(20分)

12. 证明：（方法一）因为I为ΔABC的内心，圆O为ΔAIB的外接圆，则 $AI=IQ$，且$\Delta AIC\cong\Delta QIC$. . . .（5 分）



所以 $AC=CQ$，且$CI\perp AQ$.

故C、I、O共线. . . .（10 分）

设M、N分别为AP、BQ的中点，则$OM\perp AP$，$ON\perp BQ$.

又因为CO是$\angle C$的角平分线，所以$OM=ON$. （15 分）

故$AP=BQ$.

因此 $CP=CB$，$CI\perp BP$. . . .（20 分）

所以 $AQ /\!/ BP$.

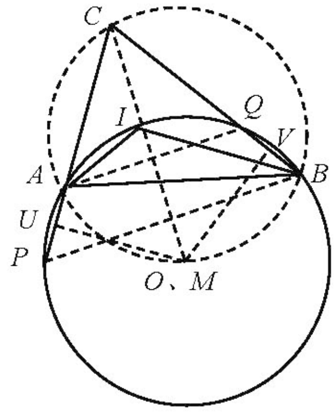
证明：（方法二）设CI的延长线交ΔABC的外接圆于点M.

因为I为ΔABC的内心，所以$AM=BM$.

又因为

$$\angle MIB=\angle ICB+\angle IBC=\angle ICA+\angle IBA$$
$$=\angle ABM+\angle IBA=\angle MBI.$$

因此，$MI=BM=AM$，故点M与点O重合. . . .（5 分）



设O在AP、BQ上的投影分别为U、V.

因为O在$\angle ACB$的角平分线上，则$OU=OV$. . . .（10 分）

因此，$AP=BQ$，$CU=CV$. . . .（15 分）

又因为U、V分别是AP、BQ的中点，因此

$AC=QC$，$CP=CB$，$AQ\perp CO$，$PB\perp CO$. . . .（20 分）

所以 $AQ /\!/ BP$.

13. 解：由题意，TM 的直线方程为 $y=\frac{x}{t}+1$，则

$$\begin{cases} y=\frac{x}{t}+1 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases},$$

所以点 E 坐标为 $(\frac{-8t}{t^2+4},\frac{t^2-4}{t^2+4})$． . . .（5 分）

又 TN 的直线方程为 $y=\frac{3x}{t}-1$，则

$$\begin{cases} y=\frac{3x}{t}-1 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases},$$

得点 F 坐标为 $(\frac{24t}{t^2+36},\frac{-t^2+36}{t^2+36})$． . . .（10 分）

直线 EF 斜率 $k_{EF}=\dfrac{\frac{-t^2+36}{t^2+36}-\frac{t^2-4}{t^2+4}}{\frac{24t}{t^2+36}-\frac{-8t}{t^2+4}}=\frac{t^2-12}{-16t}$．

直线 EF 方程为

$$y-\frac{t^2-4}{t^2+4}=-\frac{t^2-12}{16t}(x+\frac{8t}{t^2+4}),$$

即 $\frac{t^2-12}{16t}x+y-\frac{1}{2}=0$，可知，直线 EF 经过定点 $(0,\frac{1}{2})$． . . .（15 分）

因此，

$$S_{\triangle TEF}=S_{\triangle TMN}-S_{\triangle FMN}+S_{\triangle MEF}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times|t|-\frac{1}{2}\times 2\times\left|\frac{24t}{t^2+36}\right|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left|\frac{24t}{t^2+36}+\frac{8t}{t^2+4}\right|$$

$$=|t|-\left|\frac{24t}{t^2+36}\right|+|2t|\times\left|\frac{3}{t^2+36}+\frac{1}{t^2+4}\right|.$$

而 $S_{\triangle TMN}=\frac{1}{2}\times 2\times|t|=|t|$，

所以 $$k=\frac{S_{\triangle TMN}}{S_{\triangle TEF}}=\frac{t^4+40t^2+144}{t^4+24t^2+144}$$ . . .（20 分）

$$=1+\frac{16t^2}{t^4+24t^2+144}=1+\frac{16}{t^2+\frac{144}{t^2}+24}\leqslant 1+\frac{16}{2\sqrt{144}+24}=\frac{4}{3},$$

当且仅当 $t^2=\frac{144}{t^2}$ 即 $t=\pm 2\sqrt{3}$ 时取等号.

综上，当 $t=\pm 2\sqrt{3}$ 时，k 有最大值为 $\frac{4}{3}$. . . .（25 分）

14. 解：由已知，对于任意非负整数 n，$\cos 2^n\alpha<-\frac{1}{3}$ 都成立，下面用归纳法先证明：

$$\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|\geq\left(\frac{5}{3}\right)^n\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|,\quad \forall n\in N\ . \qquad (*)$$ . . .（5 分）

当 $n=0$ 时，(*)成立.

假设对于 $n-1$，(*)成立．于是有

$$\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|=2\left|\cos^2 2^{n-1}\alpha-\frac{1}{4}\right|$$

$$=2\left|\cos 2^{n-1}\alpha-\frac{1}{2}\right|\left|\cos 2^{n-1}\alpha+\frac{1}{2}\right|$$

$$\geq 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|$$

$$=\left(\frac{5}{3}\right)^n\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|.$$ . . .（10 分）

由于 $-1\leq\cos 2^n\alpha<-\frac{1}{3}$，故 $\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|\leq 1$．从而，

$$0 \le \left| \cos\alpha + \frac{1}{2} \right| \le \left(\frac{5}{3} \right)^n, \quad n \in N. \qquad ...(15 分)$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n = 0$，两边取极限，故必有 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. ...(20 分)

因此，$\alpha = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi$，$k \in Z$. ...(25 分)