

2019年欧洲杯数学奥林匹克(初中组)

★ 1. 对每一个正整数标上0, 1, 2中的一个数, 且满足若 k 标上 j , 则 $k+j$ 标上0. 设 S 表示前2019个正整数所标数的总和, 试求 S 的最大可能值.

🌈 解: 设前2019个正整数所标的数中有 x_i 个 i ($i=0, 1, 2$).

$$\text{则 } x_0 + x_1 + x_2 = 2019, S = x_1 + 2x_2.$$

由于每个标有2的正整数 $k \in \{1, 2, \dots, 2017\}$, $k+2$ 都被标上0.
故小于或等于2017的标有2的正整数的个数是小于或等于 x_0 .

$$\text{从而 } x_2 - 2 \leq x_0, \text{ 即 } x_2 \leq x_0 + 2.$$

$$\text{于是 } S = x_1 + 2x_2 \leq x_0 + x_1 + x_2 + 2 = 2021.$$

当前2019个正整数所标的数分别为2, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0,
2, 1, 0, $\dots$, 2, 1, 0, 2, 2时, $S=2021$.

故 S 的最大值是2021.



★ 2. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 证明以下不等式

成立: $\frac{x_1^2}{2x_1x_2-1} + \frac{x_2^2}{2x_2x_3-1} + \cdots + \frac{x_{2018}^2}{2x_{2018}x_{2019}-1} + \frac{x_{2019}^2}{2x_{2019}x_{2020}-1} > \frac{2019^2}{x_{2019}^2 + \frac{1}{x_{2019}^2}}.$

🌀 证明: 对 $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 同平方可得 $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2$.

即 $x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{1}{x_n^2} + 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

从而对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 有 $x_{k+1}^2 = x_1^2 + \sum_{n=1}^k (x_{n+1}^2 - x_n^2) = 2(k+1) + \sum_{n=1}^k \frac{1}{x_n^2}$. (*)

于是 $\sum_{i=1}^{2019} \frac{x_i^2}{2x_i x_{i+1} - 1} = \sum_{i=1}^{2019} \frac{x_i^2}{2x_i^2 + 1}$ (由 $x_{i+1} = x_i + \frac{1}{x_i}$ 可得 $x_{i+1}x_i = x_i^2 + 1$)

$$= \sum_{i=1}^{2019} \frac{1}{2 + \frac{1}{x_i^2}}$$

$$> \frac{2019^2}{4038 + \sum_{i=1}^{2019} \frac{1}{x_i^2}} \quad (\text{这是由柯西不等式得到的})$$

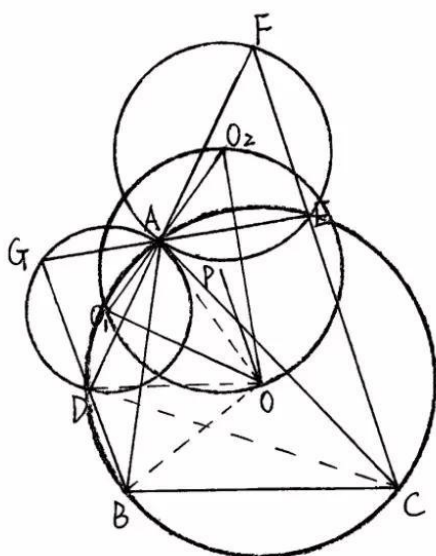
$$= \frac{2019^2}{x_{2020}^2 - 2} \quad (\text{这由(*)式可得})$$

$$= \frac{2019^2}{x_{2019}^2 + \frac{1}{x_{2019}^2}}$$

 自主招生在线
微信号: zizzs

 自主招生在线
微信号: zizzsw

★ 3. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω . 过 B 和 C 分别作直线 l_B, l_C , 且 $l_B \parallel l_C$. 直线 l_B, l_C 分别与圆 ω 再次交于点 D, E , 且 D, E 与 A 在直线 BC 的同侧. 设 DA 与 l_C 交于点 F , EA 与 l_B 交于点 G . $\triangle ABC, \triangle ADG, \triangle AEF$ 的外心分别为 O, O_1, O_2 , P 为 $\triangle OO_1O_2$ 的外心, 求证: $l_B \parallel OP \parallel l_C$.



证明: 用 $\angle A, \angle B, \angle C$ 分别表示 $\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB$.

$$\begin{aligned} \because \angle O_1AD &= 90^\circ - \angle AGD \\ &= 90^\circ - \angle AEF \\ &= \angle O_2AF \\ \therefore O_1, A, O_2 &\text{三点共线.} \end{aligned}$$

$\because O, O$ 垂直平分 AD , $\therefore \angle AO_1O = \frac{1}{2} \angle AO_1D = \angle AGD = \angle AEF = \angle B$.

同理可得 $\angle AO_2O = \angle C$.

故 $\triangle OO_1O_2 \sim \triangle ABC$. 而 P, O 是相似下的一对对应点.

从而 $\angle POO_1 = \angle OAB$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } \angle POD &= \angle POO_1 + \angle O_1OD = \angle OAB + \frac{1}{2} \angle AOD = 90^\circ - \angle C + \angle ACD \\ &= 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BOD = \angle BDO. \end{aligned}$$

即 $OP \parallel BD$. 亦即 $l_B \parallel OP \parallel l_C$.

★ 4. 设 u 是正有理数, m 是正整数. 数列 $\{q_n\}$ 满足 $q_1 = u$, 且对任意 $n \geq 2$, 若 $q_{n-1} = \frac{a}{b}$ (其中 a, b 为互素的正整数), 则 $q_n = \frac{a+mb}{b+1}$. 求所有的正整数 m , 使得无论有理数 u 为何值, 数列 $\{q_n\}$ 最终是一个周期数列.

注: 对数列 $\{x_n\}$, 若存在正整数 C 和 t , 使得 $x_n = x_{n+t}$ 对所有 $n \geq C$ 成立, 就称这个数列最终是一个周期数列.

解: 设 $q_n = \frac{a_n}{b_n}$ (其中 a_n, b_n 为互素的正整数, $n=1, 2, \dots$).

先证明: 当 m 为偶数时, 存在 $u \in \mathbb{Q}_+$, 使得数列 $\{q_n\}$ 最终不可能是周期数列.

当 m 为偶数时, 取 $u=1$, 对 n 用数学归纳法证明: $q_n = \frac{m}{2}(n-1) + \frac{1}{n}$.

对于 $n=1$ 显然成立, 假设 $q_k = \frac{m}{2}(k-1) + \frac{1}{k} = \frac{\frac{m}{2}(k-1)k+1}{k}$.

因为 $\gcd(\frac{m}{2}(k-1)k+1, k) = \gcd(1, k) = 1$, 所以 $q_{k+1} = \frac{(\frac{m}{2}(k-1)k+1)+mk}{k+1}$

$= \frac{m}{2}k + \frac{1}{k+1}$. 故 $q_n = \frac{m}{2}(n-1) + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

数列 $\{q_n\}$ 无上界, 因此数列 $\{q_n\}$ 最终不可能是周期数列.

再证明: 当 m 为奇数时, 对任意 $u \in \mathbb{Q}_+$, 数列 $\{q_n\}$ 最终是一个周期数列.

当 m 为奇数时, 记 $d_n = \gcd(a_n + mb_n, b_n + 1)$ ($n=1, 2, \dots$).

则 $a_{n+1} = \frac{a_n + mb_n}{d_n}, b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{d_n}$.

假设: 存在 $p \in \mathbb{N}^*$, 使得 $d_p = d_{p+1} = d_{p+2}$.

则对任意 $k \in \{1, 2, 3\}$ 有 $b_{p+k} = b_{p+k-1} + 1, a_{p+k} = a_{p+k-1} + mb_{p+k-1}$,

从而, $b_{p+k} = b_p + k, a_{p+1} = a_p + mb_p, a_{p+2} = a_{p+1} + mb_{p+1} = a_p + mb_p + m(b_p + 1)$

$= a_p + 2mb_p + m, a_{p+3} = a_{p+2} + mb_{p+2} = a_p + 2mb_p + m + m(b_p + 2) = a_p + 3mb_p + 3m$.

故 $(a_{p+2}, b_{p+2}) \equiv (a_p + 1, b_p) \pmod{2}$,

$(a_{p+3}, b_{p+3}) \equiv (a_{p+1} + 1, b_{p+1}) \pmod{2}$.

若 b_p 为奇数, 则 $b_{p+1} = b_p + 1$ 为偶数, 由 $\gcd(a_{p+1}, b_{p+1}) = 1$ 可知 a_{p+1} 为奇数, 从而 $2 \mid \gcd(a_{p+1} + 1, b_{p+1})$, 即 $2 \mid \gcd(a_{p+2}, b_{p+2}) = 1$ 不可能成立!

若 b_p 为偶数, 由 $\gcd(a_p, b_p) = 1$ 可知 a_p 为奇数, 进而 a_{p+1} 为偶数. 即 $2 \mid \gcd(a_{p+1}, b_{p+1})$, 亦即 $2 \mid \gcd(a_{p+2}, b_{p+2}) = 1$ 不可能成立!

故不存在 $p \in \mathbb{N}^*$, 使得 $d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = 1$.

将 $d_1, d_2, \dots$ 中所有大于 1 的数排成一列: $d_{t_1-1}, d_{t_2-1}, d_{t_3-1}, \dots$.

其中 $1 < t_1 < t_2 < \dots$, $t_{i+1} \leq t_i + 3$ ($i = 1, 2, \dots$).

$$\text{则 } b_{t_{i+1}} = \frac{b_{t_i-1} + 1}{d_{t_i-1}} \leq \frac{b_{t_i-1} + 1}{2} \leq \frac{b_{t_i+2} + 1}{2} \leq \frac{b_{t_i} + 3}{2} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow b_{t_{i+1}} - 3 \leq \frac{1}{2}(b_{t_i} - 3) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

$$\text{从而 } b_{t_{k+1}} - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (b_{t_1} - 3), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

故存在正整数 N_1 , 使得对所有正整数 $i \geq N_1$, 有 $b_{t_i} \leq 3$.

而对任意正整数 $n \geq t_{N_1}$, 都有一个正整数 $j \geq N_1$ 和一个非负整数 $k < 3$, 使得 $n = t_j + k$. 所以 $b_n = b_{t_j} + k \leq 3 + 2 = 5$.

现在, 对每个正整数 $n \geq t_{N_1}$, 有 $a_{n+1} \leq a_n + m b_n \leq a_n + 5m$. 故对于每个 $i \geq N_1$, 有 $a_{t_{i+1}} = \frac{a_{t_i-1} + m b_{t_i-1}}{d_{t_i-1}} \leq \frac{a_{t_i+2} + 5m}{2} \leq \frac{a_{t_i} + 15m}{2}$. 与前述

类似可知, 存在 $N_2 > N_1$, 使得对所有正整数 $i \geq N_2$, 有 $a_{t_i} \leq 15m$.

同样对于任意正整数 $n \geq t_{N_2}$, 都有一个正整数 $j \geq N_2$ 和一个非负整数 $k < 3$, 使得 $n = t_j + k$, 所以 $a_n \leq a_{t_j} + 5km \leq 15m + 10m = 25m$.

因此, 对所有正整数 $n \geq t_{N_2}$, 有 $a_n \leq 25m$, $b_n \leq 3$.

进而存在正整数 $M \geq t_{N_2}$, $T \leq 75m$, 使得 $(a_M, b_M) = (a_{M+T}, b_{M+T})$.

$$\text{即 } q_M = q_{M+T}. \text{ 于是 } q_{M+1} = \frac{a_{M+1} + m b_{M+1}}{b_{M+1}} = \frac{a_{M+T+1} + m b_{M+T+1}}{b_{M+T+1}} = q_{M+T+1}, \dots$$

由此可知对任意正整数 $n \geq M$, 都有 $q_{n+T} = q_n$. 故所求 m 为任意正奇数.

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注