十堰市一中 2019 级高一下 4 月考试
数学
命题人：王旭辉

考试时间：2020 年 4 月 18 日　　18:50-20:50

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，请将正确答案填涂在答题卡相应的位置。）

1. $\cos 80^\circ \sin 40^\circ + \sin 50^\circ \cos 10^\circ$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　**B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　**C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　**D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_5 = 9$，则a_3=（　）

A. 5　　**B.** ± 5　　**C.** ± 3　　**D.** 3

3.已知$a > b > 0$，则下列不等式成立的是（　　）

A. $a > b > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$　　**B.** $a > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > b$

C. $a > \frac{a+b}{2} > b > \sqrt{ab}$　　**D.** $a > \sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} > b$

4.给出下列命题：

①棱柱的侧棱都相等，侧面都是全等的平行四边形；

②用一个平面去截棱锥，棱锥底面与截面之间的部分是棱台；

③半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所形成的曲面叫做球面；

④棱台的侧棱延长后交于一点，侧面是等腰梯形.

其中正确命题的序号是（　　）

A. ①②④　　B. ①②③　　C. ②③　　D. ③

5. 已知向量$\vec{a} = (1,2)$，$\vec{b} = (2,-2)$，$\vec{c} = (\lambda,-1)$，若$\vec{c} // (2\vec{a} + \vec{b})$，则$\lambda =$（　　）

A. -2　　**B.** -1　　**C.** $-\frac{1}{2}$　　**D.** $\frac{1}{2}$

6.已知$\triangle ABC$中，$a = 1$，$b = \sqrt{3}$，$A = 30^\circ$，则B等于（　　）

A. 30°　　**B.** 30°或150°　　**C.** 60°　　**D.** 60°或120°

7.在$\triangle ABC$中，a、b、c分别为角A、B、C的对边，若$b = 2$，$c = 1$，$C = 30^\circ$，则$a =$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　**B.** 3　　**C.** $\sqrt{5}$　　**D.** 1

8. 若$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，且$\sin A=2\sin B\cos C$，那么$\triangle ABC$是(　　)

A．直角三角形　　　　　　　　　　B．等边三角形

C．等腰三角形　　　　　　　　　　D．等腰直角三角形

9.在等差数列$\{a_n\}$中，$S_{15}>0$，$S_{16}<0$，则使$a_n>0$成立的n的最大值为（　）

A．6　　　**B．7**　　　**C．8**　　　**D．9**

10.已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$S_5=2$，$S_{10}=6$，则$a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=$（　　）

A． 54　　　**B．** 48　　　**C．** 32　　　**D．** 16

11.设点D为ΔABC中BC边上的中点，O为AD边上靠近点A的三等分点，则（　　）

A． $\overrightarrow{BO}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　　　**B．** $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C． $\overrightarrow{BO}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　　　**D．** $\overrightarrow{BO}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

12. ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$2a+b=2c\cos B$，若ΔABC的面积为$S=\sqrt{3}c$，则ab的最小值为（　　）

A． 12　　　**B．** 24　　　**C．** 28　　　**D．** 48

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分. 请将正确答案填写在答题卡相应位置。）

13. 在数列$\left\{a_n\right\}$中，若$a_1=1, a_n-a_{n-1}=n\left(n\geq 2\right)$，则该数列的通项$a_n=$_______

14.已知圆锥的侧面展开图是一个半径为$6cm$，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形，则此圆锥的体积为

__________cm^3.

15. 已知平面向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$，$|\vec{b}|=1$，则$|2\vec{a}-\vec{b}|=$________.

16. 已知α、β为锐角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan\left(\beta-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则$\tan\beta=$________

三．解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 请将正确答案写在答题卡相应位置。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. (10 分)（1）解不等式$(x-1)(x-a)\geqslant 0$

（2）已知$f\left(x\right)=\frac{x^2+6x+9}{x+1}$，其中$x>-1$，求$f\left(x\right)$的最小值.

18.（12 分）已知函数 $f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 若 $f(x)+m\leq 0$ 对 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

19.（12 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_3=7$，$S_6=63$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=a_n+\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

20.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{3}{2}$，且 $a_n=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{1}{2^{n-1}}\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$.

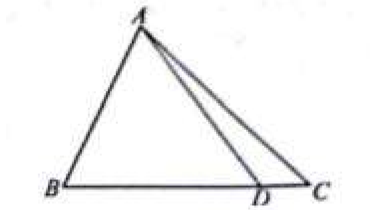
（1）求证：数列 $\{2^n a_n\}$ 是等差数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21.（12 分）如图，在ΔABC中，$C=\dfrac{\pi}{4},\overline{CA}\cdot\overline{CB}=48$，点$D$在$BC$边上，且

$AD=5\sqrt{2},\cos\angle ADB=\dfrac{3}{5}$.

（Ⅰ）求AC,CD的长；（Ⅱ）求$\cos\angle BAD$的值.



22.（12 分）数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$ ，当$n\geq 2$时，其前n项和S_n满足${S_n}^2=a_n\cdot(S_n-\dfrac{1}{2})$.

（1）求S_n的表达式；

（2）求数列 $\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(3)设b_n = $\dfrac{S_n}{2n+1}$,求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和T_n.

十堰市一中 2019 级高一下 4 月考试

数学答案

一、选择题

1–5 CDBDA　6–10 DABCD　11–12 DD

二、填空题

13. $\dfrac{n^2+n}{2}$　14. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$　15. $\sqrt{13}$　16. $\dfrac{13}{9}$

三、解答题

17.（1）当 $a>1$ 时，原不等式解集是 $\{x\mid x\geq a$,或 $x\leq 1\}$；

当 $a=1$ 时，原不等式解集是 R；

当 $a<1$ 时，原不等式解集是 $\{x\mid x\geq 1$ 或 $x\leq a\}$ ————————5 分

（2）$\because x>-1$，则 $x+1>0$，

由基本不等式得 $f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{x+1}=\dfrac{(x+3)^2}{x+1}=\dfrac{\left[(x+1)+2\right]^2}{x+1}=(x+1)+\dfrac{4}{x+1}+4$

$\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{4}{x+1}}+4=8$（当且仅当 $x+1=\dfrac{4}{x+1}$ 时，即当 $x=1$ 时取得等号）

因此，函数 $f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{x+1}(x>-1)$ 的最小值为 8.————————10 分

18.解:(1) 因为 $f(x)=2\sin x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sin x\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sin x\left(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$————————————6 分

(2)“ $f(x)+m\leq 0$ 对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立”等价于“ $f(x)_{max}+m\leq 0$ ”

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$时

$f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$.

所以$1+m\leq 0$,

所以实数 m 的取值范围为$(-\infty,-1]$.————————————12 分

19.（1）由题意知 $S_6\neq 2S_3$, $q\neq 1$ ....1 分

$$\therefore S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=7$$

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$$

....................3 分

解得$\begin{cases}a_1=1\\q=2\end{cases}$..............5 分　　$\therefore a_n=2^{n-1}$...............6 分

（2）由（1）知 $b_n=2^{n-1}+n-1$...............7 分

$$\therefore T_n=(1+2+\cdots+2^{n-1})+[1+2+\cdots+(n-1)]$$ ....9 分

$$=2^n+\frac{n^2-n}{2}-1$$ ....12 分

20.（1）因为 $a_n=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{1}{2^{n-1}}(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $2^na_n=2^{n-1}a_{n-1}+2$，即

$2^na_n-2^{n-1}a_{n-1}=2$，

所以数列$\{2^na_n\}$是等差数列，且公差 $d=2$，其首项 $2a_1=3$

所以$2^n a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$，解得$a_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$；——————————6分

（2）$S_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{2n+1}{2^n}$，①

$\dfrac{S_n}{2}=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$，②

①−②，得$\dfrac{S_n}{2}=\dfrac{3}{2}+2\times\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2\times\dfrac{1}{4}\times\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$

$=\dfrac{5}{2}-\dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$，

所以$S_n=5-\dfrac{2n+5}{2^n}$——————————12分

21.（Ⅰ）在ΔABD中，$\because \cos\angle ADB=\dfrac{3}{5},\therefore \sin\angle ADB=\dfrac{4}{5}.\therefore$

$\sin\angle CAD=\sin(\angle ADB-\angle ACD)=\sin\angle ADB\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\angle ADB\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

在ΔADC中，由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，即$\dfrac{AC}{\frac{4}{5}}=\dfrac{CD}{\frac{\sqrt{2}}{10}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

解得$AC=8,CD=\sqrt{2}$.——————————6分

（Ⅱ）$\because \overline{CA}\cdot\overline{CB}=48$，$\therefore 8\cdot CB\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=48$，解得$CB=6\sqrt{2}$，$\therefore BD=CB-CD=5\sqrt{2}$，

在ΔABC中，$AB=\sqrt{8^2+(6\sqrt{2})^2-2\times 8\times 6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$，在$\Delta ABD$中，

$\cos\angle BAD=\dfrac{(2\sqrt{10})^2+(5\sqrt{2})^2-(5\sqrt{2})^2}{2\times 2\sqrt{10}\times 5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.——————————12分

22.（1）由$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$得$S_n^2=(S_n-S_{n-1})\left(S_n-\dfrac{1}{2}\right)=S_n^2-\dfrac{1}{2}S_n-S_{n-1}S_n+\dfrac{1}{2}S_{n-1}$

得 $S_{n-1}-S_n=2S_nS_{n-1}\,(n\ge 2)$

$\therefore \dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2\,(n\ge 2)$

$\therefore \left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{S_1}$为首项,以2为公差的等差数列,

$\therefore \dfrac{1}{S_n}=2n-1,$

$S_n=\dfrac{1}{2n-1}\,(n\in N)$————5 分

（2）$a_n=\begin{cases}1,\ n=1\\ \dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n-3},\ n\ge 2\end{cases}$————8 分

(3) $b_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.————12 分