厦门双十中学 2020 年高一（下）数学半期考考卷 2020.4.23

第Ⅰ 卷（选择题　共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知数列 1, $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，…,$\sqrt{2n-1}$，…则$3\sqrt{5}$是它的(　　)B

A．第 22 项　　B．第 23 项　　C．第 24 项　　D．第 28 项

2．△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为a,b,c，若a,b,c成等比数列，且$c=2a$，则$\cos B=$（　　）C

A.$\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

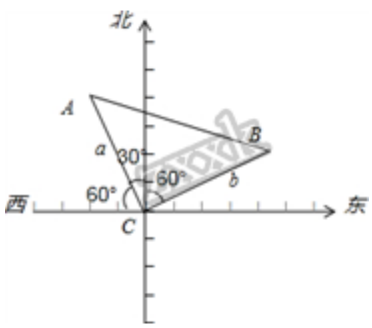
3．在等差数列$\{a_n\}$中，$3(a_3+a_5)+2(a_7+a_{10}+a_{13})=24$，则此数列前 13 项的和为（　　）B

A．13　　B．26　　C．39　　D．52

4. 某观察站C与两灯塔A,B的距离分别为a米和b米，测得灯塔A在观察站C西偏北$60°$，灯塔B在观察站C北偏东$60°$，则两灯塔A,B间的距离为（　　）

A. $\sqrt{a^2+b^2}$米　　B. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$米　　C. $\sqrt{a^2+b^2+ab}$米　　D. $\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{3}ab}$米

【答案】A

【解析】


依题意，作出上图，$\because \angle ACB=30°+60°=90°$, $|AC|=a$, $|CB|=b$，$\therefore$ 由余弦定理得：

$|AB|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 90°}=\sqrt{a^2+b^2}$，故选 A.

5．若数列$\{a_n\}$是等比数列，则下列数列一定是等比数列的是(　　) C

A．$\{\lg a_n\}$　　B．$\{1+a_n\}$　　C．$\{\frac{1}{a_n}\}$　　D．$\{\sqrt{a_n}\}$

6．$\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{3}$，$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则符合条件的三角形有(　　)B

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．0 个

7.已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$，则下列说法不正确的是（ D ）

A. $f(x)$ **的一个周期为** 2π

B. $f(x)$ **的图象关于** $x=-\frac{5\pi}{6}$ **对称**

C. $f(x)$ **在** $[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$ **上单调递减**

D. $f(x)$ **向左平移** $\frac{\pi}{3}$ **个单位长度后图象关于原点对称**

8．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$9S_3=S_6$，则数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前 5 项和为(　　)

A.$\frac{15}{8}$和 5　　B.$\frac{31}{16}$和 5

C.$\frac{31}{16}$　　D.$\frac{15}{8}$

答案　C

解析　若 $q=1$，则 $9S_3=27a_1$，$S_6=6a_1$，

$\because a_1\neq 0$，$\therefore 9S_3\neq S_6$，矛盾，故 $q\neq 1$.

由 $9S_3=S_6$ 得 $9\times\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$，

解得 $q=2$，故 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

$\therefore \frac{1}{a_n}=(\frac{1}{2})^{n-1}$.

$\therefore \{\frac{1}{a_n}\}$的前 5 项和 $S_5=\frac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$.

9．在 ΔABC 中，$AB=\sqrt{3}, AC=1, \angle B=30^\circ$，则 ΔABC 的面积为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】

试题分析：由余弦定理知 $\cos 30^\circ = \frac{3+a^2-1}{2\cdot a\cdot\sqrt{3}}$，整理学科网得 $a^2-3a+2=0$，解得 $a=1$ 或 $a=2$，有三角形面积公式得 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1\times\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 或 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\times\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

10. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和，且 $S_5<S_6$，$S_6=S_7>S_8$，则下列结论错误的是(　　)

A．$d<0$　　B．$a_7=0$　　C．$S_9>S_5$　　D．S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

答案　C

解析　由 $S_5<S_6$，得 $a_6=S_6-S_5>0$.

又 $S_6=S_7 \Rightarrow a_7=0$，所以 $d<0$.

由 $S_7>S_8 \Rightarrow a_8<0$,

因此，$S_9-S_5=a_6+a_7+a_8+a_9$

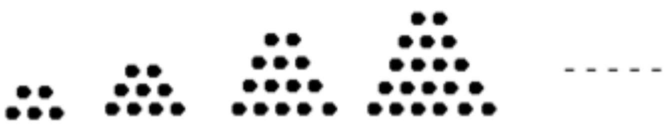
$=2(a_7+a_8)<0$,

即 $S_9<S_5$.

11、若两个正实数 x，y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，且不等式 $x+\frac{y}{4}<m^2-3m$ 有解，则实数 m 的取值范围（B　　）

A．$(-1,4)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$　　C．$(-4,1)$　　D．$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

12. 两千多年前，古希腊毕达哥拉斯学派的数学家曾经在沙滩上研究数学问题．他们在沙滩上画点或用小石子表示数，按照点或小石子能排列的形状对数进行分类．如下图中实心点的个数5,9,14,20,⋯为梯形数．根据图形的构成，记此数列的第2013项为 a_{2013}，则 $a_{2013}-5=$　(　　)



A. 2019×2013　　B. 2019×2012　　C. 1006×2013　　D. 2019×1006

【答案】D

【解析】观察梯形数的前几项，得

$5=2+3=a_1$,

$9=2+3+4=a_2$,

$14=2+3+4+5=a_3$,

…

$a_n = 2 + 3 + \ldots + (n + 2) = \frac{(n+1)(2+n+2)}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+4)$,

由此可得 $a_{2013}=2+3+4+5+\ldots+2011=\frac{1}{2}\times2014\times2017$,

$\therefore$ $a_{2013}-5=\frac{1}{2}\times2014\times2017-5=1007\times2017-5=2019\times1006$,

本题选择 D 选项.

第II 卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.（5 分）不等式 $\frac{2x+1}{1-x}>0$ 的解集为__$\left\{x|-\frac{1}{2}<x<1\right\}$__.

【分析】不等式 $\frac{2x+1}{1-x}>0$ 等价于（2x+1）（x－1）＜0，即可求解.

【解答】解：由不等式 $\frac{2x+1}{1-x}>0$ 等价于（2x+1）（x－1）＜0,

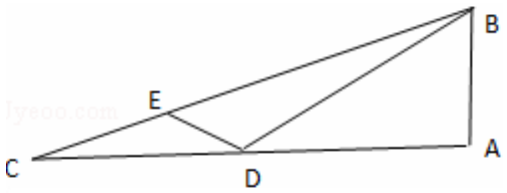
可得：$-\frac{1}{2}<x<1$,

故答案为 $\{x|-\frac{1}{2}<x<1\}$.

【点评】本题考查分式不等式的解法，基本知识的考查.

14.《孙子算经》是我国古代的数学名著，书中有如下问题：“今有五等诸侯，共分橘子六十颗，人别加三颗．问：五人各得几何？”其意思为“有 5 个人分 60 个橘子，他们分得的橘子数成公差为 3 的等差数列，问 5 人各得多少橘子．”这个问题中，得到橘子最多的人所得的橘子个数是_________;**18**

15.如图，在 Rt△ABC 中，∠ A=90°，D 是 AC 上一点，E 是 BC 上一点，若 AB=$\frac{1}{2}$BD，CE=$\frac{1}{2}$EB，∠ BDE=120°，CD=3，则 BC=___________. $\sqrt{39}$



16. 把一数列依次按第一个括号内一个数，第二个括号内两个数，第三个括号内三个数，第四个括号内一个数，…，循环分为(1)，(3,5)，((7,9,11))，(13)，(15,17)，(19,21,23)，(25)，…，则第 50 个括号内各数之和为__________ .

【解析】由题意可得，将三个括号作为一组，则由$50 = 16 \times 3 + 2$，第 50 个括号应为第 17 组的第二个括号，即 50 个括号中应有两个数，因为每组中有 6 个数，所以第 48 个括号的最后一个数为数列$\{2n - 1\}$的第$16 \times 6 = 96$项，第 50 个括号的第一个数为数列$\{2n - 1\}$的第$16 \times 6 + 2 = 98$项，即$2 \times 98 - 1 = 195$，第二个数是$2 \times 99 - 1 = 197$，所以第 50 个括号内各数之和为$195 + 197 = 392$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （10 分）设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1$.

（1）若对一切实数 x， $f(x) < 0$ 恒成立，求 m 的取值范围.

（2）对于 $x \in [1,3], f(x) < -m+5$ 恒成立，求 m 的取值范围.

17. （10 分）（1）①$m=0$时，符合题意 —1 ②$\begin{cases} m<0 \\ \Delta<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<0 \\ m^2+4m<0 \end{cases} \Rightarrow (-4,0)$ —3

综上可知$m \in (-4,0]$ —4

（2） $x \in [1,3], mx^2 - mx + m - 6 < 0$ 恒成立，令 $g(x) = mx^2 - mx + m - 6$

①$m=0$时，符合题意 —5 ②$m \neq 0$时，对称轴 $x = \frac{1}{2}$，当 $m<0$时，满足：

$g(1) < 0 \Rightarrow m < 6 \Rightarrow m < 0$ —7 当 $m>0$时，满足： $g(3) < 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{6}{7}$ —9

综上可知： $m \in (-\infty, \frac{6}{7})$ —10

18(**本小题满分 12 分**).在ΔABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$a=2$，$A=\dfrac{\pi}{3}$.

（1）当$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin(B-C)=\sin 2B$时，求$\Delta ABC$的面积；

（2）求ΔABC周长的最大值.

18.解：（1）由条件得：$\sin A-\sin(B-C)=\sin 2B$，$\therefore$ $\sin(B+C)-\sin(B-C)=\sin 2B$，

$\therefore$ $2\cos B\sin C=2\sin B\cos B$. ——1

①$\cos B=0$时，$B=\dfrac{\pi}{2}$，$c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$ $S=\dfrac{1}{2}ac=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$， ——2

②$\cos B\neq 0$时，$2\sin C=2\sin B$，$\therefore$ $B=C=A=\dfrac{\pi}{3}$，

$a=b=c=2$，$\therefore$ $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$. ——4

$\therefore$ $S=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$或$\sqrt{3}$. ——5

（2）设ΔABC的外接圆半径为R，$\therefore$ 由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

$\therefore$ $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$， ——6

$\therefore$ 周长$l=a+b+c=2+2R\sin B+2R\sin C=2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(\sin B+\sin C)$. ——7

$\because$ $A=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore$ $B+C=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore$ $C=\dfrac{2\pi}{3}-B$，$\therefore$ $B\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$， ——8

$\therefore$ $l=2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}[\sin B+\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)]=2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(\dfrac{3}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B)$，

$=2+4\sin(B+\dfrac{\pi}{6})$， ——10

$\because$ $B\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，$\therefore$ $B+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$ $\therefore$ $\sin(B+\dfrac{\pi}{6})\in(\dfrac{1}{2},1]$，$\therefore$ $l_{\max}=6$. ——12

19. (本小题满分 12 分)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$.递增的等比数列$\{b_n\}$满足：$b_1+b_4=18$, $b_2\cdot b_3=32$.

(I ）求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

(II ）若$c_n=a_n\cdot b_n$, $n\in\mathrm{N}^*$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n .

【答案】(1) $a_n=3n-1$， $b_n=2^n$，(2) $T_n=(3n-4)\cdot 2^{n+1}+8$ 。

试题解析：(I ）当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-\left[\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\right]=3n-1$……2 分

又 Q $n=1$时, $a_1=S_1=2$符合，所以$a_n=3n-1$ ……………………………………………3 分

Q $b_2b_3=b_1b_4$， $\therefore b_1,b_4$方程$x^2-18x+32=0$的两根,

又 Q $b_4>b_1$， 所以解得$b_1=2,b_4=16\therefore q^3=\frac{b_4}{b_1}=8\therefore q=2$………5 分$\therefore b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2^n$ ………6

分

(II) Q $a_n=3n-1,b_n=2^n$， 则$C_n=(3n-1)\cdot 2^n$

$\therefore T_n=2\cdot 2^1+5\cdot 2^2+8\cdot 2^3+11\cdot 2^4+\text{L}+(3n-1)\cdot 2^n$

$2T_n=2\cdot 2^2+5\cdot 2^3+8\cdot 2^4+11\cdot 2^5+\text{L}+(3n-1)\cdot 2^{n+1}$ ……………………………………7 分

将两式相减得：

$-T_n=2\cdot 2^1+3(2^2+2^3+2^4+\text{L}\ 2^n)-(3n-1)\cdot 2^{n+1}$ ……………………………………………8 分

$=4+3\left[\frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}\right]-(3n-1)\cdot 2^{n+1}$ 9 分 $=(-3n+4)\cdot 2^{n+1}-8$ 10 分

所以$T_n=(3n-4)\cdot 2^{n+1}+8$ …12 分

20(**本小题满分 12 分**)．在△ABC 中，内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，若

$$c\left(a\cos B-\frac{1}{2}b\right)=a^2-b^2.$$

（1）求角 A；(2)若b = 2，c = 1，D为BC的中点，求AD的长.

20（1）由 $c\left(a\cos B-\frac{1}{2}b\right)=a^2-b^2$，　$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，得 $a^2+c^2-b^2-bc=2a^2-2b^2$，.........2 分

所以 $a^2=b^2+c^2-bc$，因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，..............................3 分

因为角 A 为三角形内角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$..............................5 分

(II)方法一：$\because \overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}(1+4+2\times1\times2\times\cos\frac{\pi}{3})=\frac{7}{4}$$

$\therefore |AD|=|\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

方法二：$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3$

$\therefore a^2+c^2=4=b^2$，$B=\frac{\pi}{2}$

$\because BD=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AB=c=1$，$\therefore AD=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

方法三：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3$，$a=\sqrt{3}$

由正弦定理得：$\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=2$，$\therefore \sin B=1$，故 $B=\frac{\pi}{2}$

$\because BD=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AB=c=1$，$\therefore AD=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$..............................12 分

21(**本小题满分 12 分**)．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_2=\dfrac{1}{4}$，且$a_{n+1}=\dfrac{(n-1)a_n}{n-a_n}$

$(n\in N^*)(n=2,3,4,\cdots)$

(1) 求a_3，a_4的值；

(2) 设$b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-1(n\in N^*)$，求$\{b_n\}$的通项公式；

(3) 设$c_n=\dfrac{\sin 3}{\cos b_n\cdot\cos b_{n+1}}(n\in N^*)$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和$S_n$．

21【解答】解：(1) ∵ 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{4}$，

且$\frac{1}{4}$ (n=2，3，4，…)，

$\therefore\ a_3=\dfrac{(2-1)a_2}{2-a_2}=\dfrac{\frac{1}{4}}{2-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{7}$，……………………………1 分

$a_4=\dfrac{(3-1)a_3}{3-a_3}=\dfrac{2\times\frac{1}{7}}{3-\frac{1}{7}}=\dfrac{1}{10}$，……………………………2 分

$\therefore\ a_3=\dfrac{1}{7}$，$a_4=\dfrac{1}{10}$……………………………3 分

(2) 当 n≥2 时，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\dfrac{n-a_n}{(n-1)a_n}-1=\dfrac{n(1-a_n)}{(n-1)a_n}=\dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$，

∴ 当 n≥2 时，$b_n=\dfrac{n}{n-1}b_{n-1}$，

故$b_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}b_n$，$n\in N^*$，……………………………5 分

累乘得 $b_n=nb_1$，……………………………6 分

∵ $b_1=3$，∴ $b_n=3n$，$n\in N^*$．……………………………7 分

(3) ∵ $c_n=\dfrac{\sin 3}{\cos b_n\cdot\cos b_{n+1}}$

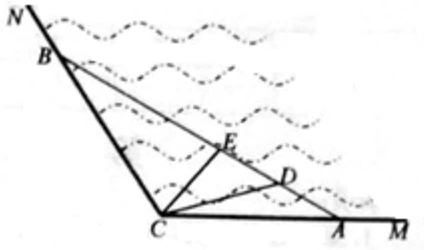
$=\dfrac{\sin(3n+3-3n)}{\cos(3n+3)\cdot\cos 3n}=\tan(3n+3)-\tan 3n$，……………………………10 分

∴ $S_n=c_1+c_2+\ldots+c_n$

$=(\tan 6-\tan 3)+(\tan 9-\tan 6)+\ldots+(\tan(3n+3)-\tan 3n)$

$=\tan(3n+3)-\tan 3$．……………………………12 分

22(**本小题满分 12 分**)．如图所示，MCN 是某海湾旅游与区的一角，为营造更加优美的旅游环境，旅游区管委会决定建立面积为 $4\sqrt{3}$ 平分千米的三角形主题游戏乐园 ABC，并在区域 CDE 建立水上餐厅．



已知 $\angle ACB=120^\circ$，$\angle DCE=30^\circ$．

（1）设 $AC=x$，$AB=y$，用 x 表示 y，并求 y 的最小值；

（2）设 $\angle ACD=\theta$（θ为锐角），当 AB 最小时，用 θ 表示区域 CDE 的面积 S，并求 S 的最小值．

21．【解析】试题分析：

(1)首先确定函数的解析式为 $y=\sqrt{x^2+\frac{256}{x^2}+16}$, 结合均值不等式的结论可得 y 的最小值是 $4\sqrt{3}$；

(2)结合题意和三角函数的性质可得 $S=\frac{4}{\sqrt{3}+2\sin 2\theta}$，利用三角函数的性质可知 S 的最小值是 $8-4\sqrt{3}$．

试题解析：

（1）由 $S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB=4\sqrt{3}$得，$BC=\frac{16}{x}$， —1

在△ACB中，由余弦定理可得，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$，即 $y^2=x^2+\frac{256}{x^2}+16$，

所以 $y=\sqrt{x^2+\frac{256}{x^2}+16}$ —3

$y=\sqrt{x^2+\frac{256}{x^2}+16}\geq\sqrt{2\sqrt{x^2\cdot\frac{256}{x^2}}+16}=4\sqrt{3}$，当且仅当 $x^2=\frac{256}{x^2}$，即 $x=4$ 时取等号． —4

所以当 $x=4$ 时，y 有最小值 $4\sqrt{3}$． —5

（2）由（Ⅰ）可知，$AB=4\sqrt{3}$，$AC=BC=4$，所以$\angle BAC=30^\circ$，

在△ACD 中，由正弦定理，$CD=\frac{AC\cdot\sin\angle DAC}{\sin\angle ADC}=\frac{4\sin 30^\circ}{\sin(150^\circ-\theta)}=\frac{2}{\sin(150^\circ-\theta)}$， —7

在△ACE 中，由正弦定理，$CE=\frac{AC\cdot\sin\angle EAC}{\sin\angle AEC}=\frac{4\sin 30^\circ}{\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{2}{\sin(120^\circ-\theta)}$， —8

所以，$S=\frac{1}{2}CD\cdot CE\cdot\sin\angle DCE=\frac{1}{\sin(150^\circ-\theta)\cdot\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{4}{\sqrt{3}+2\sin 2\theta}$. ——10

因为θ为锐角，所以当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，S有最小值 $8-4\sqrt{3}$. ——12

——11