六安一中 2019~2020 年度第二学期高二年级开学考试

数学试卷（理科）

命题人:　　　　审题人:

满分：150 分　　　　时间：120 分钟

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的．

1．已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，则焦点 $F(4,0)$ 到 C 的渐近线的距离为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

2．从某 500 件产品中随机抽取 50 件进行质检，利用随机数表法抽取样本时，先将这 500 件产品按 001，002，003，…，500 进行编号．如果从随机数表的第 7 行第 4 列的数 2 开始，从左往右读数，则依次抽取的第 5 个个体的编号是（　　）

附：随机数表第 6 行至第 8 行各数如下：

1622779439　4954435482　1737932378　8735209643　8426349164

8442175331　5724550688　7704744767　2172065025　8342163376

6301637859　1695556719　9810507175　1286735807　4439523879

A．217　　B．245　　C．421　　D．206

3．设离心率为 e 的双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，直线 l 过点 F 且斜率为 k，则直线 l 与双曲线 C 的左、右两支相交的充要条件是（　　）

A．$k^2-e^2>1$　　B．$k^2-e^2<1$　　C．$e^2-k^2>1$　　D．$e^2-k^2<1$

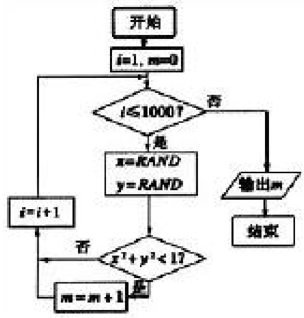
4．我们可以用随机模拟的方法估计 π 的值，如图程序框图表示其基本步骤（函数 $RAND$ 是产生随机数的函数，它能随机产生 $(0,1)$ 内的任何一个实数）．若输出的结果为 781，则由此可估计 π 的近似值为（　　）

A．3.119

B．3.124

C．3.132

D．3.151



5．给出如下四个命题：

①“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的充分而不必要条件；

②命题“若 $a=-1$，则函数 $f(x)=ax^2+2x-1$ 只有一个零点”的逆命题为真命题；

③若 p 是 q 的必要条件，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分条件；

④在 ΔABC 中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的既不充分也不必要条件.

其中正确的命题的个数是（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

6．设 x、y 满足 $\begin{cases}x\ge 2\\2x-y\ge 1\\y\ge x\end{cases}$，若目标函数 $z=ax+by$（$a>0$，$b>0$）的最小值为 2，则 ab 的最大值为（　　）

A．$\dfrac{1}{4}$　　　　B．$\dfrac{1}{2}$　　　　C．1　　　　D．2

7．点 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$ 上任意一点，EF 为圆 N: $(x-1)^2+y^2=1$ 的任意一条直径，则 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的取值范围是（　　）

A．（8，24）　　　　B．[8,24]　　　　C．[5,21]　　　　D．(5,21)

8．在以下命题中：

①三个非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不能构成空间的一个基底，则 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面；

②若两个非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 与任何一个向量都不能构成空间的一个基底，则 $\vec{a},\vec{b}$ 共线；

③对空间任意一点 O 和不共线的三点 A,B,C，若 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$，则 P,A,B,C 四点共面；

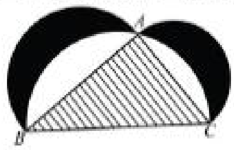
④若 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个不共线的向量，且 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}(\lambda,\mu\in R,\lambda\mu\ne 0)$，则 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 构成空间的一个基底.

⑤若 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 为空间的一个基底，则 $\{\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\}$ 构成空间的另一个基底；

其中真命题的个数是（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

9．如图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形．此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为三角形 ABC 的 BC，AB 和 AC．若 BC=10，AB=8，AC=6，ΔABC 的三边所围成的区域记为Ⅰ，黑色部分记为Ⅱ，其余部分记为Ⅲ．在整个图形中随机取一点，此点取自Ⅱ的概率为（　　）



A. $\dfrac{9\pi}{25\pi+24}$　　B. $\dfrac{16}{25\pi+24}$　　C. $\dfrac{25\pi}{24+25\pi}$　　D. $\dfrac{24}{24+25\pi}$

10. 设点P在曲线$\rho\sin\theta=2$上,点Q在曲线$\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）上,求$|PQ|$的最小值为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，过点$F$作$x$轴的垂线交两渐近线于$A,B$两点，且与双曲线在第一象限的交点为$P$，设$O$为坐标原点，若$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，$\lambda^2+\mu^2=\dfrac{5}{8}$，则双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{9}{8}$

12. 设椭圆E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为$F(1,0)$，点$A(-1,1)$为椭圆$E$内一点，若椭圆$E$上存在一点$P$，使得$|PA|+|PF|=9$，则椭圆$E$的离心率的取值范围是（　）

A. $[\dfrac{1}{2},1)$　　B. $[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$　　C. $[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4}]$　　D. $[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}]$

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

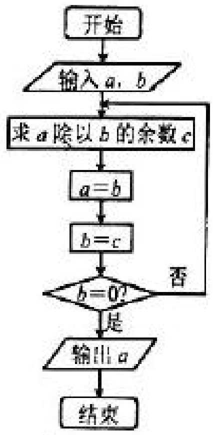
13. 从装有两个红球和两个黑球的口袋内任取两个球，那么互斥而不对立的两个事件是______.（填序号）

①“至少有一个黑球”与“都是黑球”；

②“至少有一个黑球”与“至少有一个红球”；

③“恰有一个黑球”与“恰有两个黑球”；

④“至少有一个黑球”与“都是红球”.



14. 执行如图所示的程序框图，若输入的$a=255$，$b=68$，则输出的a是________.

15. 已知$m\in\mathbf{R}$，命题p:对$\forall x\in[0,1]$，不等式$2x-2\ge m^2-3m$恒成立；命题q:$\exists x\in[-1,1]$，使得$m\le ax$成立．当$a=1$时，若$p\wedge q$为假命题，$p\vee q$为真命题，则实数m的取值范围是________.

16. 给出下列命题：

①线性相关系数r越大，两个变量的线性相关性越强；反之，线性相关性越弱；

②由变量x和y的数据得到其回归直线方程$l:\hat{y}=bx+a$，则l一定经过点$P(\bar{x},\bar{y})$；

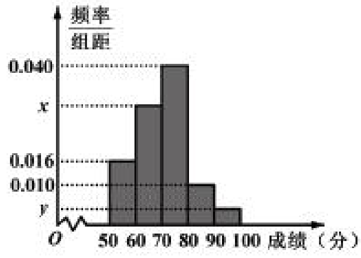
③从匀速传递的产品生产流水线上，质检员每10分钟从中抽取一件产品进行某项指标检测，这样的抽样是分层抽样；

④将一组数据中的每个数据都加上或减去同一个常数后，方差恒不变；⑤在回归直线方程 $\hat{y}=0.1x+10$ 中，当解释变量 x 每增加一个单位时，预报变量 $\hat{y}$ 平均增加0.1个单位，其中真命题的序号是__________.

三、解答题：本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分12分）

某中学举行了一次“数学基础知识竞赛”活动．为了了解本次竞赛学生的成绩情况，从中抽取了部分学生的分数（得分取正整数，满分为100分）作为样本（样本容量为 n ）进行统计．按照 $[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[909,100]$ 的分组作出频率分布直方图，并作出样本分数的茎叶图（图中仅列出了得分在 $[50,60),[90,100]$ 的数据）.



5	1 2 3 4 5 6 7 8
6	
7	
8	
9	3 4

（1）求样本容量 n 和频率分布直方图中的 x,y 的值；

（2）在选取的样本中，从竞赛成绩在80分以上（含80分）的学生中随机抽取2名学生参加“市级数学基础知识竞赛”，求所抽取的2名学生中恰有一人得分在 $[90,100]$ 内的概率.

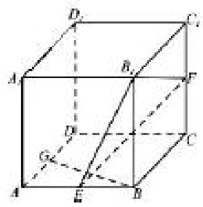
18. （本小题满分12分）

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,G 分别是 AB,CC_1,AD 的中点。

（1）求异面直线 B_1E 与 BG 所成角的余弦值；

（2）棱 CD 上是否存在点 T，使得 $AT//$ 平面 B_1EF？请证明你的结论;

（3）求直线 BG 与平面 B_1EF 所成角的余弦值；



19.（本小题满分 12 分）

如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$，E 为 AD 中点，O 是 AC 与 BE 的交点，将 ΔABE 沿 BE 翻折到图 2 中 ΔA_1BE 的位置得到四棱锥 A_1-BCDE。

（1）求证：$CD \perp A_1C$

（2）若 $A_1C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB, BE=\sqrt{3}AB$，求二面角 $B-A_1E-D$ 的余弦值.

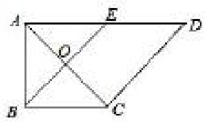


图1

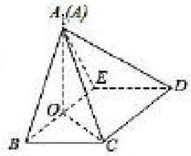


图2

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆 C 与 y 轴交于 A,B 两点，且 $|AB|=2$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设点 P 是椭圆 C 上的一个动点，且直线 PA,PB 与直线 $x=4$ 分别交于 M,N 两点．是否存在点 P 使得以 MN 为直径的圆经过点 $D(2,0)$？若存在，求出点 P 的横坐标；若不存在，说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点 $P(1,2)$．过点 $Q(0,1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A，B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N.

（1）求直线 l 的斜率的取值范围；

（2）设 O 为原点，$\overline{QM}=\lambda\overline{QO}$，$\overline{QN}=\mu\overline{QO}$，求证：$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值.

注意：以下请考生在22、23两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22．选修4-4：坐标系与参数方程（10分）

已知曲线C的参数方程为：$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \end{cases}$($\theta$为参数)，直线$l$的参数方程为：

$\begin{cases} x=2+\sqrt{3}t, \\ y=1+t, \end{cases}$($t$为参数)，点$P$（2,1)，直线$l$与曲线$C$交于$A,B$两点.

（1）写出曲线C和直线l在直角坐标系下的标准方程；

（2）求$|PA|\cdot|PB|$的值.

23．选修4-5：不等式选讲（10分）

已知函数$f(x)=|x+1|+|x-a|$.

（1）当$a=2$时，解不等式$f(x)\geq 5$；

（2）当$a>-1$时，$\forall x\in R$，$f(x)+|x+1|>2$都成立，求实数a的取值范围.

六安一中 2019~2020 年度第二学期高二年级开学考试
数学试卷（理科）参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	C	B	A	A	B	D	D	A	A	C

13. ③　14. 17　15. $(-\infty,1)\cup(1,2]$　16. ②④⑤

17. （1）$n=50, y=0.030, x=0.004$　(2)$p=\dfrac{10}{21}$

18. (1)$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$;　(2)$CT=\dfrac{1}{4}CD$;　(3)$\dfrac{2\sqrt{70}}{35}$

19. （1）由图 1 可知，四边形 $ABCE$ 为菱形，

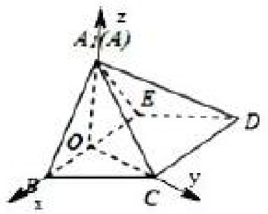
则 $AC=BE$，则在图（2）中，$BE\perp A_1O, BE\perp CO$，所以 $BE\perp$ 面 A_1OC，

又 $BE\parallel CD$，所以 $CD\perp$ 面 A_1OC，又 $A_1C\subset$ 面 A_1OC　故 $CD\perp A_1C$；

（2）因为 $BE=\sqrt{3}AB$，所以 $\angle BAE=\dfrac{2\pi}{3}$，

设 AB=2，则 $A_1O=OC=1$，又 $A_1C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$，所以 $\angle A_1OC=\dfrac{\pi}{2}$

建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $O(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$E(-\sqrt{3},0,0)$，$D(-2\sqrt{3},1,0)$，

则 $\overrightarrow{ED}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{EA_1}=(\sqrt{3},0,1)$，则面 A_1EB 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$，

设面 A_1ED 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{ED}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EA_1}=0\end{cases}$，则 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ \sqrt{3}x+z=0\end{cases}$，

令$x=1$,则$y=\sqrt{3},z=-\sqrt{3}$,则$\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$， 所以$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,

又由图可知二面角$B-A_1E-D$为钝二面角，故二面角$B-A_1E-D$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

20. 20.（1）由已知$|AB|=2$，得知$2b=2$，$b=1$又因为离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$a^2=b^2+c^2$，所以$a=2$,，所以椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）假设存在.设$P(x_0,y_0)$ $M(4,m)$ $N(4,n)$ 由已知可得$A(0,1)$ $B(0,-1)$，所以AP的直线方程为$y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$，BP的直线方程为$y=\dfrac{y_0+1}{x_0}x-1$，令$x=4$，分别可得$m=\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1$，$n=\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1$，所以$|MN|=|m-n|=\left|2-\dfrac{8}{x_0}\right|$，线段$MN$的中点$(4,\dfrac{4y_0}{x_0})$， 若以$MN$为直径的圆经过点D(2,0)，则$(4-2)^2+(\dfrac{4y_0}{x_0}-0)^2=(1-\dfrac{4}{x_0})^2$，因为点$P$在椭圆上，所以$\dfrac{x_0{}^2}{4}+y_0{}^2=1$，代入化简得$1-\dfrac{8}{x_0}=0$， 所以$x_0=8$， 而$x_0\in[-2,2]$，矛盾，所以这样的点$P$不存在.（用数量积等于零也可以。）

点睛：解析几何中存在性命题常采用“肯定顺推法”，将不确定性问题明朗化，其步骤为：假设满足条件的元素（点、直线、曲线或参数）存在，用待定系数法设出，列出关于待定系数的方程组，若方程组有实数解，则元素（点、直线、曲线或参数）存在，否则不存在.

21. （1）因为抛物线$y^2=2px$经过点$P(1,2)$，

所以$4=2p$，解得$p=2$，所以抛物线的方程为$y^2=4x$.

由题意可知直线l的斜率存在且不为0，设直线l的方程为$y=kx+1$（$k\neq0$）.

由$\begin{cases}y^2=4x\\y=kx+1\end{cases}$得$k^2x^2+(2k-4)x+1=0$.

依题意$k\neq0$，$\Delta=(2k-4)^2-4\times k^2\times1>0$，解得$k<0$或$0<k<1$.

又PA，PB与y轴相交，故直线l不过点$(1,-2)$．从而$k\neq -3$．

所以直线l斜率的取值范围是$(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,1)$．

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

由(1)知$x_1+x_2=-\dfrac{2k-4}{k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{k^2}$．直线$PA$的方程为$y-2=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}(x-1)$．

令$x=0$，得点M的纵坐标为$y_M=\dfrac{-y_1+2}{x_1-1}+2=\dfrac{-kx_1+1}{x_1-1}+2$．

同理得点N的纵坐标为$y_N=\dfrac{-kx_2+1}{x_2-1}+2$．

由$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO},\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$得$\lambda=1-y_M$，$\mu=1-y_N$．

所以$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{1-y_M}+\dfrac{1}{1-y_N}=\dfrac{x_1-1}{(k-1)x_1}+\dfrac{x_2-1}{(k-1)x_2}=\dfrac{1}{k-1}\cdot\dfrac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

$=\dfrac{1}{k-1}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{k^2}+\dfrac{2k-4}{k^2}}{\dfrac{1}{k^2}}=2$．所以$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$为定值．

22. （1）由$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{2}}=\cos\theta & ①\\ y=\sin\theta & ②\end{cases}$，$①^2+②^2$，得$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

所以曲线C的标准方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．

直线l的标准方程为：$x-\sqrt{3}y-2+\sqrt{3}=0$．

（2）将直线l的参数方程化为标准方程：$\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=1+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），

代入椭圆方程得：$5t^2+8(\sqrt{3}+1)t+16=0$，

所以$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\dfrac{16}{5}$．

23. （1）由$f(x)=|x+1|+|x-2|=\begin{cases}2x-1, x>2,\\3,-1\le x\le 2,\\1-2x, x<-1,\end{cases}$

$\because f(x)\ge 5$，得不等式解集为$\{x\,|\,x\le -2或x\ge 3\}$．

（2）设$h(x)=f(x)+|x+1|\ =2|x+1|+|x-a|$，

$\because a>-1$，$\therefore h(x)=\begin{cases}3x+2-a, x>a,\\x+2+a,-1\le x\le a,\\-3x-2+a, x<-1,\end{cases}$

$\therefore h(x)$在$[-1,a]$和$[a,+\infty)$上是增函数，在$(-\infty,-1]$上是减函数，

$\therefore h(x)$的最小值是$h(-1)=1+a$，

要使$\forall x\in R$，$f(x)+|x+1|>2$都成立，只要$h(-1)=1+a>2$，得$a>1$，

综上，a的取值范围是$a>1$．

2