四川省宜宾市叙州区2020届高二下学期第二次月考

数学（文）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

第I卷 选择题（60分）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．复数$2-3i$的虚部为

A．2　　B．$-3i$　　C．$3i$　　D．-3

2．以下不等式在$x>0$时不成立的是

A．$\ln x<x$　　B．$x<e^x$　　C．$\ln x+1>e^x$　　D．$e^x>1+x$

3．已知$f\left(x\right)=x^2$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=$

A．x^2　　B．$2x$　　C．$\left(\Delta x\right)^2$　　D．Δx

4．双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$的渐近线方程是

A．$y=\pm\dfrac{3}{2}x$　　B．$y=\pm\dfrac{9}{4}x$　　C．$y=\pm\dfrac{2}{3}x$　　D．$y=\pm\dfrac{4}{9}x$

5．“$c=1$”是“直线$x+y+c=0$与圆$\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=2$”相切的

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．若在$x^2+y^2\le 1$所围区域内随机取一点，则该点落在$\left|x\right|+\left|y\right|\le 1$所围区域内的概率是

A．$\dfrac{1}{\pi}$　　B．$\dfrac{2}{\pi}$　　C．$\dfrac{1}{2\pi}$　　D．$1-\dfrac{1}{\pi}$

7．$A(0，1)$是椭圆$x^2+4y^2=4$上一定点，P为椭圆上异于A的一动点，则$|AP|$的最大值为

A．$3\sqrt{3}$　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

8．已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+ax$ 是 R 上的增函数，则 a 的取值范围（　）

A．$(0,3)$　　B．$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

C．$[0,3]$　　D．$(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

9．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1,F_2,离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,过 F_2 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，若 ΔAF_1B 的周长为 $4\sqrt{3}$,则 b 的值为

A．4　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

10．已知函数 $f(x)=x^3-3x$，若过点 $M(2,t)$可作曲线 $y=f(x)$的三条切线，则实数的取值范围是

A．$(-6,-2)$　　B．$(-4,-2)$

C．$(-6,2)$　　D．$(0,2)$

11．若过抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 焦点的直线与抛物线交于 A、B 两点（不重合），则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$（$O$ 为坐标原点）的值是

A.$\dfrac{3}{4}$　　B.$-\dfrac{3}{4}$　　C.3　　D.-3

12．已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+bx+2$，$f'(x+2)=f'(4-x)$，若 $f(x)\geq 6x\ln x+2$ 恒成立，则实数 b 的取值范围为

A．$[4+\ln 2,+\infty)$　　B．$[5+\ln 5,+\infty)$　　C．$[6+4\ln 3,+\infty)$　　D．$[6+6\ln 6,+\infty)$

第 II 卷 非选择题（90 分）

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$f(x)=\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程为__________.

14．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是 BB_1，CD 的中点，则异面直线 D_1F 与 DE 所成角的大小为___________.

15．函数 $f(x)=x+\tan x,(-1<x<1)$，若 $f(x^2)+f(-x)>0$，则实数 x 的取值范围_____

16．已知点F_1，F_2分别为双曲线$C:\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$P$为双曲线$C$左支上的任意一点，若$\frac{|PF_2|^2}{|PF_1|}$的最小值为$8a$，则双曲线$C$的离心率的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）为了解某校学生参加社区服务的情况，采用按性别分层抽样的方法进行调查.已知该校共有学生 960 人，其中男生 560 人，从全校学生中抽取了容量为n的样本，得到一周参加社区服务的时间的统计数据如下表：

	超过 1 小时	不超过 1 小时
男	m	8
女	12	8

（I）求m，n；

（II）能否有95%的把握认为该校学生一周参加社区服务时间是否超过 1 小时与性别有关？

附：

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

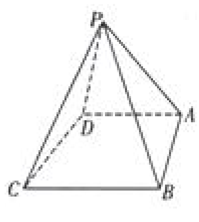
$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}(n=a+b+c+d).$$

18．（12 分）已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+\left(a-1\right)x+1$，$a$为实数.

（I）当$a\geq 2$时，讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（II）若$f\left(x\right)$在区间$\left[1,4\right]$上是减函数，求a的取值范围.

19．（12 分）在四棱锥$P-ABCD$中，$AD\perp AB$，$AD//BC$，ΔPDA，ΔPAB都是边长为 1 的正三角形.



（I）证明：平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$；

（II）求点 C 到平面 PAD 的距离.

20．（12 分）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$，椭圆 C 上一点 P 到左右两个焦点 F_1,F_2 的距离之和是 4.

（I）求椭圆的方程；

（II）已知过 F_2 的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点，且两点与左右顶点不重合，若 $\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}$，求四边形 $AMBF_1$ 面积的最大值.

21．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+x^2$，其中 $a\in R$.

（I）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（II）当 $a=1$ 时，证明: $f\left(x\right)\le x^2+x-1$；

（III）试比较 $\dfrac{\ln 2^2}{2^2}+\dfrac{\ln 3^2}{3^2}+\dfrac{\ln 4^2}{4^2}+\cdots+\dfrac{\ln n^2}{n^2}$ 与 $\dfrac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$ $\left(n\in N^*\text{且}n\ge 2\right)$ 的大小，并证明你的结论。

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+2\cos\alpha \\ y=\sqrt{3}+2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数),以坐标原点 O 为极点,以 x 轴正半轴为极轴,建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$

(I)写出曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(II)若射线 $OM:\theta=\alpha_0\left(\rho\ge 0\right)$ 平分曲线 C_1，且与曲线 C_2 交于点 A，曲线 C_2 上的点 B 满足 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，求 $\left|AB\right|$.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）已知函数 $f(x)=|2x-1|$.

（I）解不等式 $f(x)<|x|+3$；

（II）若对于 x，$y\in R$，有 $|x-3y+1|\le\dfrac{1}{3}$，$|2y-1|\le\dfrac{1}{6}$，求证：$f(x)\le\dfrac{7}{6}$.

参考答案

1-5:DCBCB　　6-10:BCCCC　　11-12:DD

13．$\frac{\sqrt{2}}{2}x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi=0$　　14．90°　　15．$(-1,0)$

16．$(1,3]$

17．（1）由已知可得该校有女生 400 人，

根据题意可得$\frac{m+8}{12+8}=\frac{560}{400}$，解得$m=20$，　所以$n=20+8+12+8=48$.

（2）由题意得列联表如下：

	超过 1 小时的人数	不超过 1 小时的人数	合计
男	20	8	28
女	12	8	20
合计	32	16	48

根据表中的数据得$K^2=\frac{48(160-96)^2}{28\times 20\times 32\times 16}=\frac{24}{35}\approx 0.686<3.841$，

所以没有 95%的把握认为该校学生一周参加社区服务时间是否超过 1 小时与性别有关.

18．（1）$f'(x)=x^2-ax+a-1=(x-1)[x-(a-1)]$，

当$a-1=1$即$a=2$时，$f'(x)=(x-1)^2\geq 0$，$f(x)$在 R 上单调递增；

当$a-1>1$即$a>2$时，由$f'(x)>0$得$x<1$或$x>a-1$，由$f'(x)<0$得$1<x<a-1$.

$\therefore f(x)$分别在$(-\infty,1)$与$(a-1,+\infty)$单调递增，在$(1,a-1)$单调递减.

综上所述，当$a=2$时，$f(x)$在 R 上单调递增；

当$a>2$时，$f(x)$分别在$(-\infty,1)$与$(a-1,+\infty)$单调递增，在$(1,a-1)$单调递减.

（2）由已知得$f'(x)=x^2-ax+a-1\leq 0$在区间$[1,4]$上恒成立.

$\therefore a(x-1)\geq x^2-1$在区间$[1,4]$上恒成立.

当$x=1$时，$a\in R$.当$1<x\leq 4$时，$a\geq x+1$.

而 $y=x+1$ 在 $x\in\left(1,4\right]$ 上单调递增，$\therefore$ $x=4$ 时，$y_{\max}=5$，则 $a\geq 5$.综上 $a\geq 5$.

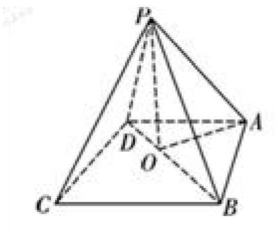
19．（1）详解：（1）证明：如图，

连接 BD，$\because$ $\triangle PAB$，$\triangle PAD$ 都是正三角形，

$\therefore$ $AD=AB=PD=PB=1$，

设 O 为 BD 的中点，$\therefore$ $PO\perp BD$，$AO\perp BD$，

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中，$AD=AB=1$，$\therefore$ $BD=\sqrt{2}$，



$\because$ O 为 BD 的中点，$\therefore$ $OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

在等腰 $\triangle PDB$ 中，$PD=PB=1$，$BD=\sqrt{2}$，$\therefore$ $PO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

在 $\triangle POA$ 中，$PO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$PA=1$，$\because$ $PO^2+OA^2=PA^2$，$\therefore$ $PO\perp OA$，

又 $\because$ $PO\perp BD$，$BD\cap OA=O$, $BD\subset$ 平面 $ABCD$, $OA\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ $PO\perp$ 平面 $ABCD$，又 $\because$ $PO\subset$ 平面 PDB，$\therefore$ 平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知 $DO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$PO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

设点 C 到平面 PAD 的距离为 d，则 $V_{C-PAD}=V_{P-ACD}$，

即 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\times d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ $d=\dfrac{1}{3}\sqrt{6}$，$\therefore$ 点 C 到平面 PAD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

20．（1）依题意，$2a=4, a=2$，

因为 $e=\dfrac{1}{2}$，所以 $c=1, b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 C 方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）设 $A\left(x_1,y_1\right), B\left(x_2,y_2\right), AB: x=my+1$，则由 $\begin{cases} x=my+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，可得

$3\left(my+1\right)^2+4y^2=12$，

即，$\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$，$\Delta=36m^2+36\left(3m^2+4\right)=144\left(m^2+1\right)>0$，

又因为$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}$，所以四边形$AMBF_1$是平行四边形，

设平面四边形$AMBF_1$的面积为S，则

$S=2S_{\Delta ABF_1}=2\times\frac{1}{2}\times\left|F_1F_2\right|\times\left|y_1-y_2\right|=2\times\frac{\sqrt{\Delta}}{3m^2+4}=24\times\frac{\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$设$t=\sqrt{m^2+1}$，则

$m^2=t^2-1\left(t\geq1\right)$，所以$S=24\times\frac{t}{3t^2+1}=24\times\frac{1}{3t+\frac{1}{t}}$，因为$t\geq1$， 所以$3t+\frac{1}{t}\geq4$，

所以$S\in\left(0,6\right]$，所以四边形$AMBF_1$面积的最大值为6.

21．（1）函数$f\left(x\right)$的定义域为：$\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\frac{a}{x}+2x=\frac{a+2x^2}{x}$

①当$a\geq0$时，$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增

②当$a<0$时，令$f'\left(x\right)=0$，解得$x=\sqrt{-\frac{a}{2}}$.

当2^{22}时，$a+2x^2<0$，所以$f'\left(x\right)<0$， 所以$f\left(x\right)$在$\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$上单调递减；

当$x>\sqrt{-\frac{a}{2}}$时，$a+2x^2>0$，所以$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递增.

综上，当$a\geq0$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；

当$a<0$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递增.

（2）当$a=1$时，$f\left(x\right)=\ln x+x^2$，要证明$f\left(x\right)\leq x^2+x-1$，

即证$\ln x\leq x-1$，即证：$\ln x-x+1\leq0$.

设$g\left(x\right)=\ln x-x+1$，则$g'\left(x\right)=\frac{1-x}{x}$，令$g'\left(x\right)=0$得，$x=1$.

当$x\in\left(0,1\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)<0$.

所以$x=1$为极大值点，且$g\left(x\right)$在$x=1$处取得最大值。

所以$g\left(x\right)\leq g\left(1\right)=0$，即$\ln x-x+1\leq0$。故$f\left(x\right)\leq x^2+x-1$.

（3）证明：$\ln x\leq x-1$（当且仅当$x=1$时等号成立），即$\frac{lnx}{x}\leq1-\frac{1}{x}$,

则有 $\frac{ln2^2}{2^2}+\frac{ln3}{3^2}+\ldots+\frac{lnn}{n^2}<1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+\ldots+1-\frac{1}{n^2}=\mathrm{n}-1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$

$<\mathrm{n}-1-\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$=\mathrm{n}-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\mathrm{n}-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$,

故：$\frac{ln2^2}{2^2}+\frac{ln3^2}{3^2}+\ldots+\frac{lnn^2}{n^2}<\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$

22. 解：(1)曲线 C_1 的直角坐标方程是 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，即 $x^2-2x+y^2-2\sqrt{3}y=0$

化成极坐标方程为：$\rho=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$

曲线 C_2 的直角坐标方程是 $x^2=4y$；

（2）曲线 C_1 是圆，射线 OM 过圆心 $(1,\sqrt{3})$，所以方程是 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\ge0)$

代入 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$，得 $\rho_A=8\sqrt{3}$

又 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，将 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，代入 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$，得 $\rho_B=\frac{8}{3}$

因此 $|AB|=\sqrt{\rho_A{}^2+\rho_B{}^2}=\frac{16\sqrt{7}}{3}$

23. （1）由 $f(x)<|x|+3$ 得 $|2x-1|<|x|+3$，

则 $\begin{cases}x\ge\frac{1}{2},\\2x-1<x+3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<\frac{1}{2},\\1-2x<x+3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\le0,\\1-2x<-x+3.\end{cases}$

解得 $\frac{1}{2}\le x<4$，或 $0<x<\frac{1}{2}$，或 $-2<x\le0$，即 $-2<x<4$，

所以不等式 $f(x)<|x|+1$ 的解集为 $\{x|-2<x<4\}$.

（2）证明：由 $|x-3y+1|\le\frac{1}{3}$，$|2y-1|\le\frac{1}{6}$，

所以 $f(x)=|2x-1|=|2(x-3y+1)+3(2y-1)|\le2|x-3y+1|+3|2y-1|\le\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$.