黑龙江省大庆实验中学2020届下学期第二次月考试题

高二数学

一、单选题

1．在参数方程$\begin{cases} x=a+t\cos\theta, \\ y=b+t\sin\theta \end{cases}$（0,, $\theta<\pi$，t为参数)所表示的曲线上有B,C两点，它们对应的参数值分别为t_1，t_2，则线段BC的中点M对应的参数值是（　　）

A．$\dfrac{t_1-t_2}{2}$　　　　B．$\dfrac{|t_1+t_2|}{2}$

C．$\dfrac{|t_1-t_2|}{2}$　　　　D．$\dfrac{t_1+t_2}{2}$

2．若直线l的参数方程为$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=3-4t \end{cases}$（$t$为参数），则直线$l$的倾斜角的余弦值为（　　）

A．$-\dfrac{4}{5}$

B．$-\dfrac{3}{5}$

C．$\dfrac{3}{5}$

D．$\dfrac{4}{5}$

3．已知椭圆$C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{4}=1\left(a>2\right)$的离心率$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，P为椭圆$C$上的一个动点，则$P$与定点$B\left(-1,0\right)$连线距离的最大值为(　　)

A．$\dfrac{3}{2}$

B．$\dfrac{5}{2}$

C．$\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

D．3

4．在极坐标系中，O为极点，曲线$\rho^2\cos\theta=1$与$\theta=\dfrac{\pi}{3}$射线的交点为A，则$|OA|=$（　　）

A．2

B．$\sqrt{2}$

C．$\dfrac{1}{2}$

D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5．已知曲线C的极坐标方程为$\rho^2=\dfrac{12}{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$，以极点为原点，极轴为$x$轴非负半轴建立平面直角坐标系，则曲线$C$经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x\\ y'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$后，得到的曲线是（　　）

A．直线

B．椭圆

C．圆

D．双曲线

6．已知在平面直角坐标系xoy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=4\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}(\alpha为参数)$，M是曲线C上的动点．以原点O为极点，$x$轴的正半轴为极轴，取相同的长度单位建立极坐标系，若曲线T的极坐标方程为$2\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=20$，则点M到点T的距离的最大值为（ ）

A．$2+4\sqrt{5}$

B．$\sqrt{13}+4\sqrt{5}$

C．$4+4\sqrt{5}$

D．$6\sqrt{5}$

7．直线$\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\end{cases}$ (t为参数)被圆$x^2+y^2=9$截得的弦长为(　　)

A．$\dfrac{12}{5}$

B．$\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

C．$\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

D．$\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$

8．已知直线l：$\begin{cases}x=3t\\y=2-t\end{cases}$($t$为参数)和抛物线$C$：$y^2=2x$，$l$与$C$分别交于点$P_1,P_2$，则点$A(0,2)$到$P_1,P_2$两点距离之和是(　　)

A．10

B．$30\sqrt{10}$

C．$\dfrac{10\sqrt{10}}{3}$

D．$10\sqrt{10}$

9．过椭圆C：$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）的右焦点$F$作直线$l$：交$C$于$M$，$N$两点，$|MF|=m$，$|NF|=n$，则$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$的值为（）

A．$\dfrac{2}{3}$

B．$\dfrac{4}{3}$

C．$\dfrac{8}{3}$

D．不能确定

10．已知点$A(1,-2)$，$B(2,0)$，P为曲线$y=\sqrt{3-\dfrac{3}{4}x^2}$上任意一点，则$\overline{AP}\cdot\overline{AB}$的取值范围为（　　）

A．$[1,7]$

B．$[-1,7]$

C. $\left[1,3+2\sqrt{3}\right]$

D. $\left[-1,3+2\sqrt{3}\right]$

11．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right),M$ 为椭圆上一动点，F_1 为椭圆的左焦点则线段 MF_1 的中点 P 的轨迹是（　　）

A．椭圆

B．圆

C．双曲线的一支

D．线段

12．已知点 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上第一象限上的任意一点，点 A，B 分别为椭圆的右顶点和上顶点，直线 PA 与 y 交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，则 $\left|AN\right|\cdot\left|BM\right|$ 的值为（　　）

A．4

B．$4\sqrt{3}$

C．$\dfrac{4}{3}$

D．$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

二、填空题

13．中心在原点，对称轴为坐标轴，过 $A(0,5)$ 和 $B(4,0)$ 的椭圆的参数方程为________.

14．已知实数 x、y 满足 $(x-2\cos\alpha-3)^2+(y-2\sin\alpha-4)^2=1$，$\alpha\in\mathbf{R}$，则 x^2+y^2 的最大值是__________

15．椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 与 x 轴的正半轴交于点 A，若这个椭圆上总存在点 P，使 $OP\perp AP$（O 为原点），求椭圆离心率 e 的取值范围______

16．已知函数 $f(x)=-3x^3-3x+3^{-x}-3^x+3$，若 $f(3a^2)+f(b^2-1)=6$，则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值是________

三、解答题

17．在直角坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数）,以坐标原点为极点，以 x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta = 4\cos\theta$.

（1）求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的的直角坐标方程；

（2）若 C_1 与 C_2 交于 A,B 两点，点 P 的极坐标为 $(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$，求 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$ 的值.

参考答案

一、单选题

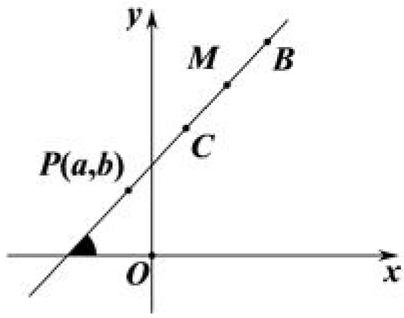
1．在参数方程$\begin{cases}x=a+t\cos\theta,\\ y=b+t\sin\theta\end{cases}$($0\le\theta<\pi$，$t$为参数)所表示的曲线上有$B,C$两点，它们对应的参数值分别为$t_1$，$t_2$，则线段$BC$的中点M对应的参数值是（　　）

A．$\dfrac{t_1-t_2}{2}$　　　　B．$\dfrac{|t_1+t_2|}{2}$

C．$\dfrac{|t_1-t_2|}{2}$　　　　D．$\dfrac{t_1+t_2}{2}$

答案：D

解析：如图：



由直线参数方程的参数t 的几何意义可知，

$PB=t_1$，$PC=t_2$，因为M是BC的中点，所以$PM=\dfrac{t_1+t_2}{2}$.

2．若直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-2+3t\\ y=3-4t\end{cases}$（$t$为参数），则直线$l$的倾斜角的余弦值为（　　）

A．$-\dfrac{4}{5}$

B．$-\dfrac{3}{5}$

C．$\dfrac{3}{5}$

D．$\dfrac{4}{5}$

答案：B

解析：设直线l的倾斜角为α，由题意$\begin{cases}x=-2+3t\\ y=3-4t\end{cases}\Rightarrow 4x+3y-1=0$，

$\therefore k=\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，$\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\therefore\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

3．已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{4}=1\left(a>2\right)$ 的离心率 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，P 为椭圆 C 上的一个动点，则 P 与定点 $B\left(-1,0\right)$ 连线距离的最大值为(　　)

A．$\dfrac{3}{2}$

B．$\dfrac{5}{2}$

C．$\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

D．3

答案:D

解析:椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{4}=1\left(a>2\right)$ 的离心率 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，可得：$\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 a=$\sqrt{6}$，

椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{6}+\dfrac{x^2}{4}=1$, 设 P$\left(2cos\theta,\sqrt{6}sin\theta\right)$，则 P 与定点 $B\left(-1,0\right)$ 连线距离为

$\sqrt{\left(2\cos\theta+1\right)^2+6\sin^2\theta}=\sqrt{2\sin^2\theta+4\cos\theta+5}=\sqrt{-2\cos^2\theta+4\cos\theta+7}$ ，

当 $\cos\theta=1$ 时，取得最大值 3．故选：D.

4．在极坐标系中，O 为极点，曲线 $\rho^2\cos\theta=1$ 与 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 射线的交点为 A，则 $\left|OA\right|=$（　　）

A．2

B．$\sqrt{2}$

C．$\dfrac{1}{2}$

D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

答案：B

解析：由题可得：$\begin{cases}\rho^2\cos\theta=1\\ \theta=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\rho=\sqrt{2}$，由 ρ 的几何意义可得 $\left|OA\right|=$ $\sqrt{2}$，故选 B.

5．已知曲线C的极坐标方程为$\rho^2=\dfrac{12}{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$，以极点为原点，极轴为$x$轴非负半轴建立平面直角坐标系，则曲线$C$经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x\\ y'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$后，得到的曲线是（　　）

A．直线

B．椭圆

C．圆

D．双曲线

答案：C

解析：由极坐标方程$\rho^2=\dfrac{12}{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\Rightarrow 3(\rho\cos\theta)^2+4(\rho\sin\theta)^2=12$，

可得：$3x^2+4y^2=12$，即$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

曲线C经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x\\ y'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$，可得$\begin{cases}2x'=x\\ \sqrt{3}y'=y\end{cases}$，代入曲线$C$可得：$x'^2+y'^2=1$，

∴伸缩变换得到的曲线是圆．

6．已知在平面直角坐标系xoy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=4\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数)，M是曲线C上的动点．以原点O为极点，$x$轴的正半轴为极轴，取相同的长度单位建立极坐标系，若曲线T的极坐标方程为$2\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=20$，则点M到点T的距离的最大值为（ ）

A．$2+4\sqrt{5}$

B．$\sqrt{13}+4\sqrt{5}$

C．$4+4\sqrt{5}$

D．$6\sqrt{5}$

答案:A

解析:由曲线T的极坐标方程为$2\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=20$，可得曲线$T$的直角坐标方程为

$x+2y-20=0$，

由于点M 为曲线C的一个动点，故设点$M(4\cos\alpha,\sin\alpha)$，

则点M 到直线T 的距离：

$$d=\frac{|4\cos\alpha+2\sin\alpha-20|}{\sqrt{5}}=\frac{|2\sqrt{5}\sin(\alpha+\varphi)-20|}{\sqrt{5}}=|2\sin(\alpha+\varphi)-4\sqrt{5}|$$

所以当$\sin(\alpha+\varphi)=-1$时，距离最大$d_{\max}=2+4\sqrt{5}$ ，点M 到直线T 的距离的最大值为

$2+4\sqrt{5}$；故答案选 A

7．直线$\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\end{cases}$ (t为参数)被圆 $x^2+y^2=9$ 截得的弦长为(　　)

A．$\dfrac{12}{5}$

B．$\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

C．$\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

D．$\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$

答案:B

解析:由$\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\end{cases}$ 可得$\begin{cases}x=1+\sqrt{5}t\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\y=2+\sqrt{5}t\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$

把直线$\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=9$，

得$(1+2t)^2+(2+t)^2=9$，$5t^2+8t-4=0$，

$|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{(-\frac{8}{5})^2+\frac{16}{5}}=\frac{12}{5}$，

弦长为$\sqrt{5}\left|t_1-t_2\right|=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

8．已知直线l：$\begin{cases}x=3t\\y=2-t\end{cases}$($t$为参数)和抛物线$C$：$y^2=2x$，$l$与$C$分别交于点$P_1,P_2$，则点$A(0,2)$到$P_1,P_2$两点距离之和是(　　)

A．10

B．$30\sqrt{10}$

C．$\dfrac{10\sqrt{10}}{3}$

D．$10\sqrt{10}$

答案:D

解析:直线l：$\begin{cases}x=3t\\y=2-t\end{cases}$($t$为参数)和抛物线$C$：$y^2=2x$联立得到$t^2-10t+4=0$，

根据参数 t 的几何意义得到点$A\left(0,2\right)$到P_1,P_2两点距离之和是：

$\left|AP_1\right|+\left|AP_2\right|=\sqrt{1+3^2}\left|t_1+t_2\right|=10\sqrt{10}$

故答案为 D.

9．过椭圆C：$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）的右焦点$F$作直线$l$：交$C$于$M$，$N$两点，$\left|MF\right|=m$，$\left|NF\right|=n$，则$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$的值为（）

A．$\dfrac{2}{3}$

B．$\dfrac{4}{3}$

C．$\dfrac{8}{3}$

D．不能确定

答案:B

解析:消去参数得到椭圆的普通方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，故焦点$F\left(1,0\right)$，设直线$l$的参数方程为

$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），代入椭圆方程并化简得$\left(3+\sin^2\alpha\right)t^2+6\cos\alpha\cdot t-9=0$.故

$t_1+t_2=-\dfrac{6\cos\alpha}{3+\sin^2\alpha},t_1\cdot t_2=-\dfrac{9}{3+\sin^2\alpha}<0$（$t_1,t_2$异号）.故

$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{m+n}{mn}=\dfrac{\left|t_1-t_2\right|}{\left|t_1\cdot t_2\right|}=\dfrac{\sqrt{\left(t_1+t_2\right)^2-4t_1t_2}}{\left|t_1\cdot t_2\right|}=\dfrac{4}{3}$.故选 B.

10．已知点$A\left(1,-2\right)$，$B\left(2,0\right)$，P为曲线$y=\sqrt{3-\dfrac{3}{4}x^2}$上任意一点，则$\overline{AP}\cdot\overline{AB}$的取值范围为（　　）

A．$\left[1,7\right]$

B．$\left[-1,7\right]$

C．$\left[1,3+2\sqrt{3}\right]$

D．$\left[-1,3+2\sqrt{3}\right]$

答案:A

解析:设$P\left(x,y\right)$则由$y=\sqrt{3-\dfrac{3x^2}{4}}$可得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\left(y\geq 0\right)$，

令$x=2\cos\theta,y=\sqrt{3}\sin\theta$，$\left(\theta\in\left[0,\pi\right]\right.$，$\therefore\overline{AP}=\left(x-1,y+2\right)$，$\overline{AB}=\left(1,2\right)$，

$\therefore\overline{AP}\cdot\overline{AB}=x-1+2y+4=x+2y+3=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+3=4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$，

$\because 0\leq\theta\leq\pi$，

$\therefore\dfrac{\pi}{6}\leq\theta+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{7\pi}{6}$，$-\dfrac{1}{2}\leq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leq 1$，$\therefore 1\leq 4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+3\leq 7$，

11．已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right),M$为椭圆上一动点，$F_1$为椭圆的左焦点则线段$MF_1$的中点$P$的轨迹是（　　）

A．椭圆

B．圆

C．双曲线的一支

D．线段

答案:A

解析:设M（$acos\theta$，$bsin\theta$）$\because F_1$（$-c$,0），$\therefore$线段MF_1的中点P（$\frac{acos\theta-c}{2},\frac{bsin\theta}{2}$），

$\therefore\begin{cases}x=\frac{acos\theta-c}{2}\\ y=\frac{bsin\theta}{2}\end{cases}$，$\therefore cos\theta=\frac{2x+c}{a}$，$sin\theta=\frac{2y}{b}$，$\therefore$点$P$的轨迹方程为

$$\frac{(x+\frac{c}{2})^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{4}}=1,$$

∴线段MF_1的中点P的轨迹是椭圆．故选A．

12．已知点P为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上第一象限上的任意一点，点$A$，$B$分别为椭圆的右顶点和上顶点，直线$PA$与$y$交于点$M$，直线$PB$与$x$轴交于点$N$，则$|AN|\cdot|BM|$的值为（　　）

A．4

B．$4\sqrt{3}$

C．$\frac{4}{3}$

D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

答案:B

解析:如图所示：设P的坐标为（$2cos\theta,\sqrt{3}sin\theta$），由$A(2,0)$，$B(0,\sqrt{3})$，则直线$AP$的方程为$y=\frac{\sqrt{3}sin\theta}{2cos\theta-2}$（$x-2$），令$x=0$时，则$y=\frac{\sqrt{3}sin\theta}{1-cos\theta}$，即$M(0,\frac{\sqrt{3}sin\theta}{1-cos\theta}$），

$\therefore |BM|=\left|\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}sin\theta}{cos\theta-1}\right|=\sqrt{3}\left|\dfrac{cos\theta-1+sin\theta}{1-cos\theta}\right|$，则直线 BP 的方程为

$y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}sin\theta-\sqrt{3}}{2cos\theta}x$，

令 $y=0$，则 $x=\dfrac{2cos\theta}{1-sin\theta}$，即 $N(\dfrac{2cos\theta}{1-sin\theta},0)$，$\therefore |AN|=\left|2-\dfrac{2cos\theta}{1-sin\theta}\right|=2\left|\dfrac{1-sin\theta-cos\theta}{1-sin\theta}\right|$，

$\therefore |AN|\cdot|BM|=2\sqrt{3}\dfrac{|1-sin\theta-cos\theta|\cdot|1-sin\theta-cos\theta|}{(1-sin\theta)(1-cos\theta)}$

$=2\sqrt{3}\cdot 2\times\dfrac{(1-sin\theta)(1-cos\theta)}{(1-sin\theta)(1-cos\theta)}=4\sqrt{3}$,

故选 B

三、填空题

13．中心在原点，对称轴为坐标轴，过 $A(0,5)$ 和 $B(4,0)$ 的椭圆的参数方程为________.

答案:$\begin{cases}x=4\cos\theta\\y=5\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）

解析:由已知可得，椭圆的普通方程 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$，易得椭圆的参数方程为$\begin{cases}x=4\cos\theta\\y=5\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）.

14．已知实数 x、y 满足 $(x-2\cos\alpha-3)^2+(y-2\sin\alpha-4)^2=1$，$\alpha\in\mathbf{R}$，则 x^2+y^2 的最大值是__________

答案：64

解析：x^2+y^2 的几何意义是动圆 $\left(x-2\cos x-3\right)^2+\left(y-2\sin x-4\right)^2=1$ 上一点到坐标原点的距离的平方.

设动圆圆心为 P

$\therefore P\left(2\cos x+3,2\sin x-4\right)$

P 为动点，在圆 $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=4$ 上运动

则 $|OP|_{\max}=\sqrt{3^2+4^2}+2=7$

$\therefore \left(x^2+y^2\right)_{\max}=\left(7+1\right)^2=64$

15．椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 与 x 轴的正半轴交于点 A，若这个椭圆上总存在点 P，使 $OP\perp AP$（O 为原点），求椭圆离心率 e 的取值范围______

答案:$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<e<1$

解析:设椭圆的参数方程是 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$a>b>0$），

则 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，$A(a,0)$.$\because$ $OP\perp AP$，$\therefore$ $\dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta}\cdot\dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta-a}=-1$

即 $\left(a^2-b^2\right)\cos^2\theta-a^2\cos\theta+b^2=0$，解得 $\cos\theta=\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$ 或 $\cos\theta=1$（舍

去）.$\because$ $a>b,0<\cos\theta<1$，$\therefore$ $0<\dfrac{b^2}{a^2-b^2}<1$.把 $b^2=a^2-c^2$ 代入上式得 $0<\dfrac{a^2-c^2}{c^2}<1$，

即 $0<\dfrac{1}{e^2}-1<1$，解得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<e<1$.

16．已知函数 $f(x)=-3x^3-3x+3^{-x}-3^x+3$，若 $f(3a^2)+f(b^2-1)=6$，则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值是________

答案:$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析:设 g(x)=f(x)-3,所以 g(x)= $-3x^3-3x+3^{-x}-3^x$，

所以 $g(-x)=-3(-x)^3+3x+3^x-3^{-x},\therefore g(-x)+g(x)=0,$ 所以 g(-x)=-g(x),所以函数 g(x)是奇函数，

由题得 $g'(x)=-9x^2-3-3^{-x}\ln 3-3^x\ln 3<0$，所以函数 g（x）是减函数，

因为 $f\left(3a^2\right)+f\left(b^2-1\right)=6$，所以 $f\left(3a^2\right)-3+f\left(b^2-1\right)-3=0$，

所以 $g\left(3a^2\right)+g\left(b^2-1\right)$=0,所以 $g\left(3a^2\right)$=g(1-b^2) ,所以

$3a^2=1-b^2,\therefore 3a^2+b^2=1,$设$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta,b=\sin\theta,$

不妨设$\cos\theta>0$，所以

$$a\sqrt{1+b^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\sqrt{1+\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(1+\sin^2\theta)\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(1+\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)}$$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\sin^4\theta}\le\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$a\sqrt{1+b^2}$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.故答案为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、解答题

17．在直角坐标系xoy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数）,以坐标原点为极点，以$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$.

（1）求曲线C_1的普通方程与曲线C_2的的直角坐标方程；

（2）若C_1与C_2交于A,B两点，点P的极坐标为$(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$，求$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$的值.

答案：曲线C_1普通方程为$x+y-2=0$曲线C_2的直角坐标方程为$y^2=4x$；$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

解析：曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），两式相加消去t可得普通方程为

$x+y-2=0$；又由ρcosθ＝x，ρsinθ＝y，

曲线C_2的极坐标方程为$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$转化为直角坐标方程为$y^2=4x$

把曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），代入$y^2=4x$得$t^2+6\sqrt{2}t-6=0$，

设t_1，t_2是A,B对应的参数，则$t_1+t_1=-6\sqrt{2}$，$t_1\cdot t_2=-6$

所以$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|PA|+|PB|}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1\cdot t_2|}$ $=\frac{\sqrt{\left(t_1+t_2\right)^2-4t_1\cdot t_2}}{|t_1\cdot t_2|}=\frac{\sqrt{96}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$