六安一中2019~2020年度第二学期高二年级开学考试
数学试卷（文科）

命题人:　　　　审题人:

满分：150分　　　　时间：120分钟

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的．

1．对于常数m、n，“方程$mx^2+ny^2=1$表示的曲线是椭圆”是“$mn>0$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

2．下列各数中最大的数是（　　）

A．$85_{(9)}$　　B．$210_{(6)}$　　C．$1000_{(4)}$　　D．$111111_{(2)}$

3．已知双曲线的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$，则下列关于双曲线说法正确的是（　　）

A．虚轴长为4　　B．焦距为$2\sqrt{5}$

C．离心率为$\frac{\sqrt{23}}{3}$　　D．渐近线方程为$2x\pm3y=0$

4．2019年国庆黄金周影市火爆依旧，《我和我的祖国》、《中国机长》、《攀登者》票房不断刷新，为了解我校高三2300名学生的观影情况，随机调查了100名在校学生，其中看过《我和我的祖国》或《中国机长》的学生共有80位，看过《中国机长》的学生共有60位，看过《中国机长》且看过《我和我的祖国》的学生共有50位，则该校高三年级看过《我和我的祖国》的学生人数的估计值为（　　）

A．1150　　B．1380　　C．1610　　D．1860

5．已知变量x、y之间的线性回归方程为$y=-0.7x+10.3$，且变量x、y之间的一组相关数据如下表所示，则下列说法错误的是（　　）

x	6	8	10	12
y	6	m	3	2

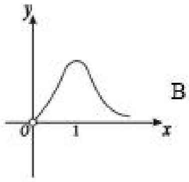
A．可以预测，当$x=20$时，$y=-3.7$

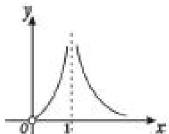
B．$m=4$

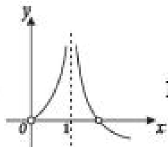
C．变量x、y之间呈负相关关系

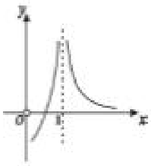
D．该回归直线必过点$(9,4)$

6．函数$f(x)=\frac{1}{x-\ln x-1}$的图象大致是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 若点 P 是函数 $f(x)=x^2-\ln x$ 上任意一点，则点 P 到直线 $x-y-2=0$ 的最小距离为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 3

8. 动点 M 在圆 $x^2+y^2=25$ 上移动，过点 M 作 x 轴的垂线段 MD，D 为垂足，则线段 MD 中点的轨迹方程是（　　）

A. $\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{y^2}{25}=1$　B. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{4y^2}{25}=1$　C. $\dfrac{4x^2}{25}-\dfrac{y^2}{25}=1$　D. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{4y^2}{25}=1$

9. 设函数 $f(x)=|2x-1|$，若不等式 $f(x)\ge|1+a|-|2-a|$ 对任意实数 $a\in R$ 恒成立，则 x 的取值集合是（　　）

A. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ B. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ C. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$ D. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

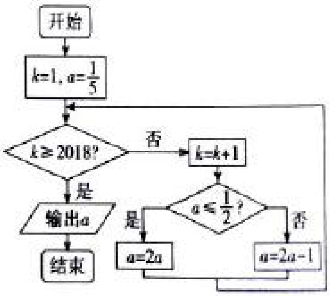
10. 执行如图所示的程序框图，则程序输出 a 的结果为（　　）

A. $\dfrac{4}{5}$

B. $\dfrac{3}{5}$

C. $\dfrac{2}{5}$

D. $\dfrac{1}{5}$



11. 不等式组 $\begin{cases}x\ge0\\0\le y\le1\\y\ge x^2\end{cases}$，所表示的平面区域为 Ω，用随机模拟方法近似计算 Ω 的面积，先产生两组（每组 100 个）区间 $[0,1]$ 上的均匀随机数 x_1，x_2，$\dots x_{100}$ 和 y_1，y_2，$\dots y_{100}$，由此得到 100 个点 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,100)$，再数出其中满足 $y_i<x_i^2$ $(i=1,2,\cdots,100)$ 的点数为 33，那么由随机模拟方法可得平面区域 Ω 面积的近似值为（　　）

A. 0.33　　B. 0.66　　C. 0.67　　D. $\dfrac{1}{3}$

12. 已知F_1，F_2是椭圆与双曲线的公共焦点，P是它们的一个公共点，且$|PF_1|>|PF_2|$，线段PF_1的垂直平分线过F_2，若椭圆的离心率为e_1，双曲线的离心率为e_2，则$\frac{2}{e_1}+\frac{e_2}{2}$的最小值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. 3　　D. 6

二、**填空题**：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知一组数 1，2，m，6，7 的平均数为 4，则这组数的方差为________.

14. 已知点P在抛物线$C:y^2=16x$上，且点P到y轴的距离 6，则点P到抛物线C焦点的距离为________.

15. 在区间$(0,1)$内随机地取出两个数，则两数之和小于$\frac{6}{5}$的概率是________.

16. 若直线$y=kx+b$ $(k<1)$既是曲线$y=\ln x$的切线，又是曲线$y=\frac{1}{e^2}\cdot e^x$的切线，则$k=$________.

三、**解答题**：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 12 分）

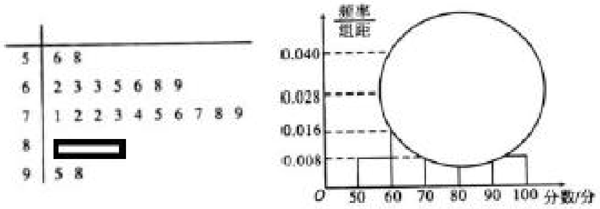
设函数$f(x)=axe^x+x^2+2x+1$.

（1）若$a=1$，求$f(x)$的极值；

（2）若$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，求实数a的最大值.

18. （本小题满分 12 分）

2018 年，教育部发文确定新高考改革正式启动，湖南、广东、湖北等 8 省市开始实行新高考制度，从 2018 年下学期的高一年级学生开始实行.为了适应新高考改革，某校组织了一次新高考质量测评，在成绩统计分析中，高二某班的数学成绩的茎叶图和频率分布直方图因故都受到不同程度的损坏，但可见部分如下，据此解答如下问题：



（1）求该班数学成绩在$[50,60)$的频率及全班人数；

（2）根据频率分布直方图估计该班这次测评的数学平均分；

（3）若规定90分及其以上为优秀，现从该班分数在80分及其以上的试卷中任取2份分析学生得分情况，求在抽取的2份试卷中至少有1份优秀的概率.

19．（本小题满分 12 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为$2\sqrt{2}$，离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）若点$A(0,1)$，点B在椭圆C上，求线段AB长度的最大值.

20．（本小题满分 12 分）

设函数$f(x)=\ln x-(a+1)x,(a\in R)$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）当函数$f(x)$有最大值且最大值大于$3a-1$时，求a的取值范围.

21．（本小题满分 12 分）

在直角坐标系xOy中，抛物线$C:y=\dfrac{x^2}{4}$与直线$l:y=kx+4$ 交于M，N两点.

（1）当$k=0$时，分别求抛物线C在点M和N处的切线方程；

（2）y轴上是否存在点P，使得当k变动时，总有$\angle OPM=\angle OPN$？说明理由.

注意：以下请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22．选修 4-4：坐标系与参数方程（10 分）

已知曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=3+2cos\alpha,\\ y=1-2sin\alpha,\end{cases}$（$\alpha$为参数），以直角坐标原点为极点，$x$轴非负半轴为极轴并取相同的单位长度建立极坐标系.

（1）求曲线C的极坐标方程；

（2）若直线l的极坐标方程为$\sin\theta-2\cos\theta=\dfrac{1}{\rho}$，求曲线$C$上的点到直线$l$的最小距离.

23．选修 4-5：不等式选讲（10 分）

已知函数$f(x)=|x-a|+|2x-1|(a\in R)$.

（1）当$a=1$时，求$f(x)\le 2$的解集；

（2）若$f(x)\le|2x+1|$的解集包含集合$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，求实数$a$的取值范围.

六安一中 2019~2020 年度第二学期高二年级开学考试
数学试卷（文科）参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	D	C	B	B	A	B	B	C	C	D

13. $\dfrac{26}{5}$　　14. 10　　15. $\dfrac{17}{25}$　　16. $\dfrac{1}{e}$

17. （1）因为 $a=1$，所以 $f'(x)=2(x+1)+e^{x}(x+1)=(x+1)(2+e^{x})$

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值，极小值为 $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$，无极大值…………6 分

（2）由已知，$f'(x)=ae^{x}+axe^{x}+2x+2\le 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

则 $ae^{x}(x+1)\le -2(x+1)$，只需 $a\le\left(\dfrac{-2}{e^{x}}\right)_{\min}$，因为 $x\in[0,+\infty)$，所以 $a\le -2$，

从而实数 a 的最大值为 -2…………12 分

18. （1）频率为 0.08，频数为 2，所以全班人数为 $\dfrac{2}{0.08}=25$…………3 分

（2）估计平均分为：$55\times0.08+65\times0.28+75\times0.4+85\times0.16+95\times0.08=73.8$…………6 分

（3）由已知得 $[80,100)$ 的人数为：$(0.16+0.08)\times25=4+2=6$.

设分数在 $[80,90)$ 的试卷为 A，B，C，D，分数在 $[90,100]$ 的试卷为 a，b.

则从 6 份卷中任取 2 份，共有 15 个基本事件，

分别是 AB，AC，AD，Aa，Ab，BC，BD，Ba，Bb，CD，Ca，Cb，Da，Db，ab，其中至少有一份优秀的事件共有 9 个，

分别是 Aa，Ab，Ba，Bb，Ca，Cb，Da，Db，ab，

$\therefore$ 在抽取的 2 份试卷中至少有 1 份优秀的概率为 $P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$…………12 分

19. （1）因为$2c=2\sqrt{2},\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$c=\sqrt{2},a=2,b=\sqrt{2}$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$…………5 分

（2）设$B(x_0,y_0)$，则$\frac{{x_0}^2}{4}+\frac{{y_0}^2}{2}=1$，

$|AB|=\sqrt{{x_0}^2+(y_0-1)^2}=\sqrt{4\left(1-\frac{{y_0}^2}{2}\right)+(y_0-1)^2}=\sqrt{-{y_0}^2-2y_0+5}$，

因为$-\sqrt{2}\le y_0\le\sqrt{2}$，所以当$y_0=-1$时，$|AB|$的最大值为$\sqrt{6}$…………12 分

20. （1）函数$f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$ ，$f'(x)=\frac{1}{x}-(a+1)=\frac{1-(a+1)x}{x}$

①当$a\le-1$ 时，$f'(x)>0$ ，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

②当$a+1>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{a+1}$，

当$0<x<\frac{1}{a+1}$时，$f'(x)>0$，函数单调递增；

当$x>\frac{1}{a+1}$时，$f'(x)<0$，函数单调递减；

综上所述：当$a\le-1$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$a>-1$时，函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a+1}\right)$ 上单调递增，在$\left(\frac{1}{1+a},+\infty\right)$上单调递减…………6 分

（2）由（1）得：当$a>-1$时，$f_{\max}(x)=f\left(\frac{1}{a+1}\right)=\ln\frac{1}{a+1}-1$

当函数$f(x)$有最大值且最大值大于$3a-1$，$\ln\frac{1}{a+1}-1>3a-1$，即$\ln(a+1)+3a<0$，

令$g(a)=\ln(a+1)+3a$，$\because g(0)=0$且$g(a)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore$ $g(a)<g(0)=0$在$(-1,+\infty)$上恒成立，$\therefore$ $-1<a<0$，

故a的取值范围为$(-1,0)$…………12 分

21. （1）由题意知$k=0$时，联立$\begin{cases}y=4\\ y=\dfrac{x^2}{4}\end{cases}$，解得$M(4,4)$，$N(-4,4)$.

设在点$M(4,4)$的切线方程为$y=k(x-4)+4$，

联立$\begin{cases}y=kx+4-4k\\ y=\dfrac{x^2}{4}\end{cases}$ 得：$x^2-4kx+16k-16=0$，

由题意：$\Delta=16k^2-4(16k-16)=0$，即$k^2-4k+4=0$，解得$k=2$，

根据对称性，在点$N(-4,4)$的切线斜率为$k=-2$，

所以两切线方程分别为$y=2x-4, y=-2x-4$.（也可用导数做）…………6 分

（2）存在符合题意的点，证明如下：

设点$P(0,b)$为符合题意的点，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

直线PM，PN的斜率分别为k_1，k_2．联立方程$\begin{cases}y=kx+4\\ y=\dfrac{x^2}{4}\end{cases}$，

得$x^2-4kx-16=0$，故$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-16$，

从而$k_1+k_2=\dfrac{y_1-b}{x_1}+\dfrac{y_2-b}{x_2}=\dfrac{2kx_1x_2+(4-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{k(4+b)}{4}$.

当$b=-4$时，有$k_1+k_2=0$，则直线PM与直线PN的倾斜角互补，

故$\angle OPM=\angle OPN$，所以点$P(0,-4)$符合题意…………12 分

22. （1）由$\begin{cases}x=3+2cos\alpha\\ y=1-2sin\alpha\end{cases}$得$\begin{cases}x-3=2cos\alpha,\\ y-1=-2sin\alpha,\end{cases}$

两式两边平方并相加，得$(x-3)^2+(y-1)^2=4$.

将$\begin{cases}y=\rho sin\theta,\\ x=\rho cos\theta,\end{cases}$代入得$(\rho\cos\theta-3)^2+(\rho\sin\theta-1)^2=4$，

化简得$\rho^2-6\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+6=0$…………5 分

（2）由$\sin\theta-2\cos\theta=\dfrac{1}{\rho}$，得$\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta=1$，即$y-2x=1$，得$2x-y+1=0$.

2

所以直线 l 的直角坐标方程为 $2x-y+1=0$.

因为圆心 $C(3,1)$ 到直线 $l:2x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|2\times3+(-1)\times1+1|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

所以曲线 C 上的点到直线 l 的最小距离为 $d-r=\frac{6\sqrt{5}}{5}-2$............10 分

23.（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=|x-1|+|2x-1|$，$f(x)\le2\Rightarrow|x-1|+|2x-1|\le2$，

上述不等式可化为 $\begin{cases}x\le\frac{1}{2}\\1-x+1-2x\le2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1\\1-x+2x-1\le2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\ge1\\x-1+2x-1\le2\end{cases}$，

解得 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x<1$ 或 $1\le x\le\frac{4}{3}$，$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left\{x\,|\,0\le x\le\frac{4}{3}\right\}$............5 分

（2）$\because f(x)\le|2x+1|$ 的解集包含集合 $\left[\frac{1}{2},1\right]$，

$\therefore$ 当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时，不等式 $f(x)\le|2x+1|$ 恒成立，

即 $|x-a|+|2x-1|\le|2x+1|$ 在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上恒成立，

$\therefore|x-a|+2x-1\le2x+1$，即 $|x-a|\le2$，$\therefore-2\le x-a\le2$，

$\therefore x-2\le a\le x+2$ 在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上恒成立，$\therefore(x-2)_{\max}\le a\le(x+2)_{\min}$，

$\therefore-1\le a\le\frac{5}{2}$，$\therefore a$ 的取值范围是 $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$............10 分