四川省宜宾市叙州区2020届高二下学期第二月考

数学（理）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

第I卷 选择题（60分）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．复数$2-3i$的虚部为

A．2　　B．$-3i$　　C．$3i$　　D．-3

2．以下不等式在$x>0$时不成立的是

A．$\ln x<x$　　B．$x<\mathrm{e}^x$　　C．$\ln x+1>e^x$　　D．$e^x>1+x$

3．已知$f\left(x\right)=x^2$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=$

A．x^2　　B．$2x$　　C．$\left(\Delta x\right)^2$　　D．Δx

4．双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$的渐近线方程是

A．$y=\pm\dfrac{3}{2}x$　　B．$y=\pm\dfrac{9}{4}x$　　C．$y=\pm\dfrac{2}{3}x$　　D．$y=\pm\dfrac{4}{9}x$

5．“$c=1$”是“直线$x+y+c=0$与圆$\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=2$”相切的

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．若在$x^2+y^2\le 1$所围区域内随机取一点，则该点落在$\left|x\right|+\left|y\right|\le 1$所围区域内的概率是

A．$\dfrac{1}{\pi}$　　B．$\dfrac{2}{\pi}$　　C．$\dfrac{1}{2\pi}$　　D．$1-\dfrac{1}{\pi}$

7．从0,1,2,3,4,5这六个数字中任取两个奇数和两个偶数，组成没有重复数字的四位数的个数为

A．300　　B．216　　C．180　　D．162

8．甲.乙两人约定在上午$9:00$到$10:40$之间在某处会面，并约定先到者应等候另一人20分钟，过时即可离去．若他们在限时内的任何时刻到达约定地的概率都是相等的，则两人能会面的概率为

A．$\frac{1}{25}$　　B．$\frac{16}{25}$　　C．$\frac{9}{25}$　　D．$\frac{1}{5}$

9．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左、右焦点为$F_1,F_2$,离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,过$F_2$的直线$l$交$C$于$A,B$两点，若$\Delta AF_1B$的周长为$4\sqrt{3}$,则$b$的值为

A．4　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

10．已知函数$f(x)=x^3-3x$，若过点$M(2,t)$可作曲线$y=f(x)$的三条切线，则实数的取值范围是

A．$(-6,-2)$　　B．$(-4,-2)$

C．$(-6,2)$　　D．$(0,2)$

11．已知圆C_1：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，圆C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，A，B分别是圆C_1，C_2上的动员.若动点M在直线l_1：$x+y-1=0$上，动点N在直线l_2：$x+y+1=0$上，记线段MN的中点为P，则$|PA|+|PB|$的最小值为

A．3　　B．$\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{14}-3$　　D．$\sqrt{13}-3$

12．已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且满足$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+2$，$f'(x+2)=f'(4-x)$，若$f(x)\geq 6x\ln x+2$恒成立，则实数$b$的取值范围为

A．$[4+\ln 2,+\infty)$　　B．$[5+\ln 5,+\infty)$　　C．$[6+4\ln 3,+\infty)$　　D．$[6+6\ln 6,+\infty)$

第II卷　非选择题（90分）

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．定积分$\int_1^3\left(2x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=$__________.

14．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是 BB_1，CD 的中点，则异面直线 D_1F 与 DE 所成角的大小为__________.

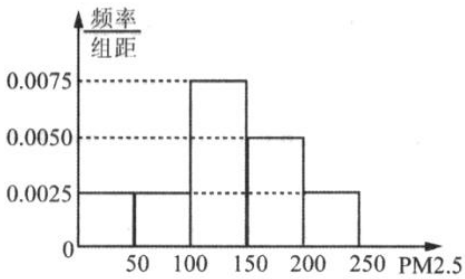
15．函数 $f(x)=x^3+\sin x$, (-1 < x < 1)，若 $f(x^2)+f(-x)>0$，则实数 x 的取值范围是___

16．已知点 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 为双曲线 C 左支上的任意一点，若 $\frac{|PF_2|^2}{|PF_1|}$ 的最小值为 $8a$，则双曲线 C 的离心率的取值范围是（_____）.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）$PM2.5$ 是衡量空气污染程度的一个指标，为了了解 A 市空气质量情况，从 2018 年每天的 $PM2.5$ 值的数据中随机抽取 40 天的数据，其频率分布直方图如图所示.将 $PM2.5$ 值划分成区间 $[0,100)$、$[100,150)$、$[150,200)$、$[200,250]$，分别称为一级、二级、三级和四级，统计时用频率估计概率 .



（I）根据 2018 年的数据估计该市在 2019 年中空气质量为一级的天数；

（II）如果 A 市对环境进行治理，经治理后，每天 $PM2.5$ 值 X 近似满足正态分布 $X\sim N(115,752)$，求经过治理后的 $PM2.5$ 值的均值下降率.

18.（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$，$a$ 为实数.

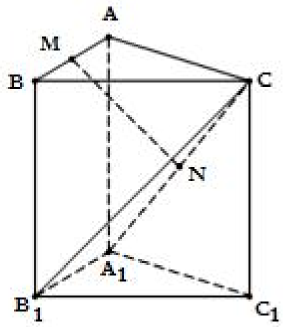
（I）当 $a\geq 2$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,4\right]$ 上是减函数，求 a 的取值范围.

19.（12 分）三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱与底面垂直，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=BC=BB_1=2$，M,N 分别是 AB,A_1C 的中点.

（I）求证：$MN\perp$ 平面 A_1B_1C；

（II）求二面角 $M-B_1C-A_1$ 的余弦值.



20.（12 分）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$，椭圆 C 上一点 P 到左右两个焦点 F_1,F_2 的距离之和是 4.

（I）求椭圆的方程；

（II）已知过 F_2 的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点，且两点与左右顶点不重合，若 $\overline{F_1M}=\overline{F_1A}+\overline{F_1B}$，求四边形 $AMBF_1$ 面积的最大值.

21.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+x^2$，其中 $a\in R$.

（I）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（II）当 $a=1$ 时，证明: $f\left(x\right)\le x^2+x-1$；

（III）试比较 $\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\frac{\ln 4^2}{4^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}$ 与 $\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$ $\left(n\in N^*\text{且}n\geq 2\right)$的大小，并证明你的结论。

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}+2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数),以坐标原点 O 为极点,以 x 轴正半轴为极轴,建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$

(I)写出曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(II)若射线 $OM:\theta=\alpha_0\left(\rho\geq 0\right)$ 平分曲线 C_1，且与曲线 C_2 交于点 A，曲线 C_2 上的点 B 满足 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，求 $\left|AB\right|$.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）已知函数 $f(x)=|2x-1|$.

（I）解不等式 $f(x)<|x|+3$；

（II）若对于 x，$y\in R$，有 $|x-3y+1|\leq\frac{1}{3}$，$|2y-1|\leq\frac{1}{6}$，求证：$f(x)\leq\frac{7}{6}$.

参考答案

1-5:DCBCB　　6-10:BCCCC　　11-12:DD

13．$8-\ln 3$　　14．90°　　15．$(-1,0)$　　16．$\left(1,3\right]$

17.（1）由样本空气质量$PM2.5$的数据的频率分布直方图可知，其频率分布如下表：

$PM2.5$值	$\left[0,50\right)$	$\left[50,100\right)$	$\left[100,150\right)$	$\left[150,200\right)$	$\left[200,250\right)$
频率	0.125	0.125	0.375	0.25	0.125

由上表可知，如果A市维持现状不变，那么该市下一年的某一天空气质量为一级的概率为0.25，因此在365天中空气质量为一级的天数约有$365\times 0.25\approx 91$（天）.

（2）如果A市维持不变，那么该市的$PM2.5$值的均值约为

$$E\left(Y\right)=25\times 0.125+75\times 0.125+125\times 0.375\quad +175\times 0.25+225\times 0.125=131.25$$

由于该市的环境进行治理，治理后每天$PM2.5$值X近似满足$X\sim N\left(115,752\right)$，所以治理后的$PM2.5$值$X$的均值为$E\left(X\right)=115$，因此$A$市治理后的$PM2.5$值的均值下降率为

$$\frac{131.25-115}{131.25}=12.38\%$$

18.（1）$f'\left(x\right)=x^2-ax+a-1=\left(x-1\right)\left[x-\left(a-1\right)\right]$，

当$a-1=1$即$a=2$时，$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\geq 0$，$f\left(x\right)$在$R$上单调递增；

当$a-1>1$即$a>2$时，由$f'\left(x\right)>0$得$x<1$或$x>a-1$，由$f'\left(x\right)<0$得$1<x<a-1$.

$\therefore f\left(x\right)$分别在$\left(-\infty,1\right)$与$\left(a-1,+\infty\right)$单调递增，在$\left(1,a-1\right)$单调递减.

综上所述，当$a=2$时，$f\left(x\right)$在R上单调递增；

当$a>2$时，$f\left(x\right)$分别在$\left(-\infty,1\right)$与$\left(a-1,+\infty\right)$单调递增，在$\left(1,a-1\right)$单调递减.

（2）由已知得$f'\left(x\right)=x^2-ax+a-1\leq 0$在区间$\left[1,4\right]$上恒成立.

$\therefore a\left(x-1\right)\geq x^2-1$在区间$\left[1,4\right]$上恒成立.

当$x=1$时，$a\in R$.

当$1<x\leq 4$时，$a\geq x+1$.

而 $y=x+1$ 在 $x\in\left(1,4\right]$ 上单调递增，$\therefore$ $x=4$ 时，$y_{\max}=5$，则 $a\geq 5$.

综上 $a\geq 5$.

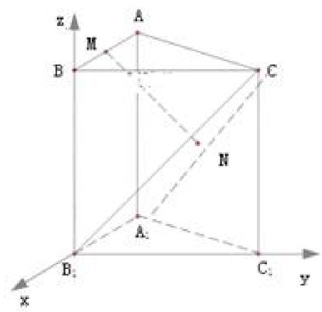
19.（1）如图，以 B₁ 为原点建立空间直角坐标系 B_1-xyz

则 $B_1\left(0,0,0\right),C\left(0,2,2,\right),A_1\left(-2,0,0\right),M\left(-1,0,2\right),N\left(-1,1,1\right),$

$\therefore\overline{B_1C}=\left(0,2,2\right),\overline{A_1B_1}=\left(2,0,0\right),\overline{NM}=\left(0,-1,1\right)$.

设平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{B_1C}=0\\\vec{n}\cdot\overline{A_1B_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-z\end{cases}$.令 $z=1$，则 $x=0,y=-1,\therefore\vec{n}=\left(0,-1,1\right)$.



$\therefore\vec{n}=\overline{NM}$，$\therefore MN\perp$ 平面 A_1B_1C

（2）平面 MB_1C 的法向量为 $\vec{m}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$ $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overline{B_1C}=0\\\vec{m}\cdot\overline{B_1M}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=2z_0\\y_0=-z_0\end{cases}$.

令 $z_0=1,$则　$x_0=2,y_0=-1,\therefore\vec{m}=\left(2,-1,1\right)$，

$\cos m,n=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所求二面角 $M—B_1C—A_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

20.（1）依题意，$2a=4,a=2$，

因为 $e=\dfrac{1}{2}$，所以 $c=1,b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 C 方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),AB:x=my+1$ ，则由 $\begin{cases}x=my+1\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，可得

$3\left(my+1\right)^2+4y^2=12$，

即，$\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$，$\Delta=36m^2+36\left(3m^2+4\right)=144\left(m^2+1\right)>0$，

又因为 $\overline{F_1M}=\overline{F_1A}+\overline{F_1B}$，所以四边形 $AMBF_1$ 是平行四边形，

设平面四边形 $AMBF_1$ 的面积为 S，则

$S=2S_{\Delta ABF_1}=2\times\dfrac{1}{2}\times\left|F_1F_2\right|\times\left|y_1-y_2\right|=2\times\dfrac{\sqrt{\Delta}}{3m^2+4}=24\times\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$ 设 $t=\sqrt{m^2+1}$，则

$m^2=t^2-1\left(t\geq 1\right)$，所以$S=24\times\dfrac{t}{3t^2+1}=24\times\dfrac{1}{3t+\frac{1}{t}}$，因为$t\geq 1$，　　所以$3t+\dfrac{1}{t}\geq 4$，

所以$S\in\left(0,6\right]$，所以四边形$AMBF_1$面积的最大值为6.

21.（1）函数$f\left(x\right)$的定义域为：$\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\dfrac{a}{x}+2x=\dfrac{a+2x^2}{x}$

①当$a\geq 0$时，$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增

②当$a<0$时，令$f'\left(x\right)=0$，解得$x=\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$.

当2^{22}时，$a+2x^2<0$，所以$f'\left(x\right)<0$，　所以$f\left(x\right)$在$\left(0,\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right)$上单调递减；

当$x>\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$时，$a+2x^2>0$，所以$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(\sqrt{-\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递增.

综上，当$a\geq 0$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；

当$a<0$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{-\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递增.

（2）当$a=1$时，$f\left(x\right)=\ln x+x^2$，要证明$f\left(x\right)\leq x^2+x-1$，

即证$\ln x\leq x-1$，即证：$\ln x-x+1\leq 0$.

设$g\left(x\right)=\ln x-x+1$，则$g'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{x}$，令$g'\left(x\right)=0$得，$x=1$.

当$x\in\left(0,1\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)<0$.

所以$x=1$为极大值点，且$g\left(x\right)$在$x=1$处取得最大值。

所以$g\left(x\right)\leq g\left(1\right)=0$，即$\ln x-x+1\leq 0$。故$f\left(x\right)\leq x^2+x-1$.

（3）证明：$\ln x\leq x-1$（当且仅当$x=1$时等号成立），即$\dfrac{lnx}{x}\leq 1-\dfrac{1}{x}$,

则有$\dfrac{ln2^2}{2^2}+\dfrac{ln3^2}{3^2}+\ldots+\dfrac{lnn^2}{n^2}<1-\dfrac{1}{2^2}+1-\dfrac{1}{3^2}+\ldots+1-\dfrac{1}{n^2}=\mathrm{n}-1-\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$<\mathrm{n}-1-\left(\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}\right)$

$$=\text{n}-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\text{n}-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)},$$

故：$\frac{ln2^2}{2^2}+\frac{ln3^2}{3^2}+\ldots+\frac{lnn^2}{n^2}<\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$

22. 解：(1) 曲线 C_1 的直角坐标方程是 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，即 $x^2-2x+y^2-2\sqrt{3}y=0$

化成极坐标方程为：$\rho=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$

曲线 C_2 的直角坐标方程是 $x^2=4y$；

（2）曲线 C_1 是圆，射线 OM 过圆心 $(1,\sqrt{3})$，所以方程是 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\geq 0)$

代入 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$，得 $\rho_A=8\sqrt{3}$

又 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，将 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，代入 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$，得 $\rho_B=\frac{8}{3}$

因此 $|AB|=\sqrt{{\rho_A}^2+{\rho_B}^2}=\frac{16\sqrt{7}}{3}$

23.（1）由 $f(x)<|x|+3$ 得 $|2x-1|<|x|+3$，

则 $\begin{cases}x\geq\frac{1}{2},\\2x-1<x+3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<\frac{1}{2},\\1-2x<x+3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leq 0,\\1-2x<-x+3.\end{cases}$

解得 $\frac{1}{2}\leq x<4$，或 $0<x<\frac{1}{2}$，或 $-2<x\leq 0$，即 $-2<x<4$，

所以不等式 $f(x)<|x|+1$ 的解集为 $\{x|-2<x<4\}$.

（2）证明：由 $|x-3y+1|\leq\frac{1}{3}$，$|2y-1|\leq\frac{1}{6}$，

所以 $f(x)=|2x-1|=|2(x-3y+1)+3(2y-1)|\leq 2|x-3y+1|+3|2y-1|\leq\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$.