江苏省启东中学2019-2020学年高二下学期期初考试试题

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．与曲线 $y=x^3-5x$ 相切且过原点的直线的斜率为（　　）

A．2　　B．-5　　C．-1　　D．-2

2．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7+a_9=16$，则 a_8 的值是（　　）

A．4　　B．16　　C．2　　D．8

3．已知复数 z 满足 $\dfrac{z+i}{z}=i$，则 $\overline{z}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　B．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

C．$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　D．$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

4．已知随机变量 $\xi+\eta=8$，若 $\xi\sim B(10,\ 0.4)$，则 $E(\eta)$，$D(\eta)$ 分别是（　　）

A．4和2.4　　B．2和2.4　　C．6和2.4　　D．4和5.6

5．已知抛物线 $C:y^2=x$ 的焦点为 F，$A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，$|AF|=\dfrac{5}{4}x_0$，则 $x_0=$（　　）

A．4　　B．2　　C．1　　D．8

6．$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(1+2x)^4$ 展开式中 x^2 的系数为（　　）

A．10　　B．24　　C．32　　D．56

7．设 F_1,F_2 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，　$b>0$）的左、右焦点，O 是坐标原点．过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P．若 $\left|PF_1\right|=\sqrt{6}\left|OP\right|$，则 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

8．直线 y＝a 分别与直线 y＝2(x＋1)，曲线 y＝x＋lnx 交于点 A，B，则|AB|的最小值为（　　）

A．3　　B．2　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项

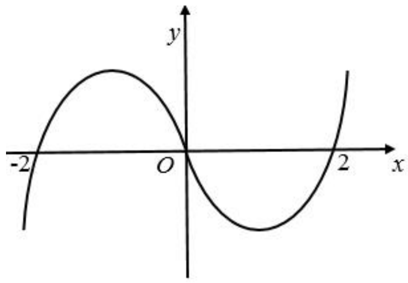
符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9．若数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n \geq 2(n \in N)$ 满足 $(a_n - a_{n-1} - 2)(a_n - 2a_{n-1}) = 0$，下面选项中关于数列 $\{a_n\}$ 的命题正确的是（　　）

A．$\{a_n\}$ 可以是等差数列　　B．$\{a_n\}$ 可以是等比数列

C．$\{a_n\}$ 可以既是等差又是等比数列　　D．$\{a_n\}$ 可以既不是等差又不是等比数列

10．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R 且导函数为 $f'(x)$，如图是函数 $y = xf'(x)$ 的图像，则下列说法正确的是（　　）



A．函数 $f(x)$ 的增区间是 $(-2,0),(2,+\infty)$

B．函数 $f(x)$ 的增区间是 $(-\infty,-2),(2,+\infty)$

C．$x=-2$ 是函数的极小值点

D．$x=2$ 是函数的极小值点

11．设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$，斜率为 k 的直线不经过原点 O，而且与椭圆相交于 A,B 两点，M 为线段 AB 的中点.下列结论正确的是（　　）

A．直线 AB 与 OM 垂直；

B．若点 M 坐标为 $(1,1)$，则直线方程为 $2x+y-3=0$；

C．若直线方程为 $y=x+1$，则点 M 坐标为 $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$

D．若直线方程为 $y=x+2$，则 $|AB|=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

12．下列说法中，正确的命题是（　　）

A．已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\delta^2)$，$P(\xi<4)=0.84$，则 $P(2<\xi<4)=0.16$.

B．以模型 $y=ce^{kx}$ 去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设 $z=\ln y$，将其变换后得到线性方程 $z=0.3x+4$，则 c，k 的值分别是 e^4 和 0.3.

C．已知两个变量具有线性相关关系，其回归直线方程为 $y=a+bx$，若 $b=2$，$\overline{x}=1$，$\overline{y}=3$，则 $a=1$.

D．若样本数据 x_1，x_2，…，x_{10} 的方差为 2，则数据 $2x_1-1$，$2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$ 的方差为 16．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请把答案直接填写在答题卡相应位置上。

13．两个实习生加工一个零件，产品为一等品的概率分别为 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{3}{4}$，则这两个零件中恰有一个一等品的概率为__________.

14．某幼儿园的老师要给甲、乙、丙、丁 4 个小朋友分发 5 本不同的课外书，则每个小朋友至少分得 1 本书的不同分法数为______.

15．若 $(2x+\dfrac{a}{x})^5$ 的展开式中各项系数之和为 0,则展开式中含 x^3 的项为__________.

16．已知函数 $f\left(x\right)=px-\dfrac{p}{x}-2\ln x$，若$f\left(x\right)$ 在定义域内为单调递增函数，则实数 p 的最小值为_________；若 p>0，在[1,e]上至少存在一点 x_0，使得 $f\left(x_0\right)>\dfrac{2e}{x_0}$ 成立，则实数 p 的取值范围为_________．(本题第一空 2 分，第二空 3 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(本小题满分 10 分)

已知等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的首项为 1，公差 $d\neq 0$，且 a_8 是 a_5 与 a_{13} 的等比中项.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）记 $b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\left(n\in N^*\right)$，求数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18．(本小题满分 12 分)

某品牌汽车 4S 店，对该品牌旗下的 A 型、B 型、C 型汽车进行维修保养，汽车 4S 店记录了 100 辆该品牌三种类型汽车的维修情况，整理得下表：

车型	A 型	B 型	C 型
频数	20	40	40

假设该店采用分层抽样的方法从上述维修的 100 辆该品牌三种类型汽车中随机取 10 辆进行问卷回访.

（1）求 A 型、B 型、C 型各车型汽车抽取的数目；

（2）维修结束后这 100 辆汽车的司机采用“100 分制”打分的方式表示对 4S 店的满意度，按照大于等于 80 为优秀，小于 80 为合格，得到如下列联表：

	优秀	合格	合计
男司机	10	38	48
女司机	25	27	52
合计	35	65	100

问能否在犯错误概率不超过 0.01 的前提下认为司机对 4S 店满意度与性别有关系？请说明原因.

（参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$）

附表：

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.100	0.050	0.010	0.001
K	2.706	3.841	6.635	10.828

19．(本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=x^2-a(\ln x+1)$.

（1）当 $a=1$时，求 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）当 $a>\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)$ 是否存在零点？并证明.

20．(本小题满分 12 分)

甲、乙两支篮球队赛季总决赛采用 7 场 4 胜制，每场必须分出胜负，场与场之间互不影响，只要有一队获胜 4 场就结束比赛.现已比赛了 4 场，且甲篮球队胜 3 场，已知甲球队第 5,6 场获胜的概率均为 $\dfrac{3}{5}$，但由于体力原因，第 7 场获胜的概率为 $\dfrac{2}{5}$.

（1）求甲对以 4:3 获胜的概率；

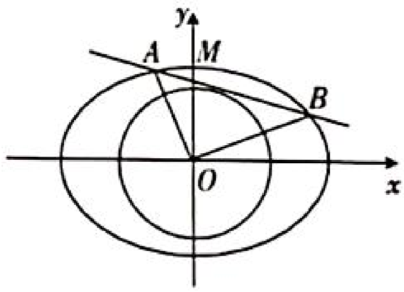
（2）设 X 表示决出冠军时比赛的场数，求 X 的分布列及数学期望.

21．(本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，若圆 $O:x^2+y^2=R^2\ (R>0)$ 的一条切线与椭圆 C 有两个交点 A,B，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

（1）求圆O的方程；

（2）已知椭圆C的上顶点为M，点N在圆O上，直线MN与椭圆C相交于另一点Q，且$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{NQ}$，求直线$MN$的方程.



22．(本小题满分 12 分)

已知函数$f\left(x\right)=\ln x+(a-2)x(a$是常数），此函数对应的曲线$y=f\left(x\right)$在点$(1,f(1))$处的切线与$x$轴平行.

（1）求a的值，并求$f\left(x\right)$的最大值；

（2）设$m>0$，函数$g\left(x\right)=\dfrac{1}{3}mx^{3}-mx,x\in(1,2)$，若对任意的$x_1\in(1,2)$，总存在$x_2\in(1,2)$，使$f(x_1)-g(x_2)=0$，求实数$m$的取值范围.

参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．与曲线 $y=x^3-5x$ 相切且过原点的直线的斜率为（　　）

A．2　　B．-5　　C．-1　　D．-2

【答案】B

2．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7+a_9=16$，则 a_8 的值是（　　）

A．4　　B．16　　C．2　　D．8

【答案】D

3．已知复数 z 满足 $\dfrac{z+i}{z}=i$，则 $\overline{z}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　B．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

C．$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　D．$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

【答案】A

4．已知随机变量 $\xi+\eta=8$，若 $\xi \sim B(10,\ 0.4)$，则 $E(\eta)$，$D(\eta)$ 分别是（　　）

A．4 和 2.4　　B．2 和 2.4　　C．6 和 2.4　　D．4 和 5.6

【答案】A

5．已知抛物线 $C:y^2=x$ 的焦点为 F，$A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，$|AF|=\dfrac{5}{4}x_0$，则 $x_0=$（　　）

A．4　　B．2　　C．1　　D．8

【答案】C

6．$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(1+2x)^4$ 展开式中 x^2 的系数为（　　）

A．10　　B．24　　C．32　　D．56

【答案】D

7．设 F_1,F_2 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，　$b>0$）的左、右焦点，O 是坐标原点．过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P．若 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，则 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

【答案】B

8. 直线 y＝a 分别与直线 y＝2(x＋1)，曲线 y＝x＋lnx 交于点 A，B，则|AB|的最小值为（　　）

A．3　　B．2　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

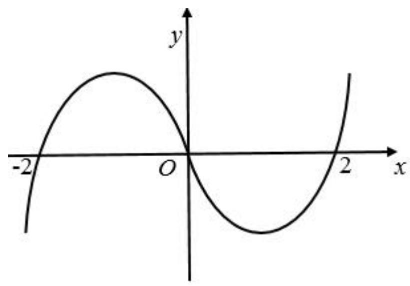
9．若数列$\{a_n\}$对任意$n\geq 2(n\in N)$满足$(a_n-a_{n-1}-2)(a_n-2a_{n-1})=0$，下面选项中关于数列$\{a_n\}$的命题正确的是（　　）

A．$\{a_n\}$可以是等差数列　　B．$\{a_n\}$可以是等比数列

C．$\{a_n\}$可以既是等差又是等比数列　　D．$\{a_n\}$可以既不是等差又不是等比数列

【答案】ABD

10．已知函数$f(x)$的定义域为R且导函数为$f'(x)$，如图是函数$y=xf'(x)$的图像，则下列说法正确的是（　　）



A．函数$f(x)$的增区间是$(-2,0),(2,+\infty)$

B．函数$f(x)$的增区间是$(-\infty,-2),(2,+\infty)$

C．$x=-2$是函数的极小值点

D．$x=2$是函数的极小值点

【答案】BD

11．设椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$，斜率为$k$的直线不经过原点$O$，而且与椭圆相交于$A,B$两点，$M$为线段$AB$的中点.下列结论正确的是（　　）

A．直线AB与OM垂直；

B．若点M坐标为$(1,1)$，则直线方程为$2x+y-3=0$；

C．若直线方程为$y=x+1$，则点M坐标为$\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$

D．若直线方程为 $y=x+2$，则 $|AB|=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

【答案】BD

12．下列说法中，正确的命题是（　　）

A．已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N\left(2,\delta^2\right)$，$P(\xi<4)=0.84$，则 $P(2<\xi<4)=0.16$.

B．以模型 $y=ce^{kx}$ 去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设 $z=\ln y$，将其变换后得到线性方程 $z=0.3x+4$，则 c，k 的值分别是 e^4 和 0.3.

C．已知两个变量具有线性相关关系，其回归直线方程为 $y=a+bx$，若 $b=2$，$\overline{x}=1$，$\overline{y}=3$，则 $a=1$.

D．若样本数据 x_1，x_2，…，x_{10} 的方差为 2，则数据 $2x_1-1$，$2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$ 的方差为 16.

【答案】BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请把答案直接填写在答题卡相应位置上。

13．两个实习生加工一个零件，产品为一等品的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$，则这两个零件中恰有一个一等品的概率为_________.

【答案】$\frac{5}{12}$

14．某幼儿园的老师要给甲、乙、丙、丁 4 个小朋友分发 5 本不同的课外书，则每个小朋友至少分得 1 本书的不同分法数为______.

【答案】240

15．若 $(2x+\frac{a}{x})^5$ 的展开式中各项系数之和为 0,则展开式中含 x^3 的项为_________.

【答案】$-160x^3$

16．已知函数 $f(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x$，若 $f(x)$ 在定义域内为单调递增函数，则实数 p 的最小值为________；若 p>0，在[1,e]上至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)>\frac{2e}{x_0}$ 成立，则实数 p 的取值范围为________．(本题第一空 2 分，第二空 3 分)

【答案】1，$\left(\dfrac{4e}{e^2-1},+\infty\right)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(本小题满分 10 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差$d\neq 0$，且a_8是a_5与a_{13}的等比中项.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\left(n\in N^*\right)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【解】

(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

$\because$ a_8是a_5与a_{13}的等比中项.

$\therefore a_8^2{=}a_5a_{13}$　　即$\left(a_1+7d\right)^2=\left(a_1+4d\right)\left(a_1+12d\right)$

$\therefore d=0$或$d=2$；　　……………2 分

$\because d\neq 0$　$\therefore d=2$

$\therefore a_n=2n-1$　　……………4 分

(2)由（1）知$a_n=2n-1$

$\therefore b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$　　……………7 分

$\therefore T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

……………10 分

18．(本小题满分 12 分)

某品牌汽车 4S 店，对该品牌旗下的 A 型、B 型、C 型汽车进行维修保养，汽车 4S 店记录了 100 辆该品牌三种类型汽车的维修情况，整理得下表：

车型	A 型	B 型	C 型
频数	20	40	40

假设该店采用分层抽样的方法从上述维修的 100 辆该品牌三种类型汽车中随机取 10 辆进行问卷回访.

（1）求 A 型、B 型、C 型各车型汽车抽取的数目；

（2）维修结束后这 100 辆汽车的司机采用“100 分制”打分的方式表示对 4S 店的满意度，按照大于等于 80 为优秀，小于 80 为合格，得到如下列联表：

	优秀	合格	合计
男司机	10	38	48
女司机	25	27	52
合计	35	65	100

问能否在犯错误概率不超过 0.01 的前提下认为司机对 4S 店满意度与性别有关系？请说明原因.

（参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$）

附表：

$P\left(K^2\ge k\right)$	0.100	0.050	0.010	0.001
K	2.706	3.841	6.635	10.828

【解】

（1）A、B、C 型汽车抽取数目分别为 $\dfrac{20}{100}\times 10=2$，$\dfrac{40}{100}\times 10=4$，$\dfrac{40}{100}\times 10=4$，

……………3 分

（2）根据题意，$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(27\times 10-38\times 25)^2}{35\times 65\times 52\times 48}$

≈ 8.1431 ……………8 分

$\because 8.1431>6.635$

所以能在犯错误概率不超过 0.01 的前提下，认为司机对 4S 店满意度与性别有关系．

……………10 分

答：（1）A、B、C 型汽车抽取数目分别为 2，4，4

（2）在犯错误概率不超过 0.01 的前提下，认为司机对 4S 店满意度与性别有关系

……………12 分

19．(本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=x^2-a(\ln x+1)$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）当 $a>\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)$ 是否存在零点？并证明.

【解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-a}{x}$.

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-\ln x-1,\ f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$,

又 $f(1)=0$，切点坐标为 $(1,0)$，切线斜率为 $k=f'(1)=1$，

所以切线方程为 $y=x-1$； ……………4 分

（2）当 $x\in\left(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)$ 时，$f'(x)=\dfrac{2x^2-a}{x}<0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)$ 上单调递减， ……………6 分

当 $a>\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ 时，$f\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)=-\dfrac{a}{2}\left(\ln\dfrac{a}{2}+1\right)<0$,

又 $0<\mathrm{e}^{-a-1}<\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<\sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{e}}}<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

$f\left(e^{-a-1}\right)=e^{-2a-2}+a^2>0$, ……………10 分

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)$ 上存在零点. ……………12 分

20．(本小题满分 12 分)

甲、乙两支篮球队赛季总决赛采用 7 场 4 胜制，每场必须分出胜负，场与场之间互不影响，只要有一队获胜 4 场就结束比赛.现已比赛了 4 场，且甲篮球队胜 3 场，已知甲球队第 5,6 场获胜的概率均为$\dfrac{3}{5}$，但由于体力原因，第 7 场获胜的概率为$\dfrac{2}{5}$.

（1）求甲对以 4:3 获胜的概率；

（2）设 X 表示决出冠军时比赛的场数，求 X 的分布列及数学期望.

【解】

（1）设甲队以$4:3$获胜的事件分别为 B

∵甲队第 5，6 场获胜的概率均为$\dfrac{3}{5}$，第 7 场获胜的概率为$\dfrac{2}{5}$，

$\therefore \mathrm{P}(\mathrm{B})=\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{125}$

∴甲队以$4:3$获胜的概率分别为$\dfrac{8}{125}$ ……………4 分

（2）随机变量 X 的可能取值为 5，6，7

$\therefore \mathrm{P}(\mathrm{X}=5)=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=6)=\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{25}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=7)=\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\dfrac{2}{5}+\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\left(1-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{4}{25}$ ……………7 分

∴随机变量 X 的分布列为

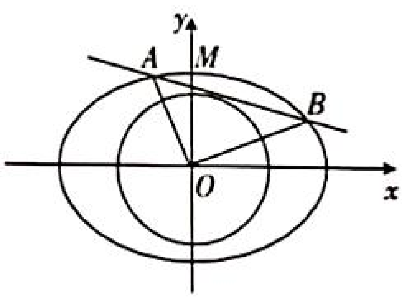
X	5	6	7
P	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{6}{25}$	$\dfrac{4}{25}$

……………9 分

$\therefore \mathrm{E}(\mathrm{X})=5\times\dfrac{3}{5}+6\times\dfrac{6}{25}+7\times\dfrac{4}{25}=\dfrac{139}{25}$ ……………12 分

21．(本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中，已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，若圆$O:x^2+y^2=R^2\ (R>0)$的一条切线与椭圆$C$有两个交点$A,B$，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.



（1）求圆O的方程；

（2）已知椭圆C的上顶点为M，点N在圆O上，直线MN与椭圆C相交于另一点Q，且$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{NQ}$，求直线$MN$的方程.

【解】

（1）设圆的切线为$y=kx+b$，点$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$.

由方程组$\begin{cases} y=kx+b, \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$

所以$\left(1+2k^2\right)x^2+4kbx+2b^2-6=0$，

得$x_1+x_2=-\dfrac{4kb}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2b^2-6}{1+2k^2}$. ……………2 分

因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

所以$\left(x_1,y_1\right)\cdot\left(x_2,y_2\right)=0$，即$x_1x_2+y_1y_2=0$.

又因为点$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$在直线$y=kx+b$上，

所以$x_1x_2+\left(kx_1+b\right)\left(kx_2+b\right)=0$，

即$\left(1+k^2\right)x_1x_2+kb\left(x_1+x_2\right)+b^2=0$.

所以$\dfrac{\left(1+k^2\right)\left(2b^2-6\right)}{1+2k^2}-\dfrac{4k^2b^2}{1+2k^2}+b^2=0$，

化简得$b^2=2k^2+2$， ……………4 分

所以圆O的半径$R=\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，所以圆$O$的方程为$x^2+y^2=2$.

……………5 分

当切线 AB 为$x=\pm\sqrt{2}$时，易得圆O的方程为$x^2+y^2=2$ ……………6 分

（2）设点$Q\left(x_0,y_0\right)$，点$M(0,\sqrt{3})$，

由$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{NQ}$，得$N\left(\dfrac{2x_0}{3},\dfrac{2y_0+\sqrt{3}}{3}\right)$. ……………7 分

代入椭圆和圆得 $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{6}+\dfrac{y_0^2}{3}=1,\\ \left(\dfrac{2x_0}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2y_0+\sqrt{3}}{3}\right)^2=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\ y_0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}x_0=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\ y_0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

所以点 $Q\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $Q\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ……………10 分

故直线 MN 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}x+\sqrt{3}$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}x+\sqrt{3}$. ……………12 分

22．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+(a-2)x$（$a$ 是常数），此函数对应的曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

（1）求 a 的值，并求 $f\left(x\right)$ 的最大值；

（2）设 $m>0$，函数 $g\left(x\right)=\dfrac{1}{3}mx^3-mx, x\in(1,2)$，若对任意的 $x_1\in(1,2)$，总存在 $x_2\in(1,2)$，使 $f(x_1)-g(x_2)=0$ ，求实数 m 的取值范围.

【解】

（1）对 $f\left(x\right)$ 求导，得 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+a-2$，

由题意可得 $f'\left(1\right)=1+a-2=0$，

解得 $a=1$， ……………1 分

故 $f\left(x\right)=\ln x-x$，

又定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，且 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增，

当 $x>1$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减， ……………2 分

所以当 $x=1$ 时，$f\left(x\right)$ 有极大值，也为最大值且 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(1\right)=\ln 1-1=-1$.

……………3 分

（2）设 $f\left(x\right)\left(x\in\left(1,2\right)\right)$ 的值域为 $A, g\left(x\right)\left(x\in\left(1,2\right)\right)$ 的值域为 B，

由题意“对于任意的 $x_1\in\left(1,2\right)$，总存在 $x_2\in\left(1,2\right)$ 使得 $f\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)=0$”，等价于 $A\subseteq B$，……………4 分

由（1）知 $f'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{x}$，

因为 $x\in\left(1,2\right)$，所以 $f'\left(x\right)<0$，故 $f\left(x\right)$ 在 $x\in\left(1,2\right)$ 上单调递减，

所以 $f\left(1\right)<f\left(x\right)<f\left(2\right)$，

即 $\ln2-2<f\left(x\right)<-1$，

所以 $A=\left(\ln2-2,-1\right)$，……………7 分

因为 $g\left(x\right)=\dfrac{1}{3}mx^3-mx$，

所以 $g'\left(x\right)=mx^2-m=m\left(x-1\right)\left(x+1\right)$，

因为 $m>0$，故 $g'\left(x\right)>0$，

所以 $g\left(x\right)$ 在 $x\in\left(1,2\right)$ 上是增函数，

所以 $\mathrm{g}\left(1\right)<g\left(x\right)<g\left(2\right)$，

即 $-\dfrac{2}{3}m<g\left(x\right)<\dfrac{2}{3}m$，

故 $B=\left(-\dfrac{2}{3}m,\dfrac{2}{3}m\right)$ ……………10 分

由 $A\subseteq B$，得 $\begin{cases}\dfrac{2}{3}m>0>-1\\-\dfrac{2}{3}m\le ln2-2\end{cases}$，

解得 $m\ge3-\dfrac{3}{2}\ln2$，

所以实数 m 的取值范围是 $\left[3-\dfrac{3}{2}\ln2,+\infty\right)$. ……………12 分