全等三角形

一.选择题

1. （2018•遂宁•4 分）下列说法正确的是（ ） A．有两条边和一个角对应相等的两个三角形全等 B．正方形既是轴对称图形又是中心对称图形

C．矩形的对角线互相垂直平分

D．六边形的内角和是 540°

【分析】直接利用全等三角形的判定以及矩形、菱形的性质和多边形内角和定理．

【解答】解：A.有两条边和一个角对应相等的两个三角形全等，错误，必须是两边及其夹角 分别对应相等的两个三角形全等；

B.正方形既是轴对称图形又是中心对称图形，正确； C.矩形的对角线相等且互相平分，故此选项错误； D.六边形的内角和是 720°，故此选项错误． 故选：B．

【点评】此题主要考查了全等三角形的判定以及矩形、菱形的性质和多边形内角和定理，正 确把握相关性质是解题关键．

2. （2018•贵州安顺•3 分） 如图，点，分别在线段AB，AC上，CD与BE相交于点，已知

AB=AC，现添加以下哪个条件仍不能判定△ABE≌△ACD（）

A. ∠B=∠C B.AD=AE C. BD=CE D. BE=CD

【答案】D

【解析】分析：欲使△ABE≌△ACD，已知 AB=AC，可根据全等三角形判定定理 AAS、SAS、ASA

添加条件，逐一证明即可． 详解：∵AB=AC，∠A 为公共角， A.如添加∠B=∠C，利用 ASA 即可证明△ABE≌△ACD； B.如添 AD=AE，利用 SAS 即可证明△ABE≌△ACD；

C.如添 BD=CE，等量关系可得 AD=AE，利用 SAS 即可证明△ABE≌△ACD；

D.如添 BE=CD，因为 SSA，不能证明△ABE≌△ACD，所以此选项不能作为添加的条件．

故选 D． 点睛：此题主要考查学生对全等三角形判定定理的理解和掌握，此类添加条件题，要求学生 应熟练掌握全等三角形的判定定理．

3. （2018·黑龙江龙东地区·3 分）如图，四边形 ABCD 中，AB=AD，AC=5，∠DAB=∠DCB=90°， 则四边形 ABCD 的面积为（ ）

A．15 B．12.5 C．14.5 D．17

【分析】过 A 作 AE⊥AC，交 CB 的延长线于 E，判定△ACD≌△AEB，即可得到△ACE 是等腰

直角三角形，四边形 ABCD 的面积与△ACE 的面积相等，根据 S△ACE=×5×5=12.5，即可得 出结论．

【解答】解：如图，过 A 作 AE⊥AC，交 CB 的延长线于 E，

∵∠DAB=∠DCB=90°，

∴∠D+∠ABC=180°=∠ABE+∠ABC，

∴∠D=∠ABE， 又∵∠DAB=∠CAE=90°，

∴∠CAD=∠EAB， 又∵AD=AB，

∴△ACD≌△AEB，

∴AC=AE，即△ACE 是等腰直角三角形，

∴四边形 ABCD 的面积与△ACE 的面积相等，

∵S△ACE=×5×5=12.5，

∴四边形 ABCD 的面积为 12.5， 故选：B．



【点评】本题主要考查了全等三角形的判定与性质，全等三角形的判定是结合全等三角形的 性质证明线段和角相等的重要工具．在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件．在

应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角，必要时添加适当辅助线构造

三角形．

4.（2018•贵州黔西南州•4 分）下列各图中 A.B.c 为三角形的边长，则甲、乙、丙三个三角 形和左侧△ABC 全等的是（ ）



A．甲和乙 B．乙和丙 C．甲和丙 D．只有丙

【分析】根据三角形全等的判定方法得出乙和丙与△ABC 全等，甲与△ABC 不全等．

【解答】解：乙和△ABC 全等；理由如下：

在△ABC 和图乙的三角形中，满足三角形全等的判定方法：SAS， 所以乙和△ABC 全等；

在△ABC 和图丙的三角形中，满足三角形全等的判定方法：AAS， 所以丙和△ABC 全等；

不能判定甲与△ABC 全等； 故选：B．

【点评】本题考查了三角形全等的判定方法，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、 ASA.AAS、HL．注意：AAA.SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有 边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角．

5．（2018 年湖南省娄底市）如图，△ABC 中，AB=AC，AD⊥BC 于 D 点，DE⊥AB 于点 E，BF

⊥AC 于点 F，DE=3cm，则 BF= 6 cm．

【分析】先利用 HL 证明 Rt△ADB≌Rt△ADC，得出 S△ABC=2S△ABD=2×AB•DE=AB•DE=3AB，又 S

△ABC=AC•BF，将 AC=AB 代入即可求出 BF．

【解答】解：在 Rt△ADB 与 Rt△ADC 中，

，

∴Rt△ADB≌Rt△ADC，

∴S△ABC=2S△ABD=2×AB•DE=AB•DE=3AB，

∵S△ABC=AC•BF，

∴AC•BF=3AB，

∵AC=AB，

∴BF=3，

∴BF=6． 故答案为 6．

【点评】本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，三角形的面积，利用面 积公式得出等式是解题的关键．

6. （2018•遂宁•4 分）下列说法正确的是（ ） A．有两条边和一个角对应相等的两个三角形全等 B．正方形既是轴对称图形又是中心对称图形

C．矩形的对角线互相垂直平分

D．六边形的内角和是 540°

【分析】直接利用全等三角形的判定以及矩形、菱形的性质和多边形内角和定理．

【解答】解：A.有两条边和一个角对应相等的两个三角形全等，错误，必须是两边及其夹角 分别对应相等的两个三角形全等；

B.正方形既是轴对称图形又是中心对称图形，正确； C.矩形的对角线相等且互相平分，故此选项错误；

D.六边形的内角和是 720°，故此选项错误．

故选：B．

【点评】此题主要考查了全等三角形的判定以及矩形、菱形的性质和多边形内角和定理，正 确把握相关性质是解题关键．

二.填空题

1. （2018•江苏宿迁•3 分）如图，在平面直角坐标系中，反比例函数（x＞0）与正比 例函数 y=kx、 （k＞1）的图象分别交于点 A.B，若∠AOB＝45°，则△AOB 的面积是

 .

【答案】2

【分析】作 BD⊥x 轴，AC⊥y 轴，OH⊥AB（如图），设 A（x1，y1），B（x2 ， y2），根据反比

例函数 k 的几何意义得 x1y1=x2y2=2；将反比例函数分别与 y=kx，y=联立，解得 x1=，x2=， 从而得 x1x2=2，所以 y1=x2， y2=x1， 根据 SAS 得△ACO≌△BDO，由全等三角形性质得 AO=BO，∠AOC=∠BOD，由垂直定义和已知条件得∠AOC=∠BOD=∠AOH=∠BOH=22.5°，根据 AAS 得△ACO≌△BDO≌△AHO≌△BHO，根据三角形面积公式得 S△ABO=S△AHO+S△BHO=S△ACO+S△BDO=x1y1+

x2y2=×2+×2=2.

【详解】如图：作 BD⊥x 轴，AC⊥y 轴，OH⊥AB，

设 A（x1，y1），B（x2 ， y2），

∵A.B 在反比例函数上，∴x1y1=x2y2=2，

∵，解得：x1=，

又∵，解得：x2=，∴x1x2= ×=2，∴y1=x2， y2=x1，即 OC=OD，AC=BD，

∵BD⊥x 轴，AC⊥y 轴，∴∠ACO=∠BDO=90°，∴△ACO≌△BDO（SAS），

∴AO=BO，∠AOC=∠BOD， 又∵∠AOB＝45°，OH⊥AB，∴∠AOC=∠BOD=∠AOH=∠BOH=22.5°，

∴△ACO≌△BDO≌△AHO≌△BHO，∴S△ABO=S△AHO+S△BHO=S△ACO+S△BDO=x1y1+ x2y2=×2+×2=2， 故答案为：2.

【点睛】本题考查了反比例函数系数 k 的几何意义，反比例函数与一次函数的交点问题，全 等三角形的判定与性质等，正确添加辅助线是解题的关键.

2. （2018•达州•3 分）如图，Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=2，BC=5，点 D 是 BC 边上一点且

CD=1，点 P 是线段 DB 上一动点，连接 AP，以 AP 为斜边在 AP 的下方作等腰 Rt△AOP．当 P

从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径长为 ．

【分析】过 O 点作 OE⊥CA 于 E，OF⊥BC 于 F，连接 CO，如图，易得四边形 OECF 为矩形，由

△AOP 为等腰直角三角形得到 OA=OP，∠AOP=90°，则可证明△OAE≌△OPF，所以 AE=PF，

OE=OF，根据角平分线的性质定理的逆定理得到 CO 平分∠ACP，从而可判断当 P 从点 D 出发

运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径为一条线段，接着证明 CE=（AC+CP），然后分别计算

P 点在 D 点和 B 点时 OC 的长，从而计算它们的差即可得到 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时， 点 O 的运动路径长．

【解答】解：过 O 点作 OE⊥CA 于 E，OF⊥BC 于 F，连接 CO，如图，

∵△AOP 为等腰直角三角形，

∴OA=OP，∠AOP=90°， 易得四边形 OECF 为矩形，

∴∠EOF=90°，CE=CF，

∴∠AOE=∠POF，

∴△OAE≌△OPF，

∴AE=PF，OE=OF，

∴CO 平分∠ACP，

∴当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径为一条线段，

∵AE=PF，

即 AC﹣CE=CF﹣CP， 而 CE=CF，

∴CE=（AC+CP），

∴OC= CE=（AC+CP），

当 AC=2，CP=CD=1 时，OC=×（2+1）=， 当 AC=2，CP=CB=5 时，OC=×（2+5）=，

∴当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径长=﹣=2．

故答案为 2．

【点评】本题考查了轨迹：灵活运用几何性质确定图形运动过程中不变的几何量，从而判定 轨迹的几何特征，然后进行几何计算．也考查了全等三角形的判定与性质．

3. （2018•湖州•4 分）在每个小正方形的边长为 1 的网格图形中，每个小正方形的顶点称 为格点．以顶点都是格点的正方形 ABCD 的边为斜边，向内作四个全等的直角三角形，使四 个直角顶点 E，F，G，H 都是格点，且四边形 EFGH 为正方形，我们把这样的图形称为格点弦 图．例如，在如图 1 所示的格点弦图中，正方形 ABCD 的边长为，此时正方形 EFGH 的而 积为 5．问：当格点弦图中的正方形 ABCD 的边长为时，正方形 EFGH 的面积的所有可能 值是 13 或 49 （不包括 5）．



【分析】当 DG=，CG=2时，满足 DG2+CG2=CD2，此时 HG=，可得正方形 EFGH 的面 积为 13．当 DG=8，CG=1 时，满足 DG2+CG2=CD2，此时 HG=7，可得正方形 EFGH 的面积为 49．

【解答】解：当 DG=，CG=2时，满足 DG2+CG2=CD2，此时 HG=，可得正方形 EFGH

的面积为 13．

当 DG=8，CG=1 时，满足 DG2+CG2=CD2，此时 HG=7，可得正方形 EFGH 的面积为 49． 故答案为 13 或 49．

【点评】本题考查作图﹣应用与设计、全等三角形的判定、勾股定理等知识，解题的关键是 学会利用数形结合的思想解决问题，属于中考填空题中的压轴题．

4. （2018•金华、丽水•4 分）如图，△ABC 的两条高 AD ， BE

相交于点 F ，请添加一个条件，使得△ADC≌△BEC（不添加

其他字母及辅助线），你添加的条件是 ．

【解析】【解答】从题中不难得出∠ADC=∠BEC=90°，而且∠ACD=∠BCE（公共角），则只需 要加一个对应边相等的条件即可，所以从“CA=CB，CE=CD，BE=AD”中添加一个即可。 故答案为：CA=CB，CE=CD（答案不唯一）。

【分析】判断两个三角形全等，判定定理有“AAS，SSS，SAS，ASA，HL”， 只需要添加一 个条件，那么就要从题目中找出其他两个条件， 再根据判定定理，缺什么就添什么条件。

5. （2018•达州•3 分）如图，Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=2，BC=5，点 D 是 BC 边上一点且 CD=1，点 P 是线段 DB 上一动点，连接 AP，以 AP 为斜边在 AP 的下方作等腰 Rt△AOP．当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径长为 ．

【分析】过 O 点作 OE⊥CA 于 E，OF⊥BC 于 F，连接 CO，如图，易得四边形 OECF 为矩形，由

△AOP 为等腰直角三角形得到 OA=OP，∠AOP=90°，则可证明△OAE≌△OPF，所以 AE=PF，

OE=OF，根据角平分线的性质定理的逆定理得到 CO 平分∠ACP，从而可判断当 P 从点 D 出发

运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径为一条线段，接着证明 CE=（AC+CP），然后分别计算

P 点在 D 点和 B 点时 OC 的长，从而计算它们的差即可得到 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时， 点 O 的运动路径长．

【解答】解：过 O 点作 OE⊥CA 于 E，OF⊥BC 于 F，连接 CO，如图，

∵△AOP 为等腰直角三角形，

∴OA=OP，∠AOP=90°， 易得四边形 OECF 为矩形，

∴∠EOF=90°，CE=CF，

∴∠AOE=∠POF，

∴△OAE≌△OPF，

∴AE=PF，OE=OF，

∴CO 平分∠ACP，

∴当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径为一条线段，

∵AE=PF，

即 AC﹣CE=CF﹣CP， 而 CE=CF，

∴CE= （AC+CP），

∴OC= CE=（AC+CP），

当 AC=2，CP=CD=1 时，OC=×（2+1）=， 当 AC=2，CP=CB=5 时，OC=×（2+5）=，∴当 P 从点 D 出发运动至点 B 停止时，点 O 的运动路径长=﹣=2．

【点评】本题考查了轨迹：灵活运用几何性质确定图形运动过程中不变的几何量，从而判定 轨迹的几何特征，然后进行几何计算．也考查了全等三角形的判定与性质．

三.解答题

1. （2018·湖北江汉油田、潜江市、天门市、仙桃市·10 分）问题：如图①，在 Rt△ABC 中，AB=AC，D 为 BC 边上一点（不与点 B，C 重合），将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 90°得到 AE，连接 EC，则线段 BC，DC，EC 之间满足的等量关系式为 BC=DC+EC ； 探索：如图②，在 Rt△ABC 与 Rt△ADE 中，AB=AC，AD=AE，将△ADE 绕点 A 旋转，使点 D 落 在 BC 边上，试探索线段 AD，BD，CD 之间满足的等量关系，并证明你的结论； 应用：如图③，在四边形 ABCD 中，∠ABC=∠ACB=∠ADC=45°．若 BD=9，CD=3，求 AD 的长．



【分析】（1）证明△BAD≌△CAE，根据全等三角形的性质解答；

（2）连接 CE，根据全等三角形的性质得到 BD=CE，∠ACE=∠B，得到∠DCE=90°，根据勾股 定理计算即可；

（3）作 AE⊥AD，使 AE=AD，连接 CE，DE，证明△BAD≌△CAE，得到 BD=CE=9，根据勾股定

理计算即可．

【解答】解：（1）BC=DC+EC， 理由如下：∵∠BAC=∠DAE=90°，

∴∠BAC﹣∠DAC=∠DAE﹣∠DAC，即∠BAD=∠CAE， 在△BAD 和△CAE 中，

，

∴△BAD≌△CAE，

∴BD=CE，

∴BC=BD+CD=EC+CD， 故答案为：BC=DC+EC；

（2）BD2+CD2=2AD2， 理由如下：连接 CE， 由（1）得，△BAD≌△CAE，

∴BD=CE，∠ACE=∠B，

∴∠DCE=90°，

∴CE2+CD2=ED2，

在 Rt△ADE 中，AD2+AE2=ED2，又 AD=AE，

∴BD2+CD2=2AD2；

（3）作 AE⊥AD，使 AE=AD，连接 CE，DE，

∵∠BAC+∠CAD=∠DAE+∠CAD， 即∠BAD=∠CAD′，

在△BAD 与△CAE 中，

，

∴△BAD≌△CAE（SAS），

∴BD=CE=9，

∵∠ADC=45°，∠EDA=45°，

∴∠EDC=90°，

∴DE==6，

∵∠DAE=90°，

∴AD=AE=DE=6．



【点评】本题考查的是全等三角形的判定和性质、勾股定理、以及旋转变换的性质，掌握全

等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键

2. （2018·湖南怀化·10 分）已知：如图，点 A．F，E．C 在同一直线上，AB∥DC，AB=CD，

∠B=∠D．

（1）求证：△ABE≌△CDF；

（2）若点 E，G 分别为线段 FC，FD 的中点，连接 EG，且 EG=5，求 AB 的长．



【分析】（1）根据平行线的性质得出∠A=∠C，进而利用全等三角形的判定证明即可；

（2）利用全等三角形的性质和中点的性质解答即可．

【解答】证明：（1）∵AB∥DC，

∴∠A=∠C，

在△ABE 与△CDF 中，

∴△ABE≌△CDF（ASA）；

（2）∵点 E，G 分别为线段 FC，FD 的中点，

∴ED=CD，

∵EG=5，

∴CD=10，

∵△ABE≌△CDF，

∴AB=CD=10．

【点评】此题考查全等三角形的判定和性质，关键是根据平行线的性质得出∠A=∠C．

3.（2018•江苏宿迁•8 分）如图，在□ABCD 中，点 E.F 分别在边 CB.AD 的延长线上，且 BE

＝DF，EF 分别与 AB.CD 交于点 G、H，求证：AG＝CH.

【答案】证明见解析.

【分析】根据平行四边形的性质得 AD∥BC，AD=BC，∠A=∠C，根据平行线的性质得∠E=∠F， 再结合已知条件可得 AF=CE，根据 ASA 得△CEH≌△AFG，根据全等三角形对应边相等得证.

【详解】∵在四边形 ABCD 是平行四边形，∴AD∥BC，AD=BC，∠A=∠C，

∴∠E=∠F， 又∵BE＝DF，∴AD+DF=CB+BE，即 AF=CE，

在△CEH 和△AFG 中， ，∴△CEH≌△AFG，∴CH=AG.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质等，熟练掌握相关知识是 解题的关键.

4.已知四边形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，给出下列四个论断：

①OA=OC，②AB=CD，③∠BAD=∠DCB，④AD∥BC． 请你从中选择两个论断作为条件，以“四边形 ABCD 为平行四边形”作为结论，完成下列各 题：

①构造一个真命题，画图并给出证明；

②构造一个假命题，举反例加以说明．

【分析】如果①②结合，那么这些线段所在的两个三角形是 SSA，不一定全等，那么就不能 得到相等的对边平行；如果②③结合，和①②结合的情况相同；如果①④结合，由对边平行 可得到两对内错角相等，那么 AD，BC 所在的三角形全等，也得到平行的对边也相等，那么 是平行四边形；最易举出反例的是②④，它有可能是等腰梯形．

【解答】解：（1）①④为论断时：

∵AD∥BC，∴∠DAC=∠BCA，∠ADB=∠DBC． 又∵OA=OC，∴△AOD≌△COB．∴AD=BC．∴四边形 ABCD 为平行四边形．

（2）②④为论断时，此时一组对边平行，另一组对边相等，可以构成等腰梯形．



【点评】本题主要考查平行四边形的判定，学生注意常用等腰梯形做反例来推翻不是平行四

边形的判断．

5.（2018•江苏无锡•8 分）如图，平行四边形 ABCD 中，E.F 分别是边 BC.AD 的中点，求证：

∠ABF=∠CDE．



【分析】根据平行四边形的性质以及全等三角形的性质即可求出答案．

【解答】解：在▱ABCD 中，AD=BC，∠A=∠C，

∵E.F 分别是边 BC.AD 的中点，∴AF=CE， 在△ABF 与△CDE 中，



∴△ABF≌△CDE（SAS）

∴∠ABF=∠CDE

【点评】本题考查平行四边形的性质，解题的关键是熟练运用平行四边形的性质以及全等三 角形，本题属于中等题型

6.（2018•江苏淮安•8 分）已知：如图，▱ABCD 的对角线 AC.BD 相交于点 O，过点 O 的直线 分别与 AD.BC 相交于点 E.F．求证：AE=CF．



【分析】利用平行四边形的性质得出 AO=CO，AD∥BC，进而得出∠EAC=∠FCO，再利用 ASA

求出△AOE≌△COF，即可得出答案．

【解答】证明：∵▱ABCD 的对角线 AC，BD 交于点 O，

∴AO=CO，AD∥BC，

∴∠EAC=∠FCO，

在△AOE 和△COF 中

，

∴△AOE≌△COF（ASA），

∴AE=CF．

【点评】此题主要考查了全等三角形的判定与性质以及平行四边形的性质，熟练掌握全等三 角形的判定方法是解题关键．

7.（2018•江苏苏州•6 分）如图，点 A，F，C，D 在一条直线上，AB∥DE，AB=DE，AF=DC．求 证：BC∥EF．

【分析】由全等三角形的性质 SAS 判定△ABC≌△DEF，则对应角∠ACB=∠DFE，故证得结论．

【解答】证明：∵AB∥DE，∴∠A=∠D，

∵AF=DC，∴AC=DF．

∴在△ABC 与△DEF 中，，∴△ABC≌△DEF（SAS），∴∠ACB=∠DFE，∴BC∥EF．

【点评】本题考查全等三角形的判定和性质、平行线的性质等知识，解题的关键是正确寻找 全等三角形全等的条件，属于中考常考题型．

6.（2018•江苏宿迁•12 分）如图，在边长为 1 的正方形 ABCD 中，动点 E.F 分别在边 AB.CD 上，将正方形 ABCD 沿直线 EF 折叠，使点 B 的对应点 M 始终落在边 AD 上（点 M 不与点 A.D 重合），点 C 落在点 N 处，MN 与 CD 交于点 P，设 BE=x，



（1）当AM=  时，求 x 的值；

（2）随着点 M 在边 AD 上位置的变化，△PDM 的周长是否发生变化？如变化，请说明理由； 如不变，请求出该定值；

（3）设四边形 BEFC 的面积为 S，求 S 与 x 之间的函数表达式，并求出 S 的最小值.

【分析】（1）由折叠性质可知 BE=ME=x，结合已知条件知 AE=1-x，在 Rt△AME 中，根据勾股

定理得（1-x）2+ =x2 ， 解得：x= .

（2）△PDM 的周长不会发生变化，且为定值 2.连接 BM、BP，过点 B 作 BH⊥MN，根据折叠性 质知 BE=ME，由等边对等角得∠EBM=∠EMB，由等角的余角相等得∠MBC=∠BMN，由全等三角 形的判定 AAS 得 Rt△ABM≌Rt△HBM，根据全等三角形的性质得 AM=HM，AB=HB=BC，又根据全 等三角形的判定 HL 得 Rt△BHP≌Rt△BCP，根据全等三角形的性质得 HP=CP，由三角形周长 和等量代换即可得出△PDM 周长为定值 2.

（3）过 F 作 FQ⊥AB，连接 BM，由折叠性质可知：∠BEF=∠MEF,BM⊥EF，由等角的余角相等 得∠EBM=∠EMB=∠QFE，由全等三角形的判定 ASA 得 Rt△ABM≌Rt△QFE，据全等三角形的性 质得 AM=QE；设 AM 长为 a，在 Rt△AEM 中，根据勾股定理得（1-x）2+a2=x2,从而得 AM=QE=

BQ=CF=x- ，根据梯形得面积公式代入即可得出 S 与 x 的函数关系式；又由（1-x）

2+a2=x2,得 x= =AM=BE，BQ=CF= -a（0<a<1），代入梯形面积公式即可转为关于 a

的二次函数，配方从而求得 S 的最小值.

【详解】解：（1）由折叠性质可知：BE=ME=x，∵正方形 ABCD 边长为 1，∴AE=1-x，

在 Rt△AME 中，∴AE2+AM2=ME2 ， 即（1-x）2+ =x2 ， 解得：x= .

（2）△PDM 的周长不会发生变化，且为定值 2.

连接 BM、BP，过点 B 作 BH⊥MN，

∵BE=ME，∴∠EBM=∠EMB，

又∵∠EBC=∠EMN=90°，即∠EBM+∠MBC=∠EMB+∠BMN=90°，∴∠MBC=∠BMN， 又∵正方形 ABCD，∴AD∥BC，AB=BC，∴∠AMB=∠MBC=∠BMN，

在 Rt△ABM 和 Rt△HBM 中，

∵ ,∴Rt△ABM≌Rt△HBM（AAS），∴AM=HM，AB=HB=BC， 在 Rt△BHP 和 Rt△BCP 中，

∵ , ∴Rt△BHP≌Rt△BCP（HL），∴HP=CP， 又∵C△PDM=MD+DP+MP=MD+DP+MH+HP=MD+DP+AM+PC=AD+DC=2.

∴△PDM 的周长不会发生变化，且为定值 2.

（3）解：过 F 作 FQ⊥AB，连接 BM，

由折叠性质可知：∠BEF=∠MEF,BM⊥EF，

∴∠EBM+∠BEF=∠EMB+∠MEF=∠QFE+∠BEF=90°,∴∠EBM=∠EMB=∠QFE， 在 Rt△ABM 和 Rt△QFE 中，

∵ ,∴Rt△ABM≌Rt△QFE（ASA），∴AM=QE， 设 AM 长为 a，在 Rt△AEM 中，∴AE2+AM2=EM2,即（1-x）2+a2=x2,

∴AM=QE= ,∴BQ=CF=x- ，

∴S=（CF+BE）×BC =（x-+x）×1=（2x-）,

又∵（1-x）2+a2=x2, ∴x==AM=BE，BQ=CF=-a，

∴S= （-a+ ）×1= （a2-a+1）= （a- ）2+，

∵0<a<1，∴当 a= 时，S 最小值= .

【点睛】二次函数的最值，全等三角形的判定与性质，勾股定理，正方形的性质，翻折变换

（折叠问题）.

8.（2018•江苏苏州•10 分）如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，AD 垂直于过点 C 的切 线，垂足为 D，CE 垂直 AB，垂足为 E．延长 DA 交⊙O 于点 F，连接 FC，FC 与 AB 相交于点 G， 连接 OC．

（1）求证：CD=CE；

（2）若 AE=GE，求证：△CEO 是等腰直角三角形．

【分析】（1）连接 AC，根据切线的性质和已知得：AD∥OC，得∠DAC=∠ACO，根据 AAS 证明

△CDA≌△CEA（AAS），可得结论；

（2）介绍两种证法：

证法一：根据△CDA≌△CEA，得∠DCA=∠ECA，由等腰三角形三线合一得：∠F=∠ACE=∠DCA=

∠ECG，在直角三角形中得：∠F=∠DCA=∠ACE=∠ECG=22.5°，可得结论； 证法二：设∠F=x，则∠AOC=2∠F=2x，根据平角的定义得：∠DAC+∠EAC+∠OAF=180°，则

3x+3x+2x=180，可得结论．

【解答】证明：（1）连接 AC，

∵CD 是⊙O 的切线，∴OC⊥CD，

∵AD⊥CD，∴∠DCO=∠D=90°，∴AD∥OC，∴∠DAC=∠ACO，

∵OC=OA，∴∠CAO=∠ACO，∴∠DAC=∠CAO，

∵CE⊥AB，∴∠CEA=90°， 在△CDA 和△CEA 中，

∵，

∴△CDA≌△CEA（AAS），

∴CD=CE；

（2）证法一：连接 BC，

∵△CDA≌△CEA，∴∠DCA=∠ECA，

∵CE⊥AG，AE=EG，∴CA=CG，∴∠ECA=∠ECG，

∵AB 是⊙O 的直径，∴∠ACB=90°，

∵CE⊥AB，∴∠ACE=∠B，

∵∠B=∠F，∴∠F=∠ACE=∠DCA=∠ECG，

∵∠D=90°，∴∠DCF+∠F=90°，∴∠F=∠DCA=∠ACE=∠ECG=22.5°，

∴∠AOC=2∠F=45°，

∴△CEO 是等腰直角三角形； 证法二：设∠F=x，则∠AOC=2∠F=2x，

∵AD∥OC，∴∠OAF=∠AOC=2x，∴∠CGA=∠OAF+∠F=3x，

∵CE⊥AG，AE=EG，∴CA=CG，∴∠EAC=∠CGA，

∵CE⊥AG，AE=EG，∴CA=CG，∴∠EAC=∠CGA，∴∠DAC=∠EAC=∠CGA=3x，

∵∠DAC+∠EAC+∠OAF=180°，∴3x+3x+2x=180，x=22.5°，∴∠AOC=2x=45°，

∴△CEO 是等腰直角三角形．

【点评】此题考查了切线的性质、全等三角形的判定与性质、圆周角定理、勾股定理、三角 形内角和定理以及等腰三角形和等腰直角三角形的判定与性质等知识．此题难度适中，本题 相等的角较多，注意各角之间的关系，注意掌握数形结合思想的应用．

9. （2018•杭州•12 分）23.如图，在正方形 ABCD 中，点 G 在边 BC 上（不与点 B，C 重合），

连接 AG，作 DE⊥AG，于点 E，BF⊥AG 于点 F，设 。

（1）求证：AE=BF；

（2）连接 BE，DF，设∠EDF=，∠EBF=求证：tanα= k tanβ

（3）设线段 AG 与对角线 BD 交于点 H，△AHD 和四边形 CDHG 的面积分别为 S1 和 S2 ， 求的最大值．

【答案】（1）因为四边形 ABCD 是正方形，所以∠BAF+∠EAD=90°，又因为 DE⊥AG，所以∠

EAD+∠ADE=90°， 所以∠ADE=∠BAF， 又因为 BF⊥AG， 所以∠DEA=∠AFB=90°， 又因为 AD=AB

所以 Rt△DAE≌Rt△ABF， 所以 AE=BF

（2）易知 Rt△BFG∽Rt△DEA，所以在 Rt△DEF 和 Rt△BEF 中，tanα = ，

tanβ = 

所以 ktanβ = = = = =tanα

所以tanα= k tanβ

（3）设正方形 ABCD 的边长为 1，则 BG=k，所以△ABG 的面积等于 k 因为△ABD 的面积等 于 

又因为=k，所以 S1= 

所以 S2=1-k- = 

所以=-k2+k+1= ≤

因为 0＜k＜1，所以当 k= ，即点 G 为 BC 中点时， 有最大值 

【考点】全等三角形的判定与性质，正方形的性质，相似三角形的判定与性质，解直角三角 形

【解析】【分析】（1）根据正方形的性质及垂直的定义，可证得∠ADE=∠BAF，∠ADE=∠BAF

及 AD=AB，利用全等三角形的判定，可证得 Rt△DAE≌Rt△ABF，从而可证得结论。

（2）根据已知易证 Rt△BFG∽Rt△DEA，得出对应边成比例，再在 Rt△DEF 和 Rt△BEF 中， 根据锐角三角函数的定义，分别表示出 tanα 、tanβ ，从而可推出 tanα =tanβ 。

（3）设正方形 ABCD 的边长为 1，则 BG=k，分别表示出△ABG、△ABD 的面积，再根据

=k,求出 S1 及 S2 ， 再求出 S1 与 S2 之比与 k 的函数解析式，求出顶点坐标，然

后根据 k 的取值范围，即可求解。

10．（2018•临安•6 分）已知：如图，E.F 是平行四边形 ABCD 的对角线 AC 上的两点，AE=CF． 求证：（1）△ADF≌△CBE；

（2）EB∥DF．



【分析】（1）要证△ADF≌△CBE，因为 AE=CF，则两边同时加上 EF，得到 AF=CE，又因为 ABCD

是平行四边形，得出 AD=CB，∠DAF=∠BCE，从而根据 SAS 推出两三角形全等；

（2）由全等可得到∠DFA=∠BEC，所以得到 DF∥EB．

【解答】证明：（1）∵AE=CF，

∴AE+EF=CF+FE，即 AF=CE． 又 ABCD 是平行四边形，

∴AD=CB，AD∥BC．

∴∠DAF=∠BCE． 在△ADF 与△CBE 中

，

∴△ADF≌△CBE（SAS）．

（2）∵△ADF≌△CBE，

∴∠DFA=∠BEC．

∴DF∥EB．

【点评】本题考查三角形全等的判定方法，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、

AAS、ASA.HL．

注意：AAA.SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有 两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角．

11. （2018•嘉兴•6 分）已知：在△ABC 中，AB=AC，D 为 AC 的中点，DE⊥AB，DF⊥BC，垂 足分别为点 E，F，且 DE=DF．求证：△ABC 是等边三角形．

【答案】证明见解析.

【解析】分析：由等腰三角形的性质得到∠B=∠C．再用 HL 证明 Rt△ADE≌Rt△CDF，得到

∠A=∠C，从而得到∠A=∠B=∠C，即可得到结论． 详解：∵AB=AC， ∴∠B=∠C．

∵DE⊥AB， DF⊥BC，∴∠DEA=∠DFC=Rt∠．

∵D 为的 AC 中点，∴DA=DC． 又∵DE=DF，∴RtΔ AED≌RtΔ CDF(HL)，

∴∠A=∠C，

∴∠A=∠B=∠C，

∴Δ ABC 是等边三角形． 点睛：本题考查了等边三角形的判定、等腰三角形的性质以及直角三角形全等的判定 与性质．解题的关键是证明∠A=∠C．

12. （2018•广西桂林•8 分） 如图，点 A.D.C.F 在同一条直线上，AD=CF，AB=DE，BC=EF. (1)求证：Δ ABC≌△DEF；

(2)若∠A=55°，∠B=88°，求∠F 的度数.

【答案】（1）证明见解析；（2）37°

【解析】分析：（1）先证明 AC=DF，再运用 SSS 证明△ABC≌△DEF；

（2）根据三角形内角和定理可求∠ACB=37°，由（1）知∠F=∠ACB，从而可得结论.

解析：（1）∵AC=AD+DC， DF=DC+CF，且 AD=CF

∴AC=DF

在△ABC 和△DEF 中，



∴△ABC≌△DEF（SSS）

（2）由（1）可知，∠F=∠ACB

∵∠A=55°，∠B=88°

∴∠ACB=180°－（∠A+∠B）=180°－（55°+88°）=37°

∴∠F=∠ACB=37° 点睛：本题考查三角形全等的判定方法和全等三角形的性质，判定两个三角形全等的一般方 法有：SSS、SAS、ASA.AAS、HL．

注意：AAA.SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有

两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角．

13. （2018·黑龙江哈尔滨·8 分）已知：在四边形 ABCD 中，对角线 AC.BD 相交于点 E，且

AC⊥BD，作 BF⊥CD，垂足为点 F，BF 与 AC 交于点 C，∠BGE=∠ADE．

（1）如图 1，求证：AD=CD；

（2）如图 2，BH 是△ABE 的中线，若 AE=2DE，DE=EG，在不添加任何辅助线的情况下，请直 接写出图 2 中四个三角形，使写出的每个三角形的面积都等于△ADE 面积的 2 倍．

【分析】（1）由 AC⊥BD.BF⊥CD 知∠ADE+∠DAE=∠CGF+∠GCF，根据∠BGE=∠ADE=∠CGF 得 出∠DAE=∠GCF 即可得；

（2）设 DE=a，先得出 AE=2DE=2A.EG=DE=A.AH=HE=A.CE=AE=2a，据此知 S△ACE =2a2=2S ，证

△ADE≌△BGE 得 BE=AE=2a，再分别求出 S△ABE.S△ACE.S△BHG，从而得出答案．

【解答】解：（1）∵∠BGE=∠ADE，∠BGE=∠CGF，

∴∠ADE=∠CGF，

∵AC⊥BD.BF⊥CD，

∴∠ADE+∠DAE=∠CGF+∠GCF，

∴∠DAE=∠GCF，

∴AD=CD；

（2）设 DE=a，

则 AE=2DE=2a，EG=DE=a，

∴S△ADE =AE•DE=•2a•a=a2，

∵BH 是△ABE 的中线，

∴AH=HE=a，

∵AD=CD.AC⊥BD，

∴CE=AE=2a，

则 S△ACD =AC•DE=•（2a+2a）•a=2a2=2S ；在△ADE 和△BGE 中，

∵

∴△ADE≌△BGE（ASA），

∴BE=AE=2a，

S△BCE =CE•BE=•（2a）•2a=2a2，

S△BHG =HG•BE=•（a+a）•2a=2a2，

综上，面积等于△ADE 面积的 2 倍的三角形有△ACD.△ABE.△BCE.△BHG．

【点评】本题主要考查全等三角形的判定与性质，解题的关键是掌握等腰三角形的判定与性 质及全等三角形的判定与性质．

14. （2018·黑龙江龙东地区·8 分）如图，在 Rt△BCD 中，∠CBD=90°，BC=BD，点 A 在 CB 的延长线上，且 BA=BC，点 E 在直线 BD 上移动，过点 E 作射线 EF⊥EA，交 CD 所在直线 于点 F．

（1）当点 E 在线段 BD 上移动时，如图（1）所示，求证：BC﹣DE=DF．

（2）当点 E 在直线 BD 上移动时，如图（2）、图（3）所示，线段 BC.DE 与 DF 又有怎样的数 量关系？请直接写出你的猜想，不需证明．

【分析】（1）如图 1 中，在 BA 上截取 BH，使得 BH=BE．构造全等三角形即可解决问题；

（2）如图 2 中，在 BC 上截取 BH=BE，同法可证：DF=EH．可得：DE﹣BC=DF．如图 3 中， 在 BA 上截取 BH，使得 BH=BE．同法可证：DF=HE，可得 BC+DE=DF．

【解答】（1）证明：如图 1 中，在 BA 上截取 BH，使得 BH=BE．

∵BC=AB=BD，BE=BH，

∴AH=ED，

∵∠AEF=∠ABE=90°，

∴∠AEB+∠FED=90°，∠AEB+∠BAE=90°，

∴∠FED=∠HAE，

∵∠BHE=∠CDB=45°，

∴∠AHE=∠EDF=135°，

∴△AHE≌△EDF，

∴HE=DF，

∴BC﹣DE=BD﹣DE=BE=EH=DF．

∴BC﹣DE=DF．

（2）解：如图 2 中，在 BC 上截取 BH=BE，同法可证：DF=EH． 可得：DE﹣BC=DF．

如图 3 中，在 BA 上截取 BH，使得 BH=BE．同法可证：DF=HE， 可得 BC+DE=DF．

【点评】本题考查全等三角形的判定和性质、等腰直角三角形的性质等知识，解题的关键是

学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题．

15. （8 分）如图，点 B.F、C.E 在一条直线上，FB=CE，AB∥ED，AC∥FD，AD 交 BE 于 O． 求证：AD 与 BE 互相平分．

【分析】连接 BD，AE，判定△ABC≌△DEF（ASA），可得 AB=DE，依据 AB∥DE，即可得出四 边形 ABDE 是平行四边形，进而得到 AD 与 BE 互相平分．

【解答】证明：如图，连接 BD，AE，

∵FB=CE，

∴BC=EF， 又∵AB∥ED，AC∥FD，

∴∠ABC=∠DEF，∠ACB=∠DFE， 在△ABC 和△DEF 中，

，

∴△ABC≌△DEF（ASA），

∴AB=DE， 又∵AB∥DE，

∴四边形 ABDE 是平行四边形，

∴AD 与 BE 互相平分．

【点评】本题主要考查了平行四边形的判定与性质，解决问题的关键是依据全等三角形的对

应边相等得出结论．

16.（2018•福建 A 卷•8 分）如图，▱ABCD 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AD，

BC 分别相交于点 E，F．求证：OE=OF．



【分析】由四边形 ABCD 是平行四边形，可得 OA=OC，AD∥BC，继而可证得△AOE≌△COF（ASA）， 则可证得结论．

【解答】证明：∵四边形 ABCD 是平行四边形，

∴OA=OC，AD∥BC，

∴∠OAE=∠OCF， 在△OAE 和△OCF 中，

，

∴△AOE≌△COF（ASA），

∴OE=OF．

【点评】此题考查了平行四边形的性质以及全等三角形的判定与性质．此题难度适中，注意 掌握数形结合思想的应用．

17.（2018•贵州铜仁•10 分）已知：如图，点 A.D.C.B 在同一条直线上，AD=BC，AE=BF，CE=DF， 求证：AE∥BF．

【分析】可证明△ACE≌△BDF，得出∠A=∠B，即可得出 AE∥BF；

【解答】证明：∵AD=BC，∴AC=BD，

在△ACE 和△BDF 中， ，

∴△ACE≌△BDF（SSS）

∴∠A=∠B，

∴AE∥BF；