2018全国高考模拟卷六

本试卷分为两卷，第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题，满分 150 分，考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷（选择题　共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\left\{x\mid \frac{x}{x-2}\leqslant 0\right\}$，$B=\{x\mid \log_2(x-1)<1\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$（　　）

A. $\{x\mid 2<x<3\}$　　B. $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

C. $\{x\mid 2<x<3$ 或 $x<0\}$　　D. $\{x\mid 2\leqslant x<3$ 或 $x<0\}$

2. 若复数 z 满足 $z(1+i)=2-i$（i 为虚数单位），则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 命题 p："$a=\sqrt{2}$是直线 $y=x$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 相切的充分不必要条件"；命题 q："$am^2<bm^2$ 是 $a<b$ 的必要不充分条件"。则下列命题是真命题的是（　　）

A. $p\wedge q$　　B. $(\neg p)\wedge q$

C. $p\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

4. 下列函数中，与函数 $y=-x^3$ 的奇偶性、单调性都相同的是（　　）

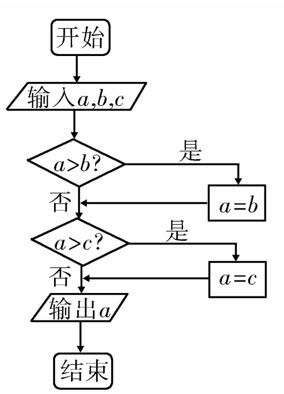
A. $y=-\tan x$　　B. $y=2^x-\frac{1}{2^x}$

C. $y=\frac{1}{x}$　　D. $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

5. 将函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位后，得到的函数图象关于 y 轴对称，则 φ 的最小值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{12}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

6. 已知 $a=2^{0.3}$，$b=3^{0.2}$，$c=7^{0.1}$，执行下图程序框图输出的结果为（　　）



A. $2^{0.3}$　　B. $3^{0.2}$

C. $7^{0.1}$　　D. 以上都不对

7. 给出下列命题：

①$y=\frac{2}{x}$是幂函数；

②函数 $y=\ln x-\frac{1}{x-1}$有 1 个零点；

③已知向量 $\boldsymbol{a}=(2k-3,-6)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角，则 k 的取值范围为 $(-\infty,3)$；

④函数 $y=\sin x+\frac{2}{\sin x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2}]$的最小值为 $2\sqrt{2}$. 其中真命题的个数是（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调，且函数 $y=f(x-2)$ 关于 $x=1$ 对称，若数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，且 $f(a_{50})=f(a_{51})$，则 $\{a_n\}$ 的前 100 项之和为（　　）

A. 0　　B. -50

B. -100　　D. -200

9. 已知椭圆的左、右焦点分别为 F_1、F_2，A 为椭圆上一点，且 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，延长 AF_2 交椭圆于点 B，$|AB|:|AF_1|=3:4$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

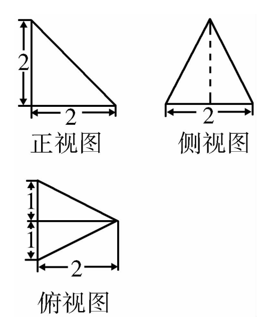
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

10. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+4\geqslant 0\\ x+2y\geqslant 0\\ x\leqslant -1\end{cases}$，若 $2x+y+k\leqslant 0$ 恒成立，则实数 k 取最大值时，直线 $2x+y+k=0$ 被圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=25$ 截得的弦长为（　　）

A. 5　　B. $4\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}$

11. 一个几何体的三视图如下图所示，则该几何体的外接球表面积为（　　）



A. $\frac{17\pi}{2}$

B. 34π

C. $\frac{17\sqrt{34}\pi}{24}$

D. 8π

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x-2|, x\geqslant 0\\ 1-\frac{\ln(-x)}{x}, x<0\end{cases}$，$g(x)=k(x+\frac{4}{3})$（$k\in\mathbf{R}$），若存在唯一的整数 x，使得 $\frac{f(x)-g(x)}{x}>0$，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{3}{13},\frac{3}{5}\right)\cup(3,+\infty)$　　B. $\left[\frac{3}{13},\frac{3}{5}\right)\cup[3,+\infty)$

C. $\left[\frac{3}{7},\frac{3}{5}\right)\cup(3,+\infty)$　　D. $\left[\frac{3}{7},\frac{3}{5}\right)\cup[3,+\infty)$

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

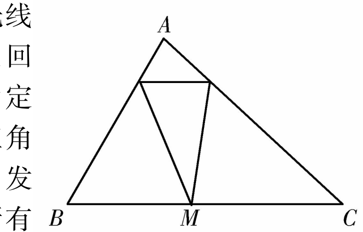
二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知平面直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=(-4,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影是________.

14. 在 $[-4,4]$ 上任取一个数 a，则使"双曲线 $\frac{x^2}{a^2-1}-\frac{y^2}{a+5}=1$ 的离心率大于$\sqrt{2}$"的概率是________.

15. 已知 $n=\int_{-2}^{2}|x^2-2x|\mathrm{d}x$，则 $(x^2+2x-y)^n$ 展开式中 x^5y^5 的系数为________.

16. 如图，由 M 点发出的光线经过 AB，AC 反射后又回到点 M，其中光线所确定的三角形称为"光线三角形". 法国数学家费马发现：在锐角三角形的所有内接三角形中，由高线垂足点确定的"光线三角形"周长最小. 已知 $\triangle ABC$ 中，$A=45°$，$B=60°$，$AB=2$，则 $\triangle ABC$ 内接三角形周长的最小值为________.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

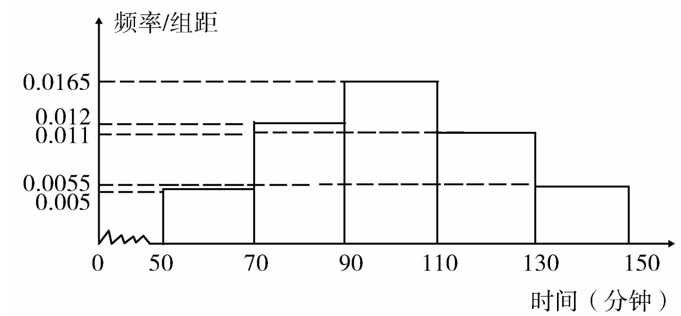
设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$.

（Ⅰ）求数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n；

（Ⅱ）等比数列 $\{b_n\}$ 中，$b_2=a_1$，$b_5=8$. 令 $c_n=\frac{n-1}{b_{2n}}+\frac{1}{a_na_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 B_n，证明 $B_n<1$.

18.（本小题满分 12 分）

为了解某校高二学生寒假日平均数学学习时间情况，现随机抽取 500 名学生进行调查，由调查结果得如下频率分布直方图.



（Ⅰ）求这 500 名学生寒假日平均数学学习时间的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2（同一组中的数据用该组的中点值做代表）；

（Ⅱ）由直方图认为该校高二学生寒假日平均数学学习时间 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2.

（i）利用该正态分布，求 $P(100<X\leqslant 122.8)$；

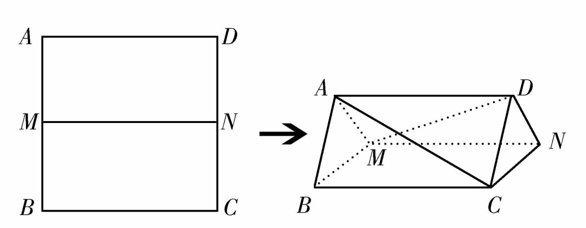
（ii）若随机从该校高二学生中抽取 200 名学生，记 ξ 表示这 200 名学生寒假日平均数学学习时间应位于 $(77.2,122.8)$ 的人数，利用（i）的结果，求 $E(\xi)$.

附：$\sqrt{130}\approx 11.4$

若 $x\sim N(u,\sigma^2)$，则 $P(u-\sigma<x\leqslant u+\sigma)=0.6826$，$P(u-2\sigma<x\leqslant u+2\sigma)=0.9544$

19.(本小题满分12分)

如图,正方形 $ABCD$ 的边长为8,M,N 分别为 AB,CD 的中点,将正方形 $ABCD$ 沿着线段 MN 折起,使得 $\angle AMB=60°$.



(Ⅰ)求直线 AM 与平面 CDM 所成角的正弦值;

(Ⅱ)设 O 为 BM 的中点,点 P,Q 分别为线段 AO,DM 上一点,且 $PQ\parallel$ 平面 $BCNM$,求线段 PQ 长度的最小值.

20.(本小题满分12分)

已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$ 的离心率等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$,抛物线 $C_2:x^2=2py(p>0)$ 的焦点在椭圆的顶点上.

(Ⅰ)求抛物线 C_2 的方程;

(Ⅱ)设抛物线 C_2 的准线上有动点 P,过 P 向抛物线 C_2 作两条切线,切点分别为 A、B,已知 O 为坐标原点,求 $\triangle POA$ 与 $\triangle POB$ 面积之和的最小值.

21.(本小题满分12分)

设函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$,其中 a 为实数.

(Ⅰ)当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时,求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值;

(Ⅱ)求证:$\left(\frac{2017}{2016}\right)^{2016.5}>\mathrm{e}$.

请考生在第22、23两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22.(本小题满分10分)选修4—4:坐标系与参数方程

已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=1$,以极点为原点,极轴为 x 轴的非负半轴建立平面直角坐标系,设曲线 C 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{3x}{2}+1\\ y'=\frac{3}{2}y-1\end{cases}$,得到曲线 C',直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\frac{1}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$,($t$ 为参数).

(Ⅰ)求 C' 的直角坐标方程和 l 的普通方程;

(Ⅱ)若直线 l 与曲线 C' 交于点 $A,B,P(2,1)$,求 $|PA|+|PB|$.

23.(本小题满分10分)选修4—5:不等式选讲

已知实数 $a,b>0$.

(Ⅰ)求证:$\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{b}\geqslant\frac{(c+d)^2}{a+b}$;

(Ⅱ)求函数 $y=\frac{3}{x}+\frac{4}{1-3x}\left(x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\right)$ 的最小值.

2018全国高考模拟卷六

1. B 【点拨】本题考查不等式的解法,集合的运算.

【解析】$A=\{x|\frac{x}{x-2}\leqslant 0\}=\{x|0\leqslant x<2\}$,$B=\{x|\log_2(x-1)<1\}=\{x|1<x<3\}$,$(\complement_R A)\cap B=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 2\}\cap\{x|1<x<3\}=\{x|2\leqslant x<3\}$

2. A 【点拨】本题考查复数的运算及复平面概念.

【解析】$z(1+i)=2-i\Rightarrow z(1+i)(1-i)=(2-i)(1-i)$

$\Rightarrow 2z=1-3i$

$\Rightarrow z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

$\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ $\bar{z}$ 对应的点在第一象限.

3. C 【点拨】本题考查充分条件必要条件,命题与逻辑联结词,真值表.

【解析】$p:a=\sqrt{2}$是直线 $y=x$ 与圆$(x-a)^2+y^2=1$ 相切的充分必要条件.

p 是真命题 $\neg p$ 是假命题

$q:am^2<bm^2$ 是 $a<b$ 的必要不充分条件.

$am^2<bm^2\Rightarrow a<b$,但 $a<b\nRightarrow am^2<bm^2$.

$\therefore q$ 是假命题,$\neg q$ 是真命题

$\therefore p\wedge(\neg q)$是真命题

4. D 【点拨】本题考查函数的奇偶性单调性.

【解析】$y=-x^3$ 是奇函数,在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

$y=-\tan x$ 是奇函数,在$[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$是减函数.

$y=2^x-\frac{1}{2^x}$是奇函数,在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

$y=\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调递减.

$y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x})$是奇函数,在$(-\infty,+\infty)$是减函数.

$\therefore$ 选 D.

5. D 【点拨】本题考查正弦型函数的图象变换及对称性.

【解析】$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$个单位得到函数 $g(x)=\sin[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{3}]=\sin(2x+2\varphi-\frac{\pi}{3})$.

因为 $g(x)$的图象关于 y 轴对称.$\therefore g(0)=\sin(2\varphi-\frac{\pi}{3})=\pm 1$

$\therefore 2\varphi-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(\pi\in Z)$

$\varphi=\frac{1}{2}(k\pi+\frac{5\pi}{6})$,$\because\varphi>0$,$\therefore$ 当 $k=0$ 时,$\varphi=\frac{5\pi}{12}$.

6. C 【点拨】本题考查幂函数和指数函数的单调性、程序框图.

【解析】$a=2^{0.3}>0,a^{10}=2^3=8$

$b=3^{0.2}>0,b^{10}=3^2=9$

$c=7^{0.1}>0,c^{10}=7$

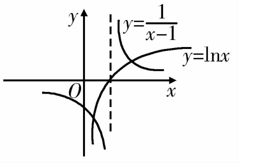
$b^{10}>a^{10}>c^{10}$,$\therefore b>a>c$

由程序框图知,输出的结果是 $\min\{a,b,c\}=c$.

7. A 【点拨】本题考查命题真假的判断.

【解析】①$y=\frac{2}{x}=2x^{-1}$,系数不是 1,不是幂函数.$\therefore$ ①是假命题.

②$y=\ln x-\frac{1}{x-1}=0$,即 $\ln x=\frac{1}{x-1}$,如图 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{1}{x-1}$的图象有两个交点,$\therefore y=\ln x-\frac{1}{x-1}$有两个零点,$\therefore$ ②是假命题.



③$\boldsymbol{a}=(2k-3,-6)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4k-6+(-6)=4k-12$,令 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,得 $4k-12<0,k<3$.

但,令$\frac{2k-3}{2}=\frac{-6}{1}\Rightarrow 2k-3=-12\Rightarrow k=-\frac{9}{2}$,

当 $k=-\frac{9}{2}$时,$k\in(-\infty,3)$,所以是 $\boldsymbol{a}$;$\boldsymbol{b}$ 的方向相反,夹角为平角,而不是钝角,$\therefore$ ③是假命题.

④$\sin x+\frac{2}{\sin x}$ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\geqslant 2\sqrt{\sin x\cdot\frac{2}{\sin x}}=2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\sin x=\frac{2}{\sin x}$即 $\sin^2x=2$,$\sin x=\pm\sqrt{2}$时,取等号,而$\sin x|\leqslant 1$,$\therefore\sin x\neq\pm\sqrt{2}$,$\therefore$ ④是假命题. 故真命题的个数是 0.

8. C 【点拨】本题考查函数的单调性，函数图象的平移变换及对称性，等差数列的性质及前 n 项和.

【解析】$y=f(x-2)$ 关于 $x=1$ 对称，$\therefore y=f(x)$ 关于 $x=-1$ 对称.

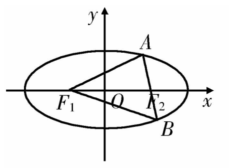
即 $f(-1-x)=f(-1+x)$，又 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列.

$f(a_{50})=f(a_{51})\Rightarrow a_{50}+a_{51}=-2$

$S_{100}=\dfrac{100(a_1+a_{100})}{2}=50(a_{50}+a_{51})=50\times(-2)=-100.$

9. B 【点拨】本题考查椭圆的定义及基本量的计算.

【解析】$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，$\therefore \angle F_1AF_2=90°$，$|AB|:|AF_1|=3:4$，



设 $|AB|=3t$，则 $AF_1=4t(t>0)$

在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1AB$ 中 $|BF_1|=5t$，

$\because$ A 为椭圆上一点，B 为椭圆上一点.

$\therefore |AF_1|+|AF_2|=2a \quad |BF_1|+|BF_2|=2a$，两式相加 $|AF_1|+|BF_1|+|AB|=4a \quad 4t+5t+3t=4a$，

$\therefore t=\dfrac{a}{3}$

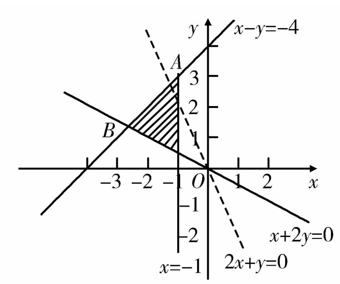
$\therefore |AF_1|=\dfrac{4}{3}a.\ |AF_2|=2a-|AF_1|=\dfrac{2}{3}a$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2+|AF_2|^2}=\sqrt{(\dfrac{4}{3a})^2+(\dfrac{2}{3}a)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}a$. 即 $2c=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}a$，即 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

10. B 【点拨】本题考查线性规划，直线与圆相交而截得弦长的计算.

【解析】x,y 满足

$\begin{cases}x-y+4\geqslant 0\\x+2y\geqslant 0\\x\leqslant -1\end{cases}$，画出可行域如图阴影部分所示，



目标函数 $z=2x+y$

由 $\begin{cases}x-y+4=0\\x=-1\end{cases}$ 得交点 $A(-1,3)$ 由 $\begin{cases}x-y+4\leqslant 0\\x+2y=0\end{cases}$ 得交点 $B(-\dfrac{8}{3},\dfrac{4}{3})$，

当直线 $z=2x+y$ 过 $A(-1,3)$ 时，$z_{\max}=2\times(-1)+3=1$，

当直线 $z=2x+y$ 过 $B(-\dfrac{8}{3},\dfrac{4}{3})$ 时，$z_{\min}=2\times(-\dfrac{8}{3})+\dfrac{4}{3}=-4$，

$\therefore -4\leqslant z\leqslant 1$.

又 $2x+y+k\leqslant 0$ 恒成立，即 $-k\geqslant 2x+y$ 恒成立.

即 $-k\geqslant 1$，$k\leqslant -1$，$\therefore k$ 的最大值为 -1.

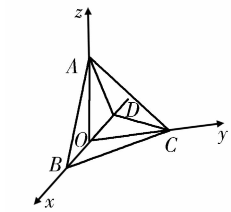
此时，圆 C 的圆心到直线 $2x+y+k=0$ 即 $2x+y-1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2\times 2+2-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$.

则弦长 $l=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$.

11. A 【点拨】本题考查空间想象能力，由几何体的三视图画出直观图，并求几何体外接球的表面积.

【解析】由三视图知该几何体是如图所示的三棱锥 $A-BCD$，设其外接球球心为 E，由几何体的对称性知，球心 E 在面 AOC 内且在 $\angle AOC$ 的平分线上，以 OB,OC,OA 分别为 x,y,z 轴建立坐标系，则 $O(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，设球心坐标 $E(0,m,m)$.

则 $R^2=EB^2=EC^2\Rightarrow(0-1)^2+(m-0)^2+(m-0)^2=(0-0)^2+(m-2)^2+(m-0)^2$，解得 $m=\dfrac{3}{4}$，

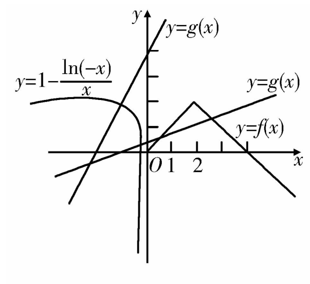


$\therefore R^2=1+(\dfrac{3}{4})^2+(\dfrac{3}{4})^2=\dfrac{17}{8}$.

$S_{外接球}=4\pi R^2=4\times\dfrac{17}{8}\times\pi=\dfrac{17}{2}\pi$.

12. C 【点拨】本题考查方程的根与函数的零点，根据不等式整数解的个数确定参数的取值范围.

【解析】



$f(x)=\begin{cases}2-|x-2|,x\geqslant 0\\1-\dfrac{\ln(-x)}{x},x<0\end{cases}=\begin{cases}1-\dfrac{\ln(-x)}{x},x<0\\x,0\leqslant x\leqslant 2\\4-x,x>2\end{cases}$

$y=1-\dfrac{\ln(-x)}{x} \quad x<0$

$y'=\dfrac{\ln(-x)-1}{x^2}$

当 $x<-e$ 时，$y'>0$，$y=1-\dfrac{\ln(-x)}{x}$ 为增函数

当 $-e<x<0$ 时，$y'<0$，$y=1-\dfrac{\ln(-x)}{x}$ 为减函数

当 $x\to-\infty$ 时，$y\to 1$

当 $x\to 0$ 时，$y\to-\infty$

直线 $y=g(x)=k(x+\dfrac{4}{3})$ 恒过 $A(-\dfrac{4}{3},0)$ 点，画出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象如上图，$\dfrac{f(x)-g(x)}{x}>0$ 即 $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{g(x)}{x}$，即 $\dfrac{f(x)-0}{x-0}>\dfrac{g(x)-0}{x-0}$

$\dfrac{f(x)-0}{x-0}$ 表示的几何意义是函数 $f(x)$ 图象上一点 $M(x,f(x))$ 与原点 $O(0,0)$ 连线的斜率.

$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{g(x)}{x}$ 存在唯一整数解.

等价于 $x>0$ 时，存在唯一整数 x 使得 $f(x)>g(x)$，或者 $x<0$ 时，存在唯一整数 x 使得 $f(x)<g(x)$，结合 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象，只需

$\begin{cases}f(1)\leqslant g(1)\Rightarrow 1\leqslant k(1+\dfrac{4}{3})\Rightarrow k\geqslant\dfrac{3}{7}\\f(2)>g(2)\Rightarrow 2>k(2+\dfrac{4}{3})\Rightarrow k<\dfrac{3}{5}\\f(3)\leqslant g(3)\Rightarrow 1\leqslant k(3+\dfrac{4}{3})\Rightarrow k\geqslant\dfrac{3}{13}\end{cases}$

或

$\begin{cases}f(-1)<g(-1)\Rightarrow 1<k(-1+\dfrac{4}{3})\Rightarrow k>3\\f(-2)\geqslant g(-2)\Rightarrow 1+\dfrac{1}{2}\ln 2\geqslant k(-2+\dfrac{4}{3})\Rightarrow k\geqslant-\dfrac{3}{2}(1+\dfrac{1}{2}\ln 2)\end{cases}$，

故 $\dfrac{3}{7}\leqslant k<\dfrac{3}{5}$ 或 $k>3$，即 $k\in[\dfrac{3}{7},\dfrac{3}{5})\cup(3,+\infty)$

13. -1 【点拨】本题考查向量的数量积及数量积的几何意义.

【解析】$\boldsymbol{a}=(-4,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，则 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影是：$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{-4\times 2+3\times 1}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=-1$.

14. $\frac{3}{8}$ 【点拨】本题考查双曲线的离心率及几何概型概率计算.

【解析】在$[-4,4]$上任取一数 a,则 $a+5>0$,
当 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时,$a^2-1\leqslant 0$,当 $a<-1$ 或 $a>1$ 时,$a^2-1>0$.
$\therefore$ 当 $a\in[-4,-1)\cup(1,4]$时,
$\frac{x^2}{a^2-1}-\frac{y^2}{a+5}=1$ 是焦点在 x 轴上的双曲线.
$e>\sqrt{2}\Rightarrow e^2=\frac{(a^2-1)+(a+5)}{a^2-1}>2\Rightarrow -2<a<3$.
考虑到 $a\in[-1,1]$时,$\frac{x^2}{a^2-1}-\frac{y^2}{a+5}=1$ 不是双曲线.
$\therefore a\in(-2,-1)\cup(1,3)$,
$\therefore$ 所求概率 $P=\frac{(3-1)+[-1-(-2)]}{4-(-4)}=\frac{3}{8}$.

15. -336 【点拨】本题考查定积分的计算和二项式定理的应用.

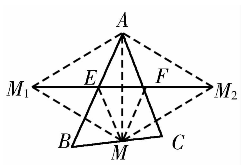
【解析】

$$n=\int_{-2}^{2}|x^2-2x|\,dx=\int_{-2}^{0}x^2-2xdx+\int_{0}^{2}2x-x^2dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{2}$$
$$=8$$

$(x^2+2x-y)^n=[(x^2+2x)-y]^8$
展开式中含 y^5 的项为$(-1)^5C_8^5(x^2+2x)^3y^5$
$(x^2+2x)^3$ 展开式中含 x^5 的项为$2C_3^1(x^2)^2x^1=2C_3^1x^5$
$\therefore (x^2+2x-y)^8$ 中 x^5y^5 项的系数为$(-1)^5C_8^5\cdot 2C_3^1=-336$.

16. $\sqrt{6}$ 【点拨】本题考查三角形的内接三角形周长的最小值,实质是考查轴对称及中垂线定理的应用.

【解析】如图,作 $AM\perp BC$ 交 BC 于 M,分别作 M 关于 AB,AC 的对称点 M_1,M_2,连接 M_1M_2 分别交 AB,AC 于 E,F,连接 ME,MF,则$\triangle MEF$ 即为周长最小的内接三角形,M_1M_2 的长即为最小周长.



在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=60°$,$AB=2$,$AM\perp BC$,$\therefore AM=AB\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. 又点 M 关于 AB,AC 的对称点分别为 M_1,M_2,
$\therefore AM_1=AM_2=AM=\sqrt{3}$, $\angle M_1AM=2\angle BAM$, $\angle M_2AM=2\angle CAM$,
$\therefore \angle M_1AM_2=\angle M_1AM+\angle M_2AM=2(\angle BAM+\angle CAM)=2\angle BAC=2\times 45°=90°$,
$\therefore M_1M_2=\sqrt{2}AM_1=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

17.【点拨】(Ⅰ)本题考查数列的前 n 项和公式与通项公式的关系,根据数列的前 n 项和公式,求数列的通项公式,进而用裂项求和法求相关数列的前 n 项和.
(Ⅱ)本题考查等比数列的基本量的计算,并求等比数列的通项公式,用错位相减法求相关数列的前 n 项和并证明不等式.

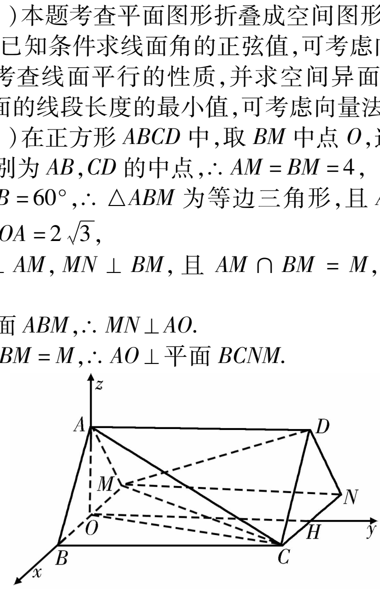
【解析】(Ⅰ)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1$,
当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$
$\therefore a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$
$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$
$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.
(Ⅱ)由题意知:$b_1=a_1=1$. $\therefore q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$,则 $q=2$,
$\therefore b_n=2^{n-2}$,故$\frac{n-1}{b_{2n}}=\frac{n-1}{4^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$
设$\left\{\frac{n-1}{4^{n-1}}\right\}$的前 n 项和为 R_n 所以
$R_n=0\times(\frac{1}{4})^0+1\times(\frac{1}{4})^1+2\times(\frac{1}{4})^2+3\times(\frac{1}{4})^3+\cdots+(n-1)\times(\frac{1}{4})^{n-1}$,则
$\frac{1}{4}R_n=0\times(\frac{1}{4})^1+1\times(\frac{1}{4})^2+2\times(\frac{1}{4})^3+\cdots+(n-2)\times(\frac{1}{4})^{n-1}+(n-1)\times(\frac{1}{4})^n$ 两式相减得
$\frac{3}{4}R_n=(\frac{1}{4})^1+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\cdots+(\frac{1}{4})^{n-1}-(n-1)\times(\frac{1}{4})^n=\frac{\frac{1}{4}-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}-(n-1)(\frac{1}{4})^n$
整理得
$R_n=\frac{1}{9}(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}})$
所以数列$\{c_n\}$的前 n 项和
$B_n=\frac{1}{9}\left(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{4}{9}+\frac{1}{2}=\frac{17}{18}<1$.

18.【点拨】(Ⅰ)本题考查频率分布直方图的应用,根据频率分布直方图求样本平均数及方差.
(Ⅱ)本题考查正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$中,μ,σ 的意义及 3σ 原则,利用 3σ 原则计算服从正态分布的随机变量 X 在某一区间的概率,并求相关随机变量的数学期望.

【解析】(Ⅰ)$\bar{x}=60\times 0.1+80\times 0.24+100\times 0.33+120\times 0.22+140\times 0.11=100$
$s^2=(-40)^2\times 0.1+(-20)^2\times 0.24+0+20^2\times 0.22+40^2\times 0.11=520$.
(Ⅱ)(i)由(Ⅰ)知 X 服从正态分布 $N(100,520)$,且 $\sigma=\sqrt{520}=2\sqrt{130}\approx 22.8$,所以 $P(100<X\leqslant 122.8)=\frac{1}{2}P(77.2<X<122.8)=\frac{1}{2}P(100-22.8<X<100+22.8)=\frac{1}{2}\times 0.6826=0.3413$.
(ii)由(i)知学生寒假日平均数学学习时间位于(77.2,122.8)的概率为 0.6826,依题意 $\xi\sim B(200,0.6826)$,$\therefore E(\xi)=200\times 0.6826=136.52$.

19.【点拨】(Ⅰ)本题考查平面图形折叠成空间图形后的几何不变量,根据已知条件求线面角的正弦值,可考虑向量法.
(Ⅱ)本题考查线面平行的性质,并求空间异面直线上平行于某一平面的线段长度的最小值,可考虑向量法.

【解析】(Ⅰ)在正方形 $ABCD$ 中,取 BM 中点 O,连接 AO,
$\because M,N$ 分别为 AB,CD 的中点,$\therefore AM=BM=4$,
又$\because \angle AMB=60°$,$\therefore \triangle ABM$ 为等边三角形,且 $AO\perp BM$,$OB=OM=2$,$OA=2\sqrt{3}$,
又$\because MN\perp AM$, $MN\perp BM$, 且 $AM\cap BM=M$, $\therefore MN\perp$ 平面 ABM.
$\because AO\subset$平面 ABM,$\therefore MN\perp AO$.
又$\because MN\cap BM=M$,$\therefore AO\perp$平面 $BCNM$.



设 CN 的中点为 H,连接 OH,则 OB,OH,OA 两两垂直,故以 OB,OH,OA 分别为 x 轴、y 轴和 z 轴,建立如图空间直角坐标系,则 $O(0,0,0)$,$A(0,0,2\sqrt{3})$,$C(2,8,0)$,$M(-2,0,0)$,$D(0,8,2\sqrt{3})$,

所以$\overrightarrow{AM}=(-2,0,-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CD}=(-2,0,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{MC}=(4,8,0)$.
设平面 CDM 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MC}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2x+2\sqrt{3}z=0,\\ 4x+8y=0,\end{cases}$
令 $z=2$,得 $\boldsymbol{m}=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},2)$.
设直线 AM 与平面 CDM 所成角为 α,则 $\sin\alpha=|\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{AM}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}=\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

即直线 AM 与平面 CDM 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

(Ⅱ)由题意,可设 $P(0,0,k)(0\leqslant k\leqslant 2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{MD}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$,由 $\overrightarrow{MD}=(2,8,2\sqrt{3})$,得 $\overrightarrow{MQ}=(2\lambda,8\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$,
所以 $Q(2\lambda-2,8\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$,$\overrightarrow{PQ}=(2\lambda-2,8\lambda,2\sqrt{3}\lambda-k)$.
由(1),得 $\overrightarrow{OA}=(0,0,2\sqrt{3})$为平面 $BCNM$ 的法向量.
因为 PQ∥平面 $BCNM$,所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$,即 $2\sqrt{3}\lambda-k=0$.
所以 $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(2\lambda-2)^2+(8\lambda)^2+(2\sqrt{3}\lambda-k)^2}=2\sqrt{17\lambda^2-2\lambda+1}$,又因为 $17\lambda^2-2\lambda+1=17(\lambda-\dfrac{1}{17})^2+\dfrac{16}{17}$,

所以当 $\lambda=\dfrac{1}{17}$时,$|\overrightarrow{PQ}|_{\min}=\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$.

所以当 $\lambda=\dfrac{1}{17}$,$k=\dfrac{2\sqrt{3}}{17}$时,线段 PQ 的长度有最小值$\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$.

20.【点拨】(Ⅰ)本题考查椭圆的标准方程及基本量的确定,根据抛物线与已知椭圆的位置关系,确定抛物线的标准方程.
(Ⅱ)本题考查直线抛物线的相切关系,并求给定三角形面积的和的最小值.

【解析】(Ⅰ)由椭圆方程得 $a=2$,$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore c=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$.
由题意得,抛物线的焦点应为椭圆的上顶点,即$(0,1)$,所以 $p=2$,抛物线方程为 $x^2=4y$.
(Ⅱ)抛物线的准线为 $y=-1$,设 P 点坐标为$(a,-1)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 A 点处的切线为 $y-y_1=\dfrac{1}{2}x_1(x-x_1)$,

B 点处的切线为 $y-y_2=\dfrac{1}{2}x_2(x-x_2)$,由两切线都经过点

P,故$\begin{cases}-1-y_1=\dfrac{1}{2}x_1(a-x_1)\\ -1-y_2=\dfrac{1}{2}x_2(a-x_2)\end{cases}$,即$\begin{cases}ax_1=2(y_1-1)\\ ax_2=2(y_2-1)\end{cases}$,

故直线 AB 为 $ax=2(y-1)$.

由$\begin{cases}ax=2(y-1)\\ x^2=4y\end{cases}$,得 $x^2-2ax-4=0$,$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{a^2}{4}}\cdot\dfrac{2\sqrt{a^2+4}}{1}=a^2+4$.

又 P 到直线 AB 的距离 $d_1=\dfrac{|a^2+4|}{\sqrt{a^2+4}}=\sqrt{a^2+4}$,原点到直线 AB 的距离 $d_2=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}}$,所以 $S_{\triangle POA}+S_{\triangle POB}=\dfrac{1}{2}|AB|(d_1-d_2)=\dfrac{1}{2}(a^2+4)(\sqrt{a^2+4}-\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}})$,

设 $t=\sqrt{a^2+4}(t\geqslant 2)$,

则 $S_{\triangle POA}+S_{\triangle POB}=u=\dfrac{1}{2}t^2(t-\dfrac{2}{t})=\dfrac{1}{2}t^3-t$,

由 $u'=\dfrac{3}{2}t^2-1\geqslant\dfrac{3}{2}\times 4-1>0$,故 $u=\dfrac{1}{2}t^3-t$ 单调递增,

故 $t=2$,即 $a=0$ 时,面积取到最小值为 2.

21.【点拨】(Ⅰ)本题考查导数的综合应用,求含参函数在给定区间上的最小值.
(Ⅱ)本题考查导数的综合应用,根据不等式的形式特点,构造函数,利用导数法研究函数的单调性,进而证明不等式,注意等价转化思想的应用.

【解析】(Ⅰ)由 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$

得:$f'(x)=-a\ln(1+x)+\dfrac{1-ax}{1+x}-1$

$f''(x)=-\dfrac{a}{1+x}+\dfrac{-a(1+x)-(1-ax)}{(1+x)^2}=-\dfrac{ax+2a+1}{(1+x)^2}$.

当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$时,$0\leqslant\dfrac{2a+1}{a}<2$,又 $0\leqslant x\leqslant 1$,

所以 $f''(x)=-\dfrac{a(x+\dfrac{2a+1}{a})}{(1+x)^2}\geqslant 0$,于是 $f'(x)$ 在$[0,1]$上单调递增,从而 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$,因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$.

(Ⅱ)对要证明的不等式等价变形如下:

$\left(\dfrac{2017}{2016}\right)^{2016.5}>e\Leftrightarrow\left(\dfrac{2017}{2016}\right)^{2016\frac{1}{2}}>e$,所以可以考虑证明:对于任意的正整数 n,不等式$(1+\dfrac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}>e$ 恒成立. 并且继续作如下等价变形:

$(1+\dfrac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}>e\Leftrightarrow(n+\dfrac{1}{2})\ln(1+\dfrac{1}{n})>1\Leftrightarrow(1+\dfrac{1}{2n})\ln(1+\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{n}>0$,

由(Ⅰ)可知,当 $a=-\dfrac{1}{2}$时,对任意 $x\in[0,1]$,恒有 $f(x)=(1-ax)\ln(x+1)-x\geqslant 0$,而且仅有 $f(0)=0$,即:$\left(1+\dfrac{1}{2}x\right)\ln(x+1)-x\geqslant 0$——(*),在(*)式中,取 $x=\dfrac{1}{n}\in(0,1]$得:对于任意正整数 n 都有$(1+\dfrac{1}{2n})\ln(1+\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{n}>0$ 成立.

因此对于任意正整数 n,不等式$(1+\dfrac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}>e$ 恒成立.

再令 $n=2016$ 即可得到$\left(\dfrac{2017}{2016}\right)^{2016.5}>e$ 成立.

22.【点拨】(Ⅰ)本题考查极坐标方程与直角坐标方程的互化,曲线的伸缩变换,参数方程与普通方程的互化.
(Ⅱ)本题考查直线参数方程的应用,运用直线的参数方程研究直线与椭圆的位置关系并求弦长,注意参数 t 的几何意义的运用.

【解析】(Ⅰ)l 的普通方程为$\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}+1=0$,
曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$,

$\because\begin{cases}x'=\dfrac{3x}{2}+1,\\ y'=\dfrac{3}{2}y-1.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}(x'-1),\\ y=\dfrac{2}{3}(y'+1).\end{cases}$

$\therefore C'$:$(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{9}{4}$.

(Ⅱ)把$\begin{cases}x=2+\dfrac{1}{2}t,\\ y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t.\end{cases}$代入 C'得 $t^2+(1+2\sqrt{3})t+\dfrac{11}{4}=0$.

$\therefore t_1+t_2=-(1+2\sqrt{3})$,$t_1t_2=\dfrac{11}{4}$,

$\therefore |PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=-(t_1+t_2)=1+2\sqrt{3}$.

23.【点拨】(Ⅰ)本题考查运用柯西不等式证明不等式.
(Ⅱ)本题考查运用柯西不等式求函数的最值,注意适当变形及取等号的条件.

【解析】(Ⅰ)证明:因为 $a,b>0$,利用柯西不等式,得$(a+b)$

$(\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{b})\geqslant(c+d)^2$，所以$\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{b}\geqslant\frac{(c+d)^2}{a+b}$.

当且仅当 $bc=ad$ 时等号成立.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，函数 $y=\frac{3}{x}+\frac{4}{1-3x}=\frac{9}{3x}+\frac{4}{1-3x}=\frac{3^2}{3x}+\frac{2^2}{1-3x}\geqslant\frac{(3+2)^2}{3x+(1-3x)}=25$，所以函数 $y=\frac{3}{x}+\frac{4}{1-3x}(x\in(0,\frac{1}{\ }))$的最小值为 25，当且仅当 $x=\frac{1}{\ }$时取得.