2018全国高考模拟卷五

本试卷分为两卷，第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题，满分150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x\mid \log_2x>1\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $(-1,3)$　B. $(-1,2)$　C. $(1,3)$　D. $(2,3)$

2. 若复数 z 满足 $\frac{z+i}{-2i^3-z}=i$，则 $|\bar{z}+1|=$ （　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. 1

3. 已知点 M 在角 q 终边的反向延长线上，且 $|OM|=2$，则 M 的坐标为 （　　）

A. $(2\cos q,2\sin q)$　B. $(-2\cos q,2\sin q)$

C. $(-2\cos q,-2\sin q)$　D. $(2\cos q,-2\sin q)$

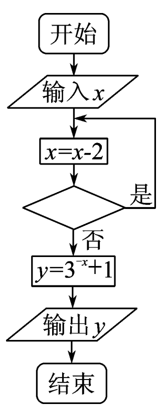
4. 若 $0<a<b<1$，$c>1$，则 （　　）

A. $a^c>b^c$

B. $ab^c>ba^c$

C. $\log_ab<\log_bc$

D. $\log_ac<\log_bc$



5. 根据右边的程序框图，当输入 x 为2017时，输出的 y 为28，则判断框中的条件可以是 （　　）

A. $x^3\geqslant0$　B. $x^3\geqslant1$

C. $x\geqslant-1$　D. $x\geqslant3$

6. 在《九章算术》中有一个古典名题“两鼠穿墙”问题：今有垣厚五尺，两鼠对穿。大鼠日一尺，小鼠也日一尺。大鼠日自倍，小鼠日自半，问何日相逢？大意是有厚墙五尺，两只老鼠从墙的两边分别打洞穿墙，大老鼠第一天进一尺，以后每天加倍；小老鼠第一天也进一尺，以后每天减半. 问几天后两鼠相遇？ （　　）

A. $2\frac{2}{17}$　B. $2\frac{3}{17}$　C. $2\frac{5}{17}$　D. 2.25

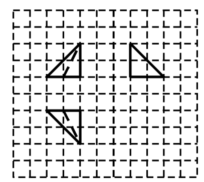
7. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax-b$，若 a,b 都是从 $[0,4]$ 任取的一个数，则满足 $f(1)>0$ 的概率为 （　　）

A. $\frac{1}{32}$　B. $\frac{9}{32}$　C. $\frac{31}{32}$　D. $\frac{23}{32}$

8. 函数 $y=\sin2x$ 图象上的某点 $P(\frac{\pi}{12},m)$ 可以由函数 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 上的某点 Q 向左平移 $n(n>0)$ 个单位长度得到，则 mn 的最小值为 （　　）

A. $\frac{5\pi}{24}$　B. $\frac{5\pi}{48}$　C. $\frac{\pi}{8}$　D. $\frac{\pi}{12}$

9. 如图所示，网格纸上每个小格都是边长为1的正方形，粗线画出的是一个几何体的三视图，则该几何体的表面积为 （　　）



A. $2+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

B. $4+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

C. $4+4\sqrt{3}+\sqrt{6}$

D. $2+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

10. 某计算器有两个数据输入口 M_1,M_2，一个数据输出口 N，当 M_1,M_2 分别输入正整数1时，输出口 N 输出2，当 M_1 输入正整数 m_1，M_2 输入正整数 m_2 时，N 的输出是 n；当 M_1 输入正整数 m_1，M_2 输入正整数 m_2+1 时，N 的输出是 $n+5$，当 M_1 输入正整数 m_1+1，M_2 输入正整数 m_2 时，N 的输出是 $n+4$，则当 M_1 输入60，M_2 输入50时，N 的输出是 （　　）

A. 494　B. 492　C. 485　D. 483

11. 已知直线 l_1 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 交于 A,B 两点，且 AB 中点 M 的横坐标为 b，过 M 且与直线 l_1 垂直的直线 l_2 过双曲线 C 的右焦点，则双曲线的离心率为 （　　）

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　B. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$　C. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　D. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

12. 已知 $f(x)=\frac{x}{|\ln x|}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-(2m+1)f(x)+m^2+m=0$ 恰好有4个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围为 （　　）

A. $(\frac{1}{e},2)\cup(2,e)$　B. $(\frac{1}{e}+1,e)$

C. $(e-1,e)$　D. $(\frac{1}{e},e)$

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 二项式 $(x^3-\frac{2}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中 x^4 项的系数为________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos5°,\sin5°)$，$\boldsymbol{b}=(\cos65°,\sin65°)$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(4a-3)x+2a-4,x\leqslant t\\2x^3-6x,x>t\end{cases}$，无论 t 取何值，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 总是不单调，则 a 的取值范围是____________.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 C 为直角，D 是边 BC 上一点，M 是 AD 上一点，且 $|CD|=1$，$\angle DBM=\angle DMB=\angle CAB$，则 $|MA|=$____________.

三、解答题（本大题共6小题，共70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=2$，$S_n-4S_{n-1}-2=0(n\geqslant2,n\in\mathbf{N})$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）令 $b_n=\log_2a_n$，T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}<2$.

18.（本小题满分12分）

已知 $\triangle PDQ$ 中，A,B 分别为边 PQ 上的两个三等分点，BD 为底边 PQ 上的高，$AE\parallel DB$，如图1，将 $\triangle PEA$，$\triangle QDB$ 分别沿 AE,DB 折起，使得 P,Q 重合于点 C，AB 中点为 M，如图2.

（Ⅰ）求证：$CM\perp EM$；

（Ⅱ）若直线 DM 与平面 ABC 所成角的正切值为2，求二面角 $B-CD-E$ 的大小.

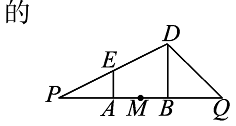


图1

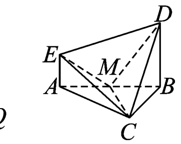


图2

19.（本小题满分12分）

某中学高二年级开设五门大学选修课程，其中属于数学学科的有两门，分别是线性代数和微积分，其余三门分别为大学物理，商务英语以及文学写作，年级要求每名学生只能选修其中一科，该校高二年级600名学生各科选课人数统计如下表：

选修课程	线性代数	微积分	大学物理	商务英语	文学写作	合计
选课人数	180	x	120	y	60	600

其中选修数学学科的人数所占频率为0.6，为了了解学生成绩与选课情况之间的关系，用分层抽样的方法从这600名学生中抽取10人进行分析.

（Ⅰ）从选出的10名学生中随机抽取3人，求这3人中至少2人选修线性代数的概率；

（Ⅱ）从选出的10名学生中随机抽取3人，记 x 为选择线性代数人数与选择微积分人数差的绝对值，求随机变量 x 的分布列和数学期望.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴长为 $2\sqrt{2}$，右焦点为 F.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 l 过点 $M(3,t)$ 且与椭圆有且仅有一个公共点 P，过 P 点作直线 PF 交椭圆于另一点 Q.

①证明：当直线 OM 与直线 PQ 的斜率 k_{OM}，k_{PQ} 均存在时，$k_{OM}\times k_{PQ}$ 为定值.

②求 $\triangle PQM$ 面积的最小值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直.

（Ⅰ）求函数 $y=f(x)+xf'(x)$（$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数）的单调递增区间.

（Ⅱ）记函数 $g(x)=f(x)+\frac{3}{2}x^2-(1+b)x$，设 x_1，x_2（$x_1<x_2$）是函数 $g(x)$ 的两个极值点，若 $b\geqslant\frac{e^2+1}{e}-1$，且 $g(x_1)-g(x_2)\geqslant k$ 恒成立，求实数 k 的最大值.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 和 C_2 的参数方程分别是 $\begin{cases}x=4t^2\\y=4t\end{cases}$（$t$ 是参数）和 $\begin{cases}x=\cos\varphi\\y=1+\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）. 以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（Ⅰ）求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的极坐标方程；

（Ⅱ）射线 $OM:\theta=\alpha$（$\alpha\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$）与曲线 C_1 的交点为 O、P，与曲线 C_2 的交点为 O、Q，求 $|OP|\cdot|OQ|$ 的最大值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=|2x-1|$. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant 2a^2-13$，求 a 的取值范围.

2018全国高考模拟卷五

1. D 【点拨】本题考查集合的运算.

【解析】$A=\{x|x^2-4x+3<0\}\Rightarrow A=\{x|1<x<3\}$. $B=\{x|\log_2 x>1\}\Rightarrow B=\{x|x>2\}$. ∴ $A\cap B=(2,3)$ ∴ D 选项正确.

2. B 【点拨】本题考查复数的除法运算以及模的运算.

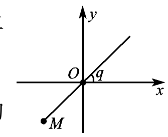
【解析】由$\dfrac{z+\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}^3-z}=\mathrm{i}$可化得:$z+\mathrm{i}=-2\mathrm{i}^4-\mathrm{i}z=-2-\mathrm{i}z$,

∴ $(1+\mathrm{i})z=-2-\mathrm{i}$,∴ $z=\dfrac{-2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1+1}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ∴ $\bar{z}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

∴ $|\bar{z}+1|=|-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ∴ B 选项正确.

3. C 【点拨】本题考查三角函数值的基本定义与性质.

【解析】由图可知,M 点的坐标与角 q 终边上的点所对应的坐标关于原点对称,∴ $M(-2\cos q,-2\sin q)$. ∴ C 选项正确.



4. B 【点拨】本题考查指数,对数大小比较的方法.

【解析】A 选项:$a^c>b^c$ 两边取对数得 $c\ln a>c\ln b$∴ $\ln a>\ln b$. ∴ $a>b$ 与已知 $0<a<b$ 矛盾∴ A 选项错误.

B 选项:$ab^c>ba^c$∴ $b^{c-1}>a^{c-1}$两边取对数得$(c-1)\ln b>(c-1)\ln a$. ∵ $c-1>0$∴ $\ln b>\ln a$∴ $b>a$∴ B 选项正确. C 选项:∵ $\log_a b>0$ $\log_b c<0$ ∴ C 选项错误. D 选项:∵ $\log_a c=\dfrac{\lg c}{\lg a}$. $\log_b c=\dfrac{\lg c}{\lg b}$ 又∵ $\lg c>0$. ∴ $\log_a c<\log_b c\Rightarrow\dfrac{\lg c}{\lg a}<\dfrac{\lg c}{\lg b}$∴ $\dfrac{1}{\lg a}<\dfrac{1}{\lg b}$. ∴ $\lg a>\lg b$ ∴ $a>b$ 与题意矛盾 ∴ D 选项错误.

5. C 【点拨】本题考查框图的计算.

【解析】由 $y=3^{-x}+1$ 令 $y=28$ 得 $x=-3$ 由框图中 $x=x-2$ 知. x 每循环一次就减少 2,∴ 判断框中应填的条件为“$x\geqslant-1$”. ∴ C 选项正确.

6. A 【点拨】本题考查等比数列和的性质.

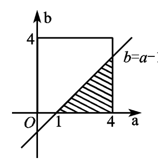
【解析】第一天:大老鼠进 1 尺,小老鼠进 1 尺. 第二天:大老鼠进 2 尺,小老鼠进$\dfrac{1}{2}$尺,第一天和第二天共进 4.5 尺,还剩$\dfrac{1}{2}$尺,设第三天两鼠相遇所用时间为 t,则$(4+\dfrac{1}{4})t=\dfrac{1}{2}$

∴ $t=\dfrac{2}{17}$ ∴ 共用 $2\dfrac{2}{17}$天相遇. ∴ A 选项正确.

7. B 【点拨】本题考查几何概型的计算.

【解析】总事件为$\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 4\\0\leqslant b\leqslant 4\end{cases}$

发生事件为$f(1)>0\Rightarrow-1+a-b>0$ ∴ $b<a-1$



∴ $P(A)=\dfrac{\frac{1}{2}\times3\times3}{4\times4}=\dfrac{9}{32}$. ∴ B 选项正确.

8. B 【点拨】本题考查三角函数图象平移的基本性质.

【解析】∵ 点 $P(\dfrac{\pi}{12},m)$ 在 $y=\sin2x$ 上. ∴ $\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}=m$.

∴ $P(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{1}{2})$. 设 $Q(x_0,\dfrac{1}{2})$,则由 Q 点向左平移 n 个单位为点 P 可知,$x_0-n=\dfrac{\pi}{12}$,∴ $x_0=n+\dfrac{\pi}{12}$,∴ $Q(n+\dfrac{\pi}{12},\dfrac{1}{2})$代入 $y=\cos(2x-\dfrac{\pi}{4})$得 $\cos(2n+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}$∴ $2n-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $2n-\dfrac{\pi}{12}=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$. ∴ $n=\dfrac{5}{24}\pi+k\pi$ 或 $n=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi$∵ n 为正数,且要使 n 最小. ∴ n 最小为$\dfrac{5}{24}\pi$. ∴ $m\cdot n$ 的最小值为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{24}\pi=\dfrac{5}{48}\pi$. ∴ B 选项正确.

9. A 【点拨】本题考查三视图的还原.

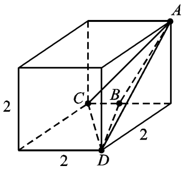
【解析】由三视图还原可得该几何体为三棱锥 $A-BCD$

$S_{表}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2$

$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2})^2$

$=2+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$. ∴ A 选项正确.



10. D 【点拨】本题考查数列的递推关系式的性质.

【解析】依题记为 $f(m_1,m_2)=f(m_1,m_2-1)+5\times 1=f(m_1,m_2-2)+5\times 2=\cdots f(m_1,1)+5\times(m_2-1)=f(m_1-1,1)+4\times 1+5\times(m_2-1)=\cdots=f(1,1)+4\times(m_1-1)+5\times(m_2-1)$,将 $m_1=60$, $m_2=50$, $f(1,1)=2$ 代入得 483.

11. B 【点拨】本题题干中出现中点,所以可采用点差法来求解,双曲线的点差法结论为 $k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$,其中 (x_0,y_0) 为直线 AB 的中点,k_{AB} 为直线 AB 的斜率.

【解析】设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $M(b,y_M)$,由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$

得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}-\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$,又

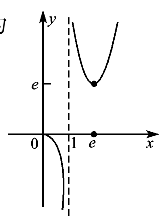
$\begin{cases}\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{l_1}=-\frac{1}{k_{l_2}}=\frac{c-b}{y_M}\\ x_1+x_2=2b\\ y_1+y_2=2y_M\end{cases}$ 代入得 $a^2=bc$,即 $a^4=(c^2-a^2)c^2$,有 $e^4-e^2-1=0$,得 $e=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

12. C 【点拨】本题考查数形结合求零点个数问题.

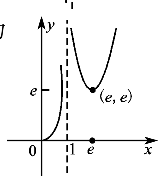
【解析】$f(x)=\frac{x}{|\ln x|}=\begin{cases}\frac{x}{\ln x} & x>1\\ -\frac{x}{\ln x} & 0<x<1\end{cases}$,设 $g(x)=\frac{x}{\ln x}$

则 $g'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$. ∴ $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上↓,$(1,e)$ 上↓,$(e,+\infty)$ 上↑. ∵ 当 $x\to 0$ 时 $g(0)\to 0$ $g(1)=\infty$, $g(e)=e$ $g(+\infty)=+\infty$

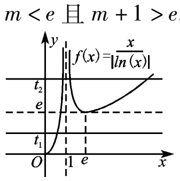
∴ $g(x)$ 图象为



∴ $f(x)$ 图象为



方程 $f^2(x)-(2m+1)f(x)+m^2+m=0$ 可解得 $f(x)=m$ 或 $f(x)=m+1$ 要使上述方程恰好有 4 个不等的实数根,则应满足 $f(x)=m$ 对应一个 x 解,$f(x)=m+1$ 对应三个 x 解. 即 $y=m$ 与 $f(x)$ 图象有一个交点,$y=m+1$ 与 $f(x)$ 图象有 3 个交点. ∴ 由图可知 $0<m<e$ 且 $m+1>e$. ∴ $e-1<m<e$.



∴ C 选项正确.

13. 240 【点拨】本题考查二项式展开式的系数问题,要用到展开式通项公式.

【解析】$T_{r+1}=C_6^r(x^3)^{6-r}\cdot(-\frac{2}{\sqrt{x}})^r=C_6^r(-2)^r x^{18-3r-\frac{r}{2}}$,令 $18-3r-\frac{r}{2}=4$, ∴ $r=4$. ∴ x^4 系数为 $C_6^4(-2)^4=240$.

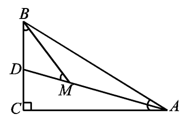
14. $\sqrt{7}$ 【点拨】本题考查向量模的运算,遇模平方.

【解析】$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|^2=\cos^2 5^\circ+\sin^2 5^\circ=1$ $|\boldsymbol{b}|^2=\cos^2 65^\circ+\sin^2 65^\circ=1$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos 5^\circ\cdot\cos 65^\circ+\sin 5^\circ\cdot\sin 65^\circ=\cos(65^\circ-5^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ ∴ $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=1+4+4\times\frac{1}{2}=7$ ∴ $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

15. $(-\infty,\frac{3}{4}]$ 【点拨】本题考查分段函数的单调性.

【解析】$y=2x^3-6x$, $y'=6x^2-6$,令 $y'=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.
∴ $y=2x^3-6x$ 在 $(-\infty,-1)$ 上↑,在 $(-1,1)$ 上↓,$(1+\infty)$ 上↑
∵ $y=2x^3-6x$ 在 $(1,+\infty)$ 上↑, ∴ 当 $y=(4a-3)x+2a-4$ 为↑
即 $4a-3>0$ 时,总存在 t,使得 $(4a-3)t+2a-4\leqslant 2t^3-6t$
即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上↑,
所以可得为使得 $y=(4a-3)x+2a-4$ 为↓
∴ $4a-3\leqslant 0$ ∴ $a\leqslant\frac{3}{4}$

16. 2 【点拨】在 $\triangle CDA$ 中,利用正弦定理,得出 CD 与 AC 的关系,在 $\triangle AMB$ 中,利用正弦定理得出 MA 与 AB 的关系,然后消去 AC 与 AB. 即可得出 $MA=2$.



【解析】设 $\angle DMB=\theta$,则 $\angle ADC=2\theta$, $\angle DAC=\frac{\pi}{2}-2\theta$, $\angle AMB=\pi-\theta$, $\angle ABM=\frac{\pi}{2}-2\theta$. 在 $\triangle CDA$ 中,正弦定理 $\frac{CD}{\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)}=\frac{AC}{\sin 2\theta}$;在 $\triangle AMB$ 中,正弦定理 $\frac{MA}{\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)}=\frac{AB}{\sin(\pi-\theta)}$ ∴ $\frac{CD}{MA}=\frac{AC\sin\theta}{AB\sin 2\theta}=\frac{AC\sin\theta}{2AB\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{2}$,从而 $MA=2$.

17.【点拨】(Ⅰ)利用 $S_n-S_{n-1}=a_n(n\geqslant 2)$ 将 $S_n-4S_{n-1}-2=0$ 化为 $a_n=4a_{n-1}$,然后检验 a_1 是否满足该关系式,求出 $\{a_n\}$ 通项. (Ⅱ)本题考查数列放缩,利用 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$,进行放缩即可.

【解析】(Ⅰ)当 $n\geqslant 3$ 时,可得 $(S_n-4S_{n-1}-2)-(S_{n-1}-4S_{n-2}-2)=0\Rightarrow a_n=4a_{n-1}$. 又因为 $a_1=2$,代入表达式可得 $a_2=8$,满足上式. 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=2$,公比为 4 的等比数列,故:$a_n=2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$.

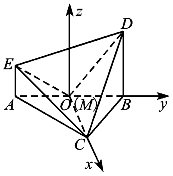
(Ⅱ) $b_n=\log_2 2^{2n-1}=2n-1$, $T_n=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$.

18【点拨】(Ⅰ)利用线面垂直来证明线线垂直.
(Ⅱ)建立空间直角坐标系,求出法向量代入 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$ 即可得.

【解析】(Ⅰ)因为 A,B 是 PQ 的三等分点,所以 $PA=AB=BQ=CA=CB$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,又因为 M 是 AB 的中点,所以 $CM\perp AB$. 因为 $DB\perp AB$, $DB\perp BC$, $AB\cap BC=B$,所以 $DB\perp$ 平面 ABC;又 $EA//DB$,所以 $EA\perp$ 平面 ABC;$CM\subset$ 平面

ABC,所以 $CM\perp EA$. 因为 $AM\cap EA=A$,所以 $CM\perp$平面 EAM. 因为 $EM\subset$平面 EAM,所以 $CM\perp EM$.



(Ⅱ)以点 M 为坐标原点,MC 所在直线为 x 轴,MB 所在直线为 y 轴,过 M 且与直线 BD 平行的直线为 z 轴,建立空间直角坐标系 $M-xyz$,因为 $DB\perp$平面 ABC,所以 $\angle DMB$ 为直线 DM 与平面 ABC 所成角. 由题意得 $\tan\angle DMB=\dfrac{BD}{MB}=2$,即 $BD=2MB$,从而 $BD=AC$. 不妨设 $AC=2$,又 $AC=2AE$,则 $CM=\sqrt{3}$,$AE=1$. 故 $B(0,1,0)$,$C(\sqrt{3},0,0)$,$D(0,1,2)$,$E(0,-1,1)$. 于是 $\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$,$\overrightarrow{BD}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{CE}=(-\sqrt{3},-1,1)$,$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},1,2)$,设平面 BCD 与平面 CDE 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1-y_1=0\\ 2z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$,得 $y_1=\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$. 由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_2-y_2+z_2=0,\\ -\sqrt{3}x_2+y_2+2z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$,得 $y_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$z_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \boldsymbol{n}=\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. 所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=0$. 所以二面角 $B-CD-E$ 的平面角大小为 $90°$.

19.【点拨】(Ⅰ)先用分层抽样的性质求出 x 与 y,然后按照古典概型的古法计算出 $P(A)$ 即可.

(Ⅱ)求出 $|X-Y|$ 的可能取值 0,1,2,3,然后求出对应概率即可

【解析】(Ⅰ)因为选修数学学科人数所占总人数频率为 0.6,即 $\dfrac{180+x}{600}=0.6$,可得:$x=180$,又 $x+180+120+60+y=600$,所以 $y=60$,则根据分层抽样法:

抽取的 10 人中选修线性代数的人数为:$10\times\dfrac{180}{600}=3$ 人;选修微积分的人数为:$10\times\dfrac{180}{600}=3$ 人;选修大学物理的人数为:$10\times\dfrac{120}{600}=2$ 人;选修商务英语的人数为:$10\times\dfrac{60}{600}=1$ 人;选修文学写作的人数为:$10\times\dfrac{60}{600}=1$ 人;

(Ⅰ)现从 10 人中选 3 人共有 $C_{10}^3=120$ 种选法,且每种选法可能性都相同,令事件 A:选中的 3 人至少两人选修线性代数,事件 B:选中的 3 人有两人选修线性代数,事件 C:选中的 3 人都选修线性代数,且 B,C 为互斥事件,$P(A)=P(B)+P(C)=\dfrac{C_3^2\times C_7^1}{C_{10}^3}+\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{11}{60}$.

(Ⅱ)记 X 为 3 人中选修线性代数的人数,X 的可能取值为 0,1,2,3,记 Y 为 3 人中选修微积分的人数;Y 的可能取值也为 0,1,2,3,则随机变量 $x=|X-Y|$ 的可能取值为 0,1,2,3;

$P(\xi=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}+\dfrac{C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{3}$;

$P(\xi=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=2\cdot\dfrac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_{10}^3}+2\cdot\dfrac{C_3^1\cdot C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{9}{20}$,

$P(\xi=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=2,Y=0)=2\cdot\dfrac{C_3^2\cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{5}$.

$P(\xi=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=3,Y=0)=2\cdot\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{60}$;

所以 x 的分布列为:

x	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{60}$

所以 $E(\xi)=\dfrac{1}{3}\times0+\dfrac{9}{20}\times1+\dfrac{1}{5}\times2+\dfrac{1}{60}\times3=\dfrac{9}{10}$.

20.【点拨】(Ⅰ)本题考查椭圆的几何性质,按题意表示出 a,b,c 的关系式,列出方程即可.

(Ⅱ)根据直线与椭圆相切,求出点 P 的坐标,然后求出 PQ 的斜率,再表示出即可求得 $k_{OM}\cdot k_{PQ}=-\dfrac{1}{3}$. ②先证明 $FM\perp PF$,则 $|FM|$ 即为 $\triangle PQM$ 的高. 将 $S_{\triangle PQM}$ 用 t 表示,求出最值即可.

【解析】(Ⅰ)设椭圆的焦距为 $2c$,由题意可得:$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\\ 2b=2\sqrt{2}\end{cases}$ 解得 $a^2=6$,$b^2=2$,$c^2=4$,故椭圆方程为:$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$

(Ⅱ)①由题意可知直线 l 的斜率存在,设直线 l 的方程:$y=kx+m$,因为点 $M(3,t)$ 在直线上,所以 $t=3k+m$,联立直线与椭圆方程:$\begin{cases}y=kx+m\\ x^2+3y^2-6=0\end{cases}$ 可得:$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-6=0$,

又$\because$ 直线与椭圆只有一个公共点,故 $\Delta=0$,即 $m^2=6k^2+2$;

由韦达定理,可得 P 点坐标 $P\left(-\dfrac{3km}{1+3k^2},\dfrac{m}{1+3k^2}\right)$. 因为直线 PQ 过椭圆右焦点为 $F(2,0)$,所以直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=k_{PF}=\dfrac{m}{-3km-2-6k^2}$;而直线 OM 的斜率 $k_{OM}=\dfrac{t}{3}=\dfrac{3k+m}{3}$,所以:$k_{OM}\cdot k_{PQ}=\dfrac{m}{-3km-2-6k^2}\cdot\dfrac{3k+m}{3}=\dfrac{3km+m^2}{-3km-2-6k^2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{3km+m^2}{-3km-m^2}\cdot\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$.

②因为 $\overrightarrow{FM}=(1,t)$,$\overrightarrow{FP}=\left(\dfrac{-3km-2-6k^2}{1+3k^2},\dfrac{m}{1+3k^2}\right)$,所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FP}=\dfrac{mt-3km-2-6k^2}{1+3k^2}=0$,即 $FM\perp PF$;所以三角形 PQM 的面积 $S_{\triangle PQM}=\dfrac{1}{2}|PQ||MF|$;$|MF|=\sqrt{1+t^2}$,由直线 FM 的斜率为 t,可得直线 PQ 的方程:$x=-ty+2$,与椭圆方程联立可得:$|PQ|=\dfrac{2\sqrt{6}(t^2+1)}{t^2+3}$. 所以 $S_{\triangle PQM}=\sqrt{6}\sqrt{\dfrac{(t^2+1)^3}{(t^2+3)^2}}$,令 $t^2+3=h$ 则 $S_{\triangle PQM}=\sqrt{6}\sqrt{\left(h^{\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{h^{\frac{2}{3}}}\right)^3}$,单调递增,$\because t^2\geqslant0$,$\therefore h=t^2+3\geqslant3$.

$\therefore$ 当 $h=3$ 时,$S_{\triangle PQM}$ 取得最小值,

此时,$(S_{\triangle PQM})_{\min}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{(3^{\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{3^{\frac{2}{3}}})^3}=\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore S_{\triangle PQM}$ 最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

21.【点拨】(Ⅰ)本题考查利用导数求函数单调性的问题,直接求导即可. (Ⅱ)先求出 x_1 的范围以及 x_1x_2 的关系,然后将 $g(x_1)-g(x_2)$ 化成由 x_1 表示的式子,求导求出最值即可.

【解析】(Ⅰ)由题意可得:$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax$,$f'(1)=1-2a=-1$,可得 $a=1$;又 $y=f(x)+xf'(x)=\ln x-3x^2+1$,所以 $y'=\dfrac{1}{x}-6x=\dfrac{1-6x^2}{x}(x>0)$;当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 时,$y'>0$,y 单调递增;当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6},+\infty\right)$ 时,$y'<0$,y 单调递减;故函数的单调增区间为 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

(Ⅱ)$g(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-(1+b)x$,$g'(x)=\frac{1}{x}+x-(1+b)$ $=\frac{x^2-(1+b)x+1}{x}$,因为 x_1,x_2 是 $g(x)$ 的两个极值点,故 x_1,x_2 是方程 $x^2-(1+b)x+1=0$ 的两个根,由韦达定理可知:$\begin{cases}x_1+x_2=1+b\\x_1x_2=1\end{cases}$;$\because x_1<x_2$,可知 $0<x_1<1$,又 $x_1+\frac{1}{x_1}=1+b\geqslant e+\frac{1}{e}$,令 $t=x+\frac{1}{x}$,可证 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 递减,由 $t(x_1)\geqslant t(\frac{1}{e})$,从而可证 $0<x_1\leqslant\frac{1}{e}$. 所以 $g(x_1)-g(x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(1+b)(x_1-x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(x_1+x_2)(x_1-x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ $=\ln x_1^2-\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2x_1^2}\left(0<x_1\leqslant\frac{1}{e}\right)$,令 $h(x)=\ln x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}$,$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$,$h'(x)=\frac{2}{x}-x-\frac{1}{x^3}=\frac{-x^4+2x^2-1}{x^3}=\frac{-(x^2-1)^2}{x^3}$ $\leqslant0$,所以 $h(x)$ 单调递减,故 $h(x)_{\min}=h(\frac{1}{e})=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}-2$,所以 $k\leqslant\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}-2$,即 $k_{\max}=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}-2$.

22.【点拨】(Ⅰ)消去参数,化为普通方程即可.
(Ⅱ)在极坐标系中,联立 $\theta=\alpha$ 与 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$ 求出 $|OP|$,联立 $\theta=\alpha$ 与 $\rho=2\sin\theta$,求出 $|OQ|=2\sin\alpha$,所以 $|OP|\cdot|OQ|=\frac{8}{\tan\alpha}$,求出最大值为 $8\sqrt{3}$.
【解析】(Ⅰ)C_1 的普通方程为 $y^2=4x$,C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.
(Ⅱ)由(Ⅰ)可得 C_1 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$,与直线 $\theta=\alpha$ 联立可得:$\rho=\frac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$,即 $OP=\frac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$,同理可得 $OQ=2\sin\alpha$
所以 $|OP|\cdot|OQ|=\frac{8\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{8}{\tan\alpha}$,在 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减,所以 $|OP|\cdot|OQ|_{\max}=8\sqrt{3}$.

23.【点拨】(Ⅰ)脱去绝对值解不等式即可.(Ⅱ)利用“$|a|+|b|\geqslant|a+b|$”可得 $|1-a|+a\geqslant2a^2-13$　$\therefore a\in[-\sqrt{7},3]$
【解析】(Ⅰ)当 $a=3$ 时,$f(x)=|2x-3|+3$.
解不等式 $|2x-3|+3\leqslant6$,得 $0\leqslant x\leqslant3$,
因此,$f(x)\leqslant6$ 的解集为 $\{x|0\leqslant x\leqslant3\}$.
(Ⅱ)当 $x\in\mathbf{R}$ 时,
$f(x)+g(x)=|2x-a|+a+|1-2x|\geqslant|2x-a+1-2x|+a=|1-a|+a$
当 $x=\frac{1}{2}$ 时等号成立,
所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(x)+g(x)\geqslant2a^2-13$ 等价于 $|1-a|+a\geqslant2a^2-13$. ①
当 $a\leqslant1$ 时,①等价于 $1-a+a\geqslant2a^2-13$,解得 $-\sqrt{7}\leqslant a\leqslant1$;
当 $a>1$ 时,①等价于 $a^2-a-6\leqslant0$,解得 $1<a\leqslant3$,
所以 a 的取值范围是[$\sqrt{\ }$].