2018全国高考模拟卷三

本试卷分为两卷，第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题，满分150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|\log_2(x+1)<2\}$，则 $A\cap B$等于　（　　）

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-1,0,1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 设i为虚数单位，则复数 $z=\dfrac{1+2i}{i}$的虚部为　（　　）

A. -2　　B. $-i$　　C. i　　D. -1

3. 在各项都为正数的数列$\{a_n\}$中，首项 $a_1=2$，且点(a_n^2,a_{n-1}^2)在直线 $x-9y=0$ 上，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 等于　（　　）

A. 3^n-1　　B. $\dfrac{1-(-3)^n}{2}$

C. $\dfrac{1+3^n}{2}$　　D. $\dfrac{3n^2+n}{2}$

4. 广告投入对商品的销售额有较大影响，某电商对连续5个年度的广告费和销售额进行统计，得到统计数据如下表（单位：万元）：

广告费 x	2	3	4	5	6
销售额 y	29	41	50	59	71

由上表可得回归方程为 $\hat{y}=10.2x+\hat{a}$，据此模型，预测广告费为10万元时的销售额约为　（　　）

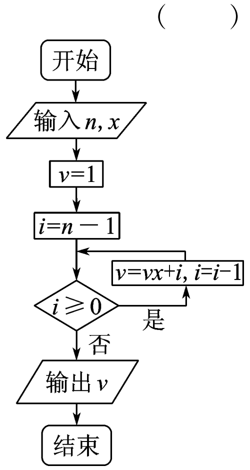
A. 101.2

B. 108.8

C. 111.2

D. 118.2

5. 秦九韶是我国南宋时期的数学家，他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法，如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例。若输入 n,x 的值分别为3，4，则输出 v 的值为　（　　）



第5题图

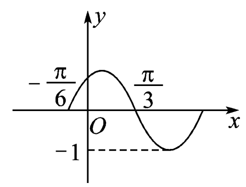
A. 6

B. 25

C. 100

D. 400

6. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，若 $x_1,x_2\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3})$，$x_1\neq x_2$ 且$f(x_1)=f(x_2)$，则$f(x_1+x_2)=$　（　　）



第6题图

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 已知$f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，且在区间$(-\infty,0]$上单调递增，若实数 a 满足 $f(2^{\log_3 a})>f(-\sqrt{2})$，则 a 的取值范围是　（　　）

A. $(-\infty,\sqrt{3})$　　B. $(0,\sqrt{3})$

C. $(\sqrt{3},+\infty)$　　D. $(1,\sqrt{3})$

8. 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=r^2(r>0)$，设条件 $p:0<r<3$，条件 q：圆 C 上至多有2个点到直线 $x-\sqrt{3}y+3=0$ 的距离为1，则 p 是 q 的　（　　）

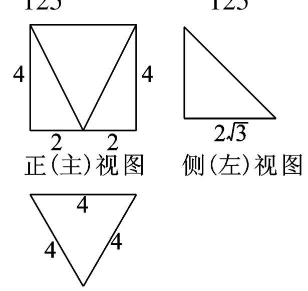
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 从数字1，2，3，4，5中，随机抽取3个数字（允许重复）组成一个三位数，其各位数字之和等于12的概率为　（　　）

A. $\dfrac{2}{25}$　　B. $\dfrac{13}{125}$　　C. $\dfrac{18}{125}$　　D. $\dfrac{9}{125}$

10. 一个几何体的三视图如图所示，该几何体外接球的表面积为　（　　）



正(主)视图　侧(左)视图

俯视图

第10题图

A. 36π

B. $\dfrac{112}{3}\pi$

C. 32π

D. 28π

11. 关于曲线 $C:x^2+y^4=1$，给出下列四个命题：

①曲线 C 有两条对称轴，一个对称中心；

②曲线 C 上的点到原点距离的最小值为1；

③曲线 C 的长度 l 满足 $l>4\sqrt{2}$；

④曲线 C 所围成图形的面积 S 满足 $\pi<S<4$.

上述命题中，真命题的个数是　（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

12. 已知正三角形 ABC 的顶点 A,B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，另一个顶点 $C(4,0)$，则这样的正三角形有　（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，系数最大的项为第________项.

14. 已知 $(x-\sqrt{3})^{2017}=a_0x^{2017}+a_1x^{2016}+\cdots+a_{2016}x+a_{2017}$，则 $(a_0+a_2+\cdots+a_{2016})^2-(a_1+a_3+\cdots+a_{2017})^2$ 的值为________.

15. 设 $f(x)=3\sin\dfrac{x}{2}-2\cos\dfrac{x}{2}$，将函数 $y=f(x)$ 的图象上所有点向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $y=g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 的最大值为 $g(\theta)$，则 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=$________.

16. 过点 $P(-1,1)$ 作圆 $C:(x-t)^2+(y-t+2)^2=1(t\in\mathbf{R})$ 的切线，切点分别为 A,B，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为________.

三、解答题（本大题共6小题，共70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=6$，$a_3+a_6=27$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $T_n=\dfrac{S_n}{3\cdot 2^{n-1}}$，若对于一切正整数 n，总有 $T_n\leqslant m$ 成立，求实数 m 的取值范围.

18.（本小题满分12分）

在10件产品中，有3件一等品，4件二等品，3件三等品，从这10件产品中任取3件，求：

（Ⅰ）取出的3件产品中一等品件数 x 的分布列和数学期望；

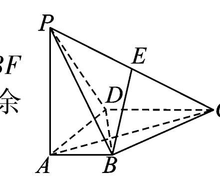
（Ⅱ）取出的3件产品中一等品件数多于二等品件数的概率.

19.（本小题满分12分）

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AD\perp AB$，$AB\parallel DC$，$AD=DC=AP=2$，$AB=1$，点 E 为棱 PC 的中点.

（Ⅰ）证明：$BE\perp DC$；

（Ⅱ）若 F 为棱 PC 上一点，满足 $BF\perp AC$，求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值.



20.(本小题满分 12 分)

已知 $M(4,0)$,$N(1,0)$,曲线 C 上的任意一点 P 满足:$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=6|\overrightarrow{PN}|$.

(Ⅰ)求点 P 的轨迹方程;

(Ⅱ)过点 $N(1,0)$ 的直线与曲线 C 交于 A、B 两点,交 y 轴于 H 点,设 $\overrightarrow{HA}=\lambda_1\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{HB}=\lambda_2\overrightarrow{BN}$,试问 $\lambda_1+\lambda_2$ 是否为定值? 如果是定值,请求出这个定值;如果不是定值,请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+ax(a\in\mathbf{R})$,$g(x)=e^x+\frac{3}{2}x^2$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 的极值点的个数;

(Ⅱ)若对于 $\forall x>0$,总有 $f(x)\leqslant g(x)$,(ⅰ)求实数 a 的范围;(ⅱ)求证:对于 $\forall x>0$,不等式 $e^x+x^2-(e+1)x+\frac{e}{x}>2$ 成立.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

(Ⅰ)若圆 $x^2+y^2=4$ 在伸缩变换 $\begin{cases}x'=\lambda x\\ y'=3y\end{cases}(\lambda>0)$ 的作用下变成一个焦点在 x 轴上,且离心率为 $\frac{4}{5}$ 的椭圆,求 λ 的值;

(Ⅱ)在极坐标系中,已知点 $A(2,0)$,点 P 在曲线 C:$\rho=\frac{2+2\cos\theta}{\sin^2\theta}$ 上运动,求 P、A 两点间的距离的最小值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

(Ⅰ)若不等式 $|x-m|<1$ 成立的充分不必要条件为 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$,求实数 m 的取值范围;

(Ⅱ)关于 x 的不等式 $|x-3|+|x-5|<a$ 的解集不是空集,求实数 a 的实数取值范围.

2018全国高考模拟卷三

1. B 【点拨】根据对数的定义与性质求出集合 B,再根据交集的定义写出 $A\cap B$.

【解析】集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$,

$B=\{x|\log_2(x+1)<2\}$,

$=\{x|0<x+1<4\}=\{x|-1<x<3\}$

则 $A\cap B=\{0,1,2\}$ 故选 B.

2. D 【点拨】利用复数的运算法则、虚部的定义即可得出.

【解析】复数 $z=\frac{1+2i}{i}=\frac{-i(1+2i)}{-i\cdot i}=2-i$ 的虚部为 -1,故选 D.

3. A 【点拨】代入点(a_n^2,a_{n-1}^2),化简可得数列$\{a_n\}$为首项为 2,公比为 3 的等比数列,由等比数列的求和公式,化简计算即可

得到所求和.

【解析】在正数数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,且点(a_n^2,a_{n-1}^2)在直线$x-9y=0$上,可得$a_n^2=9a_{n-1}^2$,即为$a_n=3a_{n-1}$,可得数列$\{a_n\}$首项为2,公比为3的等比数列,则$\{a_n\}$的前n项和S_n等于$\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$,故选A.

4. C 【点拨】求出数据中心,代入回归方程求出$\hat{a}$,再将$x=10$代入回归方程得出答案.

【解析】由题意,$\overline{x}=4$,$\overline{y}=50$.

$\therefore$ $50=4\times10.2+\hat{a}$,解得$\hat{a}=9.2$,$\therefore$ 回归方程为$\hat{y}=10.2x+9.2$.

$\therefore$ 当$x=10$时,$\hat{y}=10.2\times10+9.2=111.2$,故选C.

5. C 【点拨】由题意,模拟程序的运行,依次写出每次循环得到的i,v的值,当i$=-1$,不满足条件i$\geqslant0$,跳出循环,输出的v的值为18.

【解析】初始值$n=3$,$x=4$,程序运行过程如下表所示:

$v=1$

i$=2$,$v=1\times4+2=6$

i$=1$,$v=6\times4+1=25$

i$=0$,$v=25\times4+0=100$

i$=-1$跳出循环,输出v的值为100,故选C.

6. D 【点拨】由图象可得$A=1$,由周期公式可得$\omega=2$,代入点$(\dfrac{\pi}{3},0)$可得φ值,进而可得$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$,再由题意可得$x_1+x_2=\dfrac{\pi}{6}$,代入计算可得.

【解析】由图象可得$A=1$,$\dfrac{2\pi}{\omega}=2\left[\dfrac{\pi}{3}-(-\dfrac{\pi}{6})\right]=\pi$,解得$\omega=2$,

$\therefore$ $f(x)=\sin(2x+\varphi)$,

代入点$(\dfrac{\pi}{3},0)$可得$\sin(\dfrac{2\pi}{3}+\varphi)=0$

$\therefore$ $\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi$,$\therefore$ $\varphi=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$

又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore$ $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$,

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore$ $\sin(2\times\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3})=1$,即图中点的坐标为$(\dfrac{\pi}{12},1)$.

又$x_1,x_2\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3})$,且

$f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$,

$\therefore$ $x_1+x_2=\dfrac{\pi}{12}\times2=\dfrac{\pi}{6}$,

$\therefore$ $f(x_1+x_2)=\sin(2\times\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,故选D.

7. B 【点拨】根据题意,由函数的奇偶性与单调性分析可得$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上递减,则$f(2^{\log_3 a})>f(-\sqrt{2})$可以转化为$2^{\log_3 a}<\sqrt{2}$,变形可得$\log_3 a<\dfrac{1}{2}$,解可得$a$的取值范围,即可得答案.

【解析】根据题意,$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,且在区间$(-\infty,0]$上单调递增,

则其在区间$[0,+\infty)$上递减,

$f(2^{\log_3 a})>f(-\sqrt{2})\Leftrightarrow f(2^{\log_3 a})>f(\sqrt{2})$,

$\Leftrightarrow 2^{\log_3 a}<\sqrt{2}$

即$\log_3 a<\dfrac{1}{2}$

解可得$0<a<\sqrt{3}$;故选B.

8. C 【点拨】求出圆心$(1,0)$到直线的距离$d=2$,即可判断出结论.

【解析】圆C:$(x-1)^2+y^2=r^2(r>0)$,圆心$(1,0)$到直线的距离$d=\dfrac{|1-0+3|}{2}=2$.

由条件q:圆C上至多有2个点到直线$x-\sqrt{3}y+3=0$的距离为1,则$0<r<3$.

则p是q的充要条件.故选C.

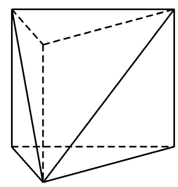
9. A 【点拨】先求出基本事件总数$n=5^3=125$,再利用分类讨论思想求出其各位数字之和等于12包含的基本事件个数,由此能求出其各位数字之和等于12的概率.

【解析】从数字1,2,3,4,5中,随机抽取3个数字(允许重复)组成一个三位数,基本事件总数$n=5^3=125$,其各位数字之和等于12包含的基本事件有:由2,5,5能组成三个满足条件的三位数,由4,4,4能组成一个满足条件的三位数,由3,4,5能组成$A_3^3=6$个满足条件的三位数,满足条件的三位数共有:$3+1+6=10$,$\therefore$ 其各位数字之和等于12的概率为$p=\dfrac{10}{125}=\dfrac{2}{25}$.故选A

10. B 【点拨】由已知中的三视图可得,该几何体是一个以正视图为底面的四棱锥,其外接球,与以俯视图为底面,以4为高的正三棱柱的外接球相同,进而可得该几何体外接球的表面积.

【解析】由已知中的三视图可得,该几何体是一个以正视图为底面的四棱锥,其外接球与以俯视图为底面,以4为高的正三棱柱的外接球相同,

如图所示:

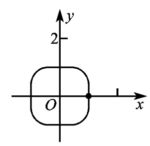


由底面边长为4,可得底面外接圆的半径为:$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,由棱柱高为4,可得球心距为2,

故外接球半径为:$\sqrt{2^2+\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$,故外接球的表面积$S=4\pi r^2=\dfrac{112}{3}\pi$,故选B.

11. A 【点拨】根据方程特点得:以$-x$代替x,以$-y$代替y,方程也不变,说明曲线关于x轴、y轴、原点对称;又$x^2=(1-y^2)\cdot(1+y^2)\geqslant(1-y^2)$,即:$x^2\geqslant(1-y^2)$即$x^2+y^2\geqslant1$,说明曲线上任意一点到原点的距离都大于或等于1,故封闭曲线面积大于π,结合正方形的面积;以及两点之间线段最短、综合可得答案.

【解析】以$-x$当代替x,方程不变,以$-y$代替y,方程也不变,同时以x代替x,$-y$代替y,方程也不变,说明曲线关于x轴、y轴、原点对称,故①正确;又$\because x^2=(1-y^2)\cdot(1+y^2)\geqslant(1-y^2)\therefore x^2+y^2\geqslant1$



$\therefore$ 曲线上任意一点到原点的距离都大于或等于1,(当且仅当$y=0$时,等于1),故②正确.

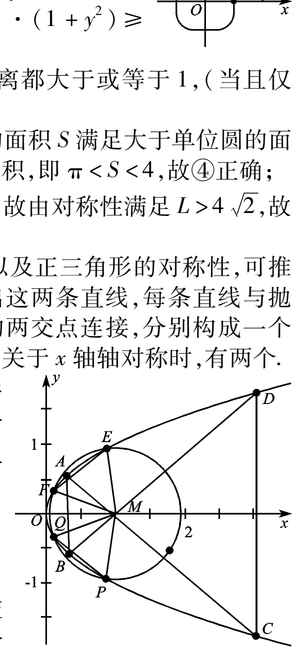
由②可得,曲线C所围成图形的面积S满足大于单位圆的面积,小于边长为2的正方形的面积,即$\pi<S<4$,故④正确;曲线C在每一段的长都大于$\sqrt{2}$,故由对称性满足$L>4\sqrt{2}$,故③正确.故选A.

12. D 【点拨】根据题意和抛物线以及正三角形的对称性,可推断出两个边的斜率,进而表示出这两条直线,每条直线与抛物线均有两个交点,焦点两侧的两交点连接,分别构成一个等边三角形,可知当等边三角形关于x轴轴对称时,有两个.

【解析】由题意,当等边三角形关于x轴轴对称时两个边的斜率$k=\pm\tan30°=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,其方程为:

$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$,

每条直线与抛物线均有两个交点,焦点两侧的两交点连接,分



别构成一个等边三角形，这样的正三角形有2个，图中$\triangle ABM$和$\triangle CDM$，两个顶点同时在抛物线上方，如图中$\triangle EFM$，或同时在下方各一个如图中$\triangle PQM$，故选D.

13. 3或5 【点拨】二项式展开式项的系数要看该项二项式系数和计算的正负，展开项中二项式系数先增后减，再结合计算出展开式中的系数的正负即可.

【解析】$(x-\frac{1}{x})^6$的二项式系数分别为$C_6^0,C_6^1,C_6^2,C_6^3,C_6^4,C_6^5,C_6^6$，

二项展开式的系数最大的项为第4项

$(x-\frac{1}{x})^6$的展开式的系数分别为$C_6^0,-C_6^1,C_6^2,-C_6^3,C_6^4,-C_6^5,C_6^6$

$(x-\frac{1}{x})^6$的展开式的系数与$(x-\frac{1}{x})^6$的二项展开式的系数只有符号差异，故系数最大的项为第3，5项综上所述，答案：3或5.

14. -2^{2017} 【点拨】分别在二项式中取$x=1,-1$，得到$(1-\sqrt{3})^{2017}=a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2017}$，$(-1-\sqrt{3})^{2017}=-a_0+a_1-a_2\cdots\cdots-a_{2016}+a_{2017}$，再把要求解的式子用平方差公式得解.

【解析】取$x=1$得$(1-\sqrt{3})^{2017}=a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2016}+a_{2017}$

取$x=-1$得$(-1-\sqrt{3})^{2017}=-a_0+a_1-a_2+a_3-a_4\cdots\cdots-a_{2016}+a_{2017}$ 又$(a_0+a_2+\cdots\cdots+a_{2016})^2-(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2017})^2=(a_0+a_2+\cdots\cdots+a_{2016}+a_1+a_3+\cdots\cdots a_{2017})\cdot[a_0+a_2+\cdots\cdots+a_{2016}-(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2017})]=(1-\sqrt{3})^{2017}\{-[(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2017})-(a_0+a_2+\cdots\cdots+a_{2016})]\}$
$=-(1-\sqrt{3})^{2017}(-\sqrt{3}-1)^{2017}=-[(1-\sqrt{3})(-\sqrt{3}-1)]^{2017}=-2^{2017}$

15. $\frac{12}{13}$ 【点拨】利用函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换规律，辅助角公式化简$g(x)$的解析式，再利用正弦函数的最值求得$\theta$的值，可得$\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$的值.

【解析】把$f(x)=3\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}$的图象上所有点向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位得到

函数$y=g(x)=3\sin\dfrac{x-\frac{\pi}{3}}{2}-2\cos\dfrac{x-\frac{\pi}{3}}{2}$

$=3\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})-2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})$

$=\sqrt{9+4}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})-\frac{2}{\sqrt{13}}\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})\right]$

$=\sqrt{13}\sin\left[(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})-\alpha\right]$的图象，

其中，$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}},\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$，

故当$(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})-\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$时，即$x=4k\pi+2\alpha+\frac{4\pi}{3}$时，

函数$g(x)$的最大值为$g(\theta)$，故$\theta=4k\pi+2\alpha+\frac{4\pi}{3}$

则$\cos(\theta+\frac{\pi}{6})=\cos(4k\pi+2\alpha+\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6})$

$=\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})$

$=\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{12}{13}$，

故答案为：$\frac{12}{13}$.

16. $\frac{21}{4}$ 【点拨】根据圆心和半径，写出切线方程，再把向量点积化成模积再乘以夹角余弦值，再用余弦定理，把夹角余弦表示成pc的函数，求值域即可.

【解析】由已知可得圆C的圆心坐标为$C(t,t-2)$，半径$r=1$

则过点$P(-1,1)$的切线方程为$x-y-2=0$

又$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos\angle APB$

设$\angle APC=\theta$

则$\cos\angle APB=\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{|AP|}{|PC|}\right)^2-1$

又$|PA|^2=|PB|^2=|PC|^2-|AC|^2=|PC|^2-1$

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(|PC|^2-1)\left(\frac{2|AP|^2}{|PC|^2}-1\right)$

$=(|PC|^2-1)\left(\frac{2|PC|^2-2-|PC|^2}{|PC|^2}\right)$

令$|PC|^2=t$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(t-1)\cdot\frac{t-2}{t}=\frac{t^2-3t+2}{t}$

$=t+\frac{2}{t}-3,t>0$

又$|PC|_{\min}=\frac{|-1-1-2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

故$t_{\min}=8$，又函数$y=t+\frac{2}{t}-3$在$[8,+\infty)$上为增函数

则$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})_{\min}=8+\frac{2}{8}-3=\frac{21}{4}$

综上所述，答案是：$\frac{21}{4}$.

17. 【点拨】(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，运用等差数列的通项公式，计算即可得到；(Ⅱ)由等差数列的求和公式和数列的单调性，可得T_n的最大值，再由恒成立思想，即可得到m的范围.

【解析】(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_2=6,a_3+a_6=27$，可得$a_1+d=6,2a_1+7d=27$，

解得$a_1=d=3$，

即有$a_n=a_1+(n-1)d=3n$；

(Ⅱ)$T_n=\frac{S_n}{3\cdot2^{n-1}}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}(3+3n)n}{3\cdot2^{n-1}}$

$=\frac{n(n+1)}{2^n}$

$T_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}$，

由$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{n+2}{2n}$，

可得$T_1<T_2\leqslant T_3>T_4>T_5>\cdots T_n>\cdots$

即有$T_2=T_3=\frac{3}{2}$，取得最大值.

对于一切正整数n，总有$T_n\leqslant m$成立，

则有$m\geqslant\frac{3}{2}$，

即有m的取值范围是$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

18. 【点拨】(Ⅰ)由题意知本题是一个古典概型，试验包含的所有事件是从10件产品中任取3件的结果为C_{10}^3，满足条件的事件是从10件产品中任取3件，其中恰有k件一等品的结果数为$C_3^kC_7^{3-k}$，写出概率，分布列和和期望.

(Ⅱ)取出的3件产品中一等品件数多于二等品件数包括三种情况，一是恰好取出1件一等品和2件三等品，二是恰好取出2件一等品，三是恰好取出3件一等品，这三种情况是互斥的，根据互斥事件的概率，得到结果.

【解析】(Ⅰ)由题意知本题是一个古典概型. 由于从10件产品中任取3件的结果为C_{10}^3，从10件产品中任取3件，其中

恰有 k 件一等品的结果为 $C_3^kC_7^{3-k}$,那么从 10 件产品中任取 3 件,其中恰有 k 件一等品的概率为 $P(X=k)=\dfrac{C_3^kC_7^{3-k}}{C_{10}^3}$,$k=0,1,2,3$

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

$\therefore X$ 的数学期望

$E(X)=0\times\frac{7}{24}+1\times\frac{21}{40}+2\times\frac{7}{40}+3\times\frac{1}{120}=\frac{9}{10}$

(Ⅱ)设取出的"3 件产品中一等品件数多于二等品件数"为事件 A,

"恰好取出 1 件一等品和 2 件三等品"为事件 A_1

"恰好取出 2 件一等品"为事件 A_2

"恰好取出 3 件一等品"为事件 A_3 由于事件 A_1,A_2,A_3 彼此互斥,

且 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,而 $P(A_1)=\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{40}$,

$P(A_2)=P(X=2)=\frac{7}{40}$,$P(A_3)=P(X=3)=\frac{1}{120}$,

$\therefore$ 取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数的概率为:

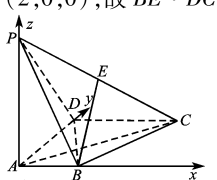
$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$=\frac{3}{40}+\frac{7}{40}+\frac{1}{120}=\frac{31}{120}$.

19.【点拨】(Ⅰ)以 A 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,求出 BE,DC 的方向向量,根据 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,可得 $BE\perp DC$;(Ⅱ)根掘 $BF\perp AC$,求出向量 $\overrightarrow{BF}$ 的坐标,进而求出平面 FAB 和平面 ABP 的法向量,代入向量夹角公式,可得二面角 $F-AB-P$ 的余弦值.

【解析】(Ⅰ)依题意,以点 A 为原点建立空间直角坐标系如图,可得 $B(1,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,0,2)$,由 E 为棱 PC 的中点,得 $E(1,1,1)$.

$\overrightarrow{BE}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$,故 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,所以 $BE\perp DC$.



(Ⅱ)$\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$,$\overrightarrow{CP}=(-2,-2,2)$,$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

由点 F 在棱 PC 上,设 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,故 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CP}=(1-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$

由 $BF\perp AC$,得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,因此,$2(1-2\lambda)+2(2-2\lambda)=0$,

解得 $\lambda=\frac{3}{4}$,即 $\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

设 $\boldsymbol{m}_1=(x,y,z)$ 为平面 FAB 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{m}_1\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$,

即 $\begin{cases}x=0\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$.

不妨令 $z=1$,可得 $\boldsymbol{m}_1=(0,-3,1)$ 为平面 FAB 的一个法向量,取平面 ABP 的法向量 $\boldsymbol{m}_2=(0,1,0)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2}{|\boldsymbol{m}_1|\cdot|\boldsymbol{m}_2|}=\dfrac{-3}{\sqrt{10}\times1}=-3\ \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

易知,二面角 $F-AB-P$ 是锐角,所以余弦值为$\dfrac{3\ \sqrt{10}}{10}$.

20.【点拨】(Ⅰ)设点 P 的坐标,将向量翻译成坐标,即可求出点 P 的轨迹方程.(Ⅱ)设直线方程(讨论直线是否平行于坐标轴),假设是定值,代入计算即可.

【解析】(Ⅰ)设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{MN}=(-3,0)$,$\overrightarrow{MP}=(x-4,y)$,$\overrightarrow{PN}=(1-x,-y)$,

$\because\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=6|\overrightarrow{PN}|$,$\therefore -3\times(x-4)+0\times y=6\sqrt{(x-1)^2+y^2}$,

化简得,$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 为所求点 P 的轨迹方程.

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

①当直线 l 与 x 轴不重合时,设直线 l 的方程为 $x=my+1(m\neq0)$,则 $H\left(0,-\frac{1}{m}\right)$,从而 $\overrightarrow{HA}=\left(x_1,y_1+\frac{1}{m}\right)$,$\overrightarrow{AN}=(1-x_1,-y_1)$,由 $\overrightarrow{HA}=\lambda_1\overrightarrow{AN}$ 得 $\left(x_1,y_1+\frac{1}{m}\right)=\lambda_1(1-x_1,-y_1)$,$y_1+\frac{1}{m}=-\lambda_1y_1$,$-\lambda_1=1+\frac{1}{my_1}$.

同理由 $\overrightarrow{HB}=\lambda_2\overrightarrow{BN}$ 得 $-\lambda_2=1+\frac{1}{my_2}$.

$\therefore -(\lambda_1+\lambda_2)=2+\left(\frac{1}{my_1}+\frac{1}{my_2}\right)=2+\frac{1}{m}\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$. ①

由 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$,得 $(4+3m^2)y^2+6my-9=0$.

$\therefore y_1+y_2=-\frac{6m}{4+3m^2}$,$y_1y_2=\frac{-9}{4+3m^2}$,

代入①式得 $-(\lambda_1+\lambda_2)=2+\frac{1}{m}\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$,

$\therefore\lambda_1+\lambda_2=-\frac{8}{3}$

②当直线 l 与 x 轴重合时,$A(-2,0)$,$B(2,0)$,$H(0,0)$.

由 $\overrightarrow{HA}=\lambda_1\overrightarrow{AN}$,$\overrightarrow{HB}=\lambda_2\overrightarrow{BN}$,得 $\lambda_1=-\frac{2}{3}$,$\lambda_2=-2$,

$\therefore\lambda_1+\lambda_2=-\frac{8}{3}$.

综上,$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值 $-\frac{8}{3}$.

21.【点拨】解法 1:求 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$,利用判别式 $\triangle=a^2-4$,判断 $f'(x)$ 是否大于 0,从而得出 $f(x)$ 的单调性与极值点情况. 解法 2:求 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$,根据 $x>0$,求出 $f'(x)$ 的值域,讨论 a 的值得出 $f'(x)$ 的正负情况,判断 $f(x)$ 的单调性和极值点问题(Ⅱ)(ⅰ)$f(x)\leqslant g(x)$ 等价于 $e^x-\ln x+x^2\geqslant ax$,由 $x>0$,利用分离常数法求出 a 的表达式,再构造函数求最值即可证明;

(ⅱ)由(ⅰ)结论,$a=\mathrm{e}+1$ 时有 $f(x)\leqslant g(x)$,得出不等式,再进行等价转化,证明转化的命题成立即可.

【解析】(Ⅰ)由题意得:

$f'(x)=x+\frac{1}{x}+a=\frac{x^2+ax+1}{x}(x>0)$,令 $\triangle=a^2-4$,

(1)当 $\triangle=a^2-4\leqslant0$,即 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时,$x^2+ax+1\geqslant0$ 对 $x>0$ 恒成立;

即 $f'(x)=\frac{x^2+ax+1}{x}\geqslant0$ 对 $x>0$ 恒成立,

此时 $f(x)$ 没有极值点;

(2)当 $\triangle=a^2-4>0$,即 $a<-2$ 或 $a>2$,

①$a<-2$ 时,设方程 $x^2+ax+1=0$ 两个不同实根为 x_1,x_2,不妨设 $x_1<x_2$,

则 $x_1+x_2=-a>0$,$x_1x_2=1>0$,故 $x_2>x_1>0$,

$\therefore x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时 $f'(x)>0$;

在 $x_1<x<x_2$ 时 $f'(x)<0$,

故 x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点;

②$a>2$ 时,设方程 $x^2+ax+1=0$ 两个不同实根为 x_1,x_2,

则 $x_1+x_2=-a<0$,$x_1x_2=1>0$,故 $x_2<0$,$x_1<0$,

$\therefore x>0$ 时,$f(x)>0$;故函数 $f(x)$ 没有极值点;

综上,当 $a<-2$ 时,函数 $f(x)$ 有两个极值点;当 $a\geqslant-2$ 时,函数 $f(x)$ 没有极值点;

解法二:由题意得 $f'(x)=x+\frac{1}{x}+a$

$\because x>0$,$\therefore f'(x)\in[a+2,+\infty)$

①当 $a+2\geqslant 0$,即 $a\in[-2,+\infty)$ 时,$f'(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x>0$ 恒成立.
$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)$ 没有极值点;
②当 $a+2<0$,即 $a\in(-\infty,-2)$ 时,方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不等正数解 x_1,x_2.

$$f'(x)=x+\frac{1}{x}+a=\frac{x^2+ax+1}{x}$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x}(x>0)$$

不妨设 $0<x_1<x_2$,则当 $x\in(0,x_1)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;
$x\in(x_1,x_2)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;
$x\in(x_2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.
所以 x_1,x_2 分别为 $f(x)$ 极大值点和极小值点,$f(x)$ 有两个极值点.
综上所述,当 $a\in[-2,+\infty)$ 时,$f(x)$ 没有极值点.
当 $a\in(-\infty,-2)$ 时,$f(x)$ 有两个极值点;
(Ⅱ)(ⅰ)$f(x)\leqslant g(x)$ 等价于 $e^x-\ln x+x^2\geqslant ax$,
由 $x>0$,即 $a\leqslant\dfrac{e^x+x^2-\ln x}{x}$ 对于 $\forall x>0$ 恒成立.

设 $\varphi(x)=\dfrac{e^x+x^2-\ln x}{x}(x>0)$

$$\varphi'(x)=\frac{\left(e^x+2x-\frac{1}{x}\right)x-(e^x+x^2-\ln x)}{x^2}$$

$$=\frac{e^x(x-1)+\ln x+(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$\because x>0$,$\therefore x\in(0,1)$ 时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$ 单调递减.
$x\in(1,+\infty)$ 时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$ 单调递增.
$\therefore \varphi(x)\geqslant\varphi(1)=e+1$,$\therefore a\leqslant e+1$;
(ⅱ)由(ⅰ)知,当 $a=e+1$ 时有 $f(x)\leqslant g(x)$
即:$e^x+\dfrac{3}{2}x^2\geqslant\ln x+\dfrac{1}{2}x^2+(e+1)x$
等价于 $e^x+x^2-(e+1)x\geqslant\ln x$ ①
当且仅当 $x=1$ 时取等号,
以下证明:$\ln x+\dfrac{e}{x}\geqslant 2$,

设 $\theta(x)=\ln x+\dfrac{e}{x}$,则 $\theta'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{x^2}=\dfrac{x-e}{x^2}$
$\therefore$ 当 $x\in(0,e)$ 时,$\theta'(x)<0$,$\theta(x)$ 单调递减.
$x\in(e,+\infty)$ 时,$\theta'(x)>0$,$\theta(x)$ 单调递增.
$\theta(x)\geqslant\theta(e)=2$.
$\therefore \ln x+\dfrac{e}{x}\geqslant 2$②,当且仅当 $x=e$ 时取等号;
由于①②等号不同时成立,故有
$e^x+x^2-(e+1)x+\dfrac{e}{x}>2$.

22.【点拨】(Ⅰ)根据离心率和坐标变换即可得椭圆方程,从而求出 λ 的值;(Ⅱ)将 C 化为直角坐标方程,设点 P 坐标,表示 PA,从而求最小值.
【解析】(Ⅰ)依题意变换后椭圆 y 轴正半轴顶点为 $(0,6)$,所以短半轴长 $b=6$,再由离心率为 $\dfrac{4}{5}$ 可得长半轴长为 10,所以 λ 的值为 5.
(Ⅱ)曲线 C 的极坐标方程可化为 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$,即 $\rho-\rho\cos\theta=2$ 化为直角坐标方程,得 $\sqrt{x^2+y^2}-x=2$,即 $y^2=4(x+1)$
设点 $P(x,y)(x\geqslant -1)$,则 $|PA|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+8}\geqslant 2\sqrt{2}$,当且仅当 $x=0$ 时取等号,故 $|PA|_{\min}=2\sqrt{2}$.

23.【点拨】(Ⅰ)解绝对值不等式,再根据集合的关系,即可求出 m 的范围;(Ⅱ)根据解不是空集即可得 a 的范围.
【解析】(Ⅰ)不等式 $|x-m|<1$ 的解集为 $\{x|m-1<x<m+1\}$,依题意有 $\left\{x\middle|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}\subseteq\{x|m-1<x<m+1\}$,则

$$\begin{cases}m-1\leqslant\dfrac{1}{3},\\ m+1\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}, 解得 -\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$$

(Ⅱ)$\because |x-3|+|x-5|\geqslant|(x-3)-(x-5)|=2$,
且 $|x-3|+|x-5|<a$ 的解集不是空集,
$\therefore a>2$,即 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.