**2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）**

**数学（理工类）**

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

**注意事项：**

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

**参考公式：**

·如果事件、互斥，那么．

·如果事件、相互独立，那么．

·圆柱的体积公式，其中表示圆柱的底面面积，表示圆柱的高．

·棱锥的体积公式，其中表示棱锥的底面面积，表示棱锥的高．

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合，则

A． B． C． D．

2．设变量满足约束条件则目标函数的最大值为

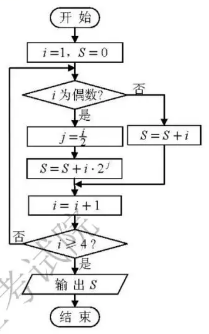
A．2 B．3 C．5 D．6

3．设，则“”是“”的

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

4．阅读下边的程序框图，运行相应的程序，输出的值为



A．5 B．8 C．24 D．29

5．已知抛物线的焦点为，准线为，若与双曲线的两条渐近线分别交于点和点，且（为原点），则双曲线的离心率为

A． B． C． D．

6．已知，，，则的大小关系为

A． B． C． D．

7．已知函数是奇函数，将的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为．若的最小正周期为，且，则

A． B． C． D．

8．已知，设函数若关于的不等式在上恒成立，则的取值范围为

A． B． C． D．

**2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）**

**数学（理工类）**

第Ⅱ卷

**注意事项：**

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共12小题，共110分。

二．填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

9．是虚数单位，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

10．的展开式中的常数项为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

11．已知四棱锥的底面是边长为的正方形，侧棱长均为．若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

12．设，直线和圆（为参数）相切，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

13．设，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

14．在四边形中，，点在线段的延长线上，且，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

三．解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分13分）

在中，内角所对的边分别为．已知，．

（Ⅰ）求的值；

（Ⅱ）求的值．

16．（本小题满分13分）

设甲、乙两位同学上学期间，每天7：30之前到校的概率均为．假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立．

（Ⅰ）用表示甲同学上学期间的三天中7：30之前到校的天数，求随机变量的分布列和数学期望；

（Ⅱ）设为事件“上学期间的三天中，甲同学在7：30之前到校的天数比乙同学在7：30之前到校的天数恰好多2”，求事件发生的概率．

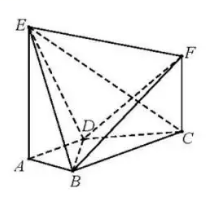
17．（本小题满分13分）

如图，平面，，．

（Ⅰ）求证：平面；

（Ⅱ）求直线与平面所成角的正弦值；

（Ⅲ）若二面角的余弦值为，求线段的长．



18．（本小题满分13分）

设椭圆的左焦点为，上顶点为．已知椭圆的短轴长为4，离心率为．

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设点在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点为直线与轴的交点，点在轴的负半轴上．若（为原点），且，求直线的斜率．

19．（本小题满分14分）

设是等差数列，是等比数列．已知．

（Ⅰ）求和的通项公式；

（Ⅱ）设数列满足其中．

（i）求数列的通项公式；

（ii）求．

20．（本小题满分14分）

设函数为的导函数．

（Ⅰ）求的单调区间；

（Ⅱ）当时，证明；

（Ⅲ）设为函数在区间内的零点，其中，证明．

**2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）**

**数学（理工类）参考解答**

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

1．D 2．C 3．B 4．B 5．D 6．A 7．C 8．C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

9． 10． 11． 12． 13． 14．

三．解答题

15．本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识．考查运算求解能力，满分13分．

（Ⅰ）解：在中，由正弦定理，得，又由，得，即．又因为，得到，．由余弦定理可得．

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可得，从而，，故

．

16．本小题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分13分．

（Ⅰ）解：因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天7：30之前到校的概率均为，故，从而．

所以，随机变量的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

随机变量的数学期望．

（Ⅱ）解：设乙同学上学期间的三天中7：30之前到校的天数为，则，且．由题意知事件与互斥，且事件与，事件与均相互独立，从而由（Ⅰ）知



．

17．本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分13分．

依题意，可以建立以为原点，分别以的方向为轴，轴，轴正方向的空间直角坐标系（如图），可得，．设，则．

（Ⅰ）证明：依题意，是平面的法向量，又，可得，又因为直线平面，所以平面．

（Ⅱ）解：依题意，．

设为平面的法向量，则即不妨令，

可得．因此有．

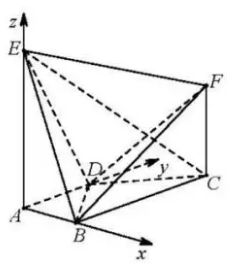
所以，直线与平面所成角的正弦值为．

（Ⅲ）解：设为平面的法向量，则即

不妨令，可得．

由题意，有，解得．经检验，符合题意．

所以，线段的长为．



18．本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分13分．

（Ⅰ）解：设椭圆的半焦距为，依题意，，又，可得，．

所以，椭圆的方程为．

（Ⅱ）解：由题意，设．设直线的斜率为，又，则直线的方程为，与椭圆方程联立整理得，可得，代入得，进而直线的斜率．在中，令，得．由题意得，所以直线的斜率为．由，得，化简得，从而．

所以，直线的斜率为或．

19．本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前项和公式等基础知识．考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力．满分14分．

（Ⅰ）解：设等差数列的公差为，等比数列的公比为．依题意得解得故．

所以，的通项公式为的通项公式为．

（Ⅱ）（i）解：．

所以，数列的通项公式为．

（ii）解：





．

20．本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法．考查函数思想和化归与转化思想．考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力．满分14分．

（Ⅰ）解：由已知，有．因此，当时，有，得，则单调递减；当时，有，得，则单调递增．

所以，的单调递增区间为的单调递减区间为．

（Ⅱ）证明：记．依题意及（Ⅰ），有，从而．当时，，故

．

因此，在区间上单调递减，进而．

所以，当时，．

（Ⅲ）证明：依题意，，即．记，则，且．

由及（Ⅰ），得．由（Ⅱ）知，当时，，所以在上为减函数，因此．又由（Ⅱ）知，，故

．

所以，．