

2018全国高考模拟卷十

本试卷分为两卷,第 I 卷为选择题,第 II 卷为非选择题,满分 150 分,考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题 共 50 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

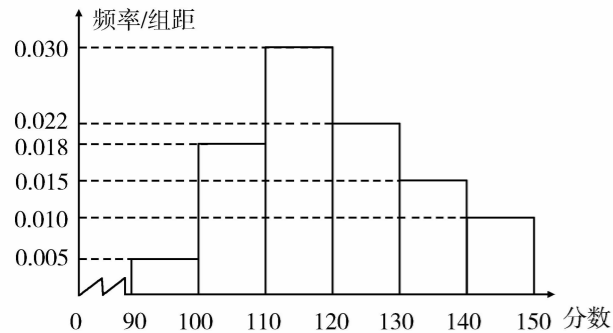
1. 复数 z 满足 $z(2+i) = 1+3i$, 则复数 z 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知集合 $A = \{x \mid \frac{x+2}{x-2} \leq 0\}$, $B = \{x \mid x-1 \geq 0\}$, 则 $A \cap B$ 为 ()

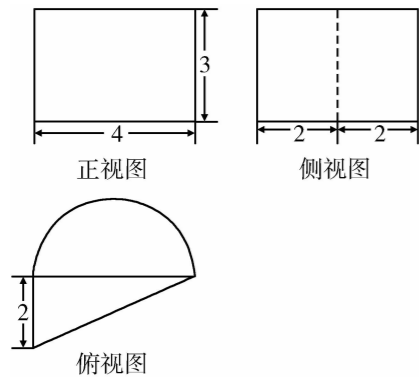
- A. $[1, 2]$ B. $[1, 2)$
C. $[-2, \infty)$ D. $(-2, 2]$

3. 某校 100 名学生的数学测试成绩分布直方图如下图所示, 分数不低于 a 即为优秀, 如果优秀的人数为 20 人, 则 a 的估计值是 ()



- A. 130 B. 140 C. 133 D. 137

4. 已知一几何体的三视图如下图所示, 俯视图由一个直角三角形与一个半圆组成, 则该几何体的体积为 ()



- A. $6\pi + 12$
B. $6\pi + 24$

- C. $12\pi + 12$
D. $24\pi + 12$

5. 变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ 2x+y \leq 4 \\ 4x-y \geq -1 \end{cases}$ 则目标函数 $z = 3|x| + |y-3|$ 的取值范围是 ()

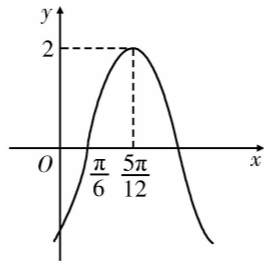
- A. $[\frac{3}{2}, 9]$ B. $[-\frac{3}{2}, 6]$ C. $[-2, 3]$ D. $[1, 6]$

6. 已知直线 $l \not\subset$ 平面 α , 直线 $m \subset$ 平面 α , 下面四个结论: ①若 $l \perp \alpha$, 则 $l \perp m$; ②若 $l // \alpha$, 则 $l // m$; ③若 $l \perp m$ 则 $l \perp \alpha$; ④若 $l // m$, 则 $l // \alpha$, 其中正确的是 ()

- A. ①②④ B. ③④ C. ②③ D. ①④

7. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如下图所示, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 ()

- A. $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$
B. $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$
C. $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{12})$
D. $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$



8. 已知 $f(x) = 2^x - 1, g(x) = 1 - x^2$, 规定: 当 $|f(x)| \geq g(x)$ 时, $h(x) = |f(x)|$; 当 $|f(x)| < g(x)$ 时, $h(x) = -g(x)$, 则 $h(x)$ ()

- A. 有最小值 -1, 最大值 1
B. 有最大值 1, 无最小值
C. 有最小值 -1, 无最大值
D. 有最大值 -1, 无最小值

9. 已知关于 x 的方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三个实根分别为一个椭圆, 一个抛物线, 一个双曲线的离心率, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(-1, -\frac{1}{2})$
C. $(-2, -\frac{1}{2})$ D. $(-2, +\infty)$

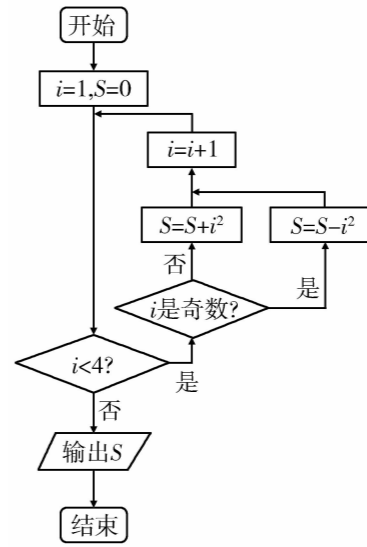
10. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x^3$, 若函数 $y = f(x) + f(k-x^2)$ 有两个零点, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $(-\frac{1}{4}, 0)$
C. $(-\frac{1}{4}, 2)$ D. $[-\frac{1}{4}, 2]$

第 II 卷(非选择题 共 100 分)

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

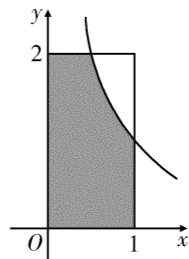
11. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为_____.



12. 在 $(\sqrt{x} + \frac{a}{x})^6$ ($a > 0$) 的展开式中常数项的系数是 60, 则 a 的值为_____.

13. 已知直线 $ax - 2by = 2$ ($a > 0, b > 0$) 过圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 的圆心, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.

14. 如图, 设 D 是图中边长分别为 1 和 2 的矩形区域, E 是 D 内位于函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 图象下方的阴影部分区域, 则阴影部分 E 的面积为_____.



15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, & x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则满足 $f(f(t)) = 2^{f(t)}$ 的 t 的取值范围是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本小题满分 12 分) 已知向量 $\mathbf{a} = (\cos(\frac{\pi}{2} + x), \sin(\frac{\pi}{2} + x))$, $\mathbf{b} = (-\sin x, \sqrt{3}\sin x)$, $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及 $f(x)$ 的最大值.
(II) 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(\frac{A}{2}) = 1, a = 2\sqrt{3}$, 求三角形 ABC 面积的最大值.

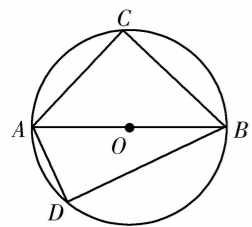
17. (本小题满分 12 分) 集成电路 E 由 3 个不同的电子元件组成, 现由于元件老化, 三个电子元件能正常工作的概率分别降为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, 且每个电子元件能否正常工作相互独立, 若三个电子元件中至少有 2 个正常工作, 则 E 能正常工作, 否则就需要维修, 且维修集成电路 E 所需费用为 100 元.
(I) 求集成电路 E 需要维修的概率;
(II) 若某电子设备共由 2 个集成电路 E 组成, 设 X 为该电子设备需要维修集成路所需的费用, 求 X 的分布列和期望.

18. (本小题满分 12 分)

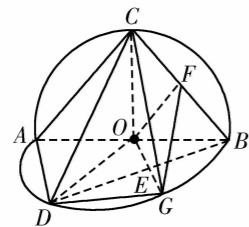
圆 O 上两点 C, D 在直径 AB 的两侧(如图甲),沿直径 AB 将圆 O 折起形成一个二面角(如图乙),若 $\angle DOB$ 的平分线交弧 \widehat{BD} 于点 G ,交弦 BD 于点 E, F 为线段 BC 的中点.

(I) 证明:平面 $OGF \parallel$ 平面 CAD ;

(II) 若二面角 $C-AB-D$ 为直二面角,且 $AB=2, \angle CAB=45^\circ, \angle DAB=60^\circ$,求直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值.



图甲



图乙

19. (本小题满分 12 分)

已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n-1} (n \geq 2)$.

(I) 证明 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和 P_n ;

(II) 若 $b_n = \frac{S_n}{2n+1} + \frac{2^n}{S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = ax - \frac{b}{x} - 2\ln x$, 对任意实数 $x > 0$, 都有

$f(x) = -f(\frac{1}{x})$ 成立.

(I) 对任意实数 $x \geq 1$, 函数 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(II) 求证: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 2\ln \frac{2n}{n+1} - \frac{3}{4}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$.

21. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为

F_1, F_2 , 点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \frac{9}{4}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 直线 l_1 过点 P , 且与椭圆只有一个公共点, 直线 l_2 与 l_1 的倾斜角互补, 且与椭圆交于异于点 P 的两点 M, N , 与直线 $x=1$ 交于点 K (K 介于 M, N 两点之间).

(i) 求: $|PM| \cdot |KN| = |PN| \cdot |KM|$;

(ii) 是否存在直线 l_2 , 使得直线 l_1, l_2, PM, PN 的斜率按某种排序能构成等比数列? 若能, 求出 l_2 的方程; 若不能, 请说明理由.

2018全国高考模拟卷十

1. A 【点拨】把已知等式变形,利用复数代数形式的乘除运算化简求得 z 的坐标得答案.

【解析】 $z(2+i) = 1+3i \Rightarrow z = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$. 为第一象限.

2. B 【点拨】解不等式化简集合 A, B , 根据交集的定义写出 $A \cap B$.

【解析】 $\frac{x+2}{x-2} \leq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \leq 0 (x \neq 2)$

$\therefore -2 \leq x < 2, \therefore A \cap B = [1, 2)$. 选 B.

3. C 【点拨】由频率分布直方图分析可得每一个分数段上的频率,再由频率与频数的关系,以及获得优秀的频数可得 a 的值.

【解析】由题意可知:90-100分的频率为

$0.005 \times 10 = 0.05$, 频数为 5 人;

则 100-110 分的频率为 $0.018 \times 10 = 0.18$, 频数为 18 人;

110-120 分的频率为 $0.03 \times 10 = 0.3$, 频数为 30 人;

120-130 分的频率为 $0.022 \times 10 = 0.22$, 频数为 22 人;

130-140 分的频率为 $0.015 \times 10 = 0.15$, 频数为 15 人;

140-150 分的频率为 $0.010 \times 10 = 0.1$, 频数为 10 人;

而优秀的人数为 20 人, 140-150 分有 10 人, 130-140 分有 15 人, 取后 10 人,

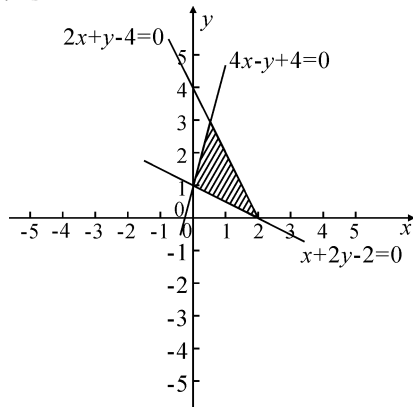
\therefore 分数不低于 133 即为优秀.

4. A 【点拨】由三视图可知几何体为半圆柱与直三棱柱的组合体,利用体积公式,即可得出结论.

【解析】由三视图可知几何体为半圆柱与直三棱柱的组合体,

$V = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 3 = 6\pi + 12$, 故选 A.

5. A 【点拨】确定不等式表示的区域,化简目标函数,利用图象即可求得结论.



【解析】不等式表示的区域如图所示,三个交点坐标分别为 $(0,1), (\frac{1}{2},3), (2,0)$

目标函数 $z = 3|x| + |y-3| = 3x - y + 3$, 即 $y = 3x + 3 - z$,

\therefore 目标函数过 $(2,0)$ 时,取得最大值为 9, 过 $(\frac{1}{2},3)$ 时,取得最小值为 $\frac{3}{2}$.

\therefore 目标函数 $z = 3|x| + |y-3|$ 的取值范围是 $[\frac{3}{2}, 9]$.

6. D 【点拨】在①中,由线面垂直的性质定理得 $l \perp m$; 在②中, l 与 m 平行或异面; 在③中, l 与 a 不一定垂直; 在④中,由线面平行的判定定理得 $l \parallel a$.

【解析】由直线 $l \not\subset$ 平面 a , 直线 $m \subset$ 平面 a , 知: 在①中, 若 $l \perp a$, 则由线面垂直的性质定理得

$l \perp m$, 故①正确;

在②中, 若 $l \parallel a$, 则 l 与 m 平行或异面, 故②错误;

在③中, 若 $l \perp m$, 则 l 与 a 不一定垂直, 故③错误;

在④中, 若 $l \parallel m$, 则由线面平行的判定定理得 $l \parallel a$, 故④正确.

故选 D.

7. B 【点拨】由题意求出 A, T , 利用周期公式求出 ω , 利用当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时取得最大值 2, 求出 φ , 即可得到函数的解析式.

【解析】由题意可知 $A=2, T=4(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = \pi, \omega=2$,

因为: 当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时取得最大值 2,

所以: $2 = 2\sin(2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi)$,

所以: $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得: $\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$,

因为: $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$,

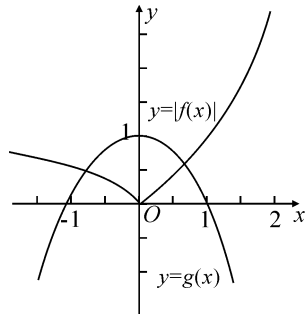
所以: 可得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 可得函数 $f(x)$ 的解析式:

$f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

8. C 【点拨】本题主要考查学生对分段函数的解析式求法以及图象的掌握的掌握; 根据已知函数, 画出现 $|f(x)|$ 和 $g(x)$ 的函数图象;

再根据 $h(x) = \begin{cases} |f(x)|, & |f(x)| \geq g(x), \\ -g(x), & |f(x)| < g(x), \end{cases}$ 结合图象即可得到答案.

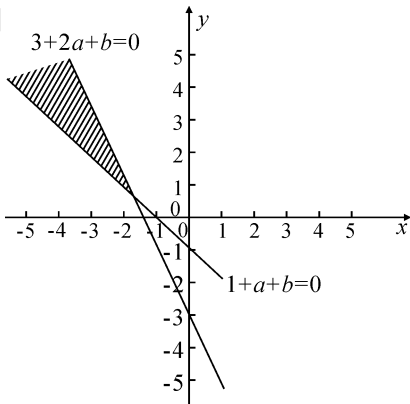
【解析】在同一坐标系中先画出 $|f(x)|$ 与 $g(x)$ 的图象, 如图所示,



而 $h(x) = \begin{cases} |f(x)|, & |f(x)| \geq g(x) \\ -g(x), & |f(x)| < g(x) \end{cases}$, 故 $h(x)$ 有最小值 -1 , 无最大值. 故选 C.

9. C 【点拨】令 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 把 $x=1, y=0$ 代入函数解析式求得 $a+b+c$ 的值, 进而可得 $f(x) = (x-1)(x^2 + x + 1) + a(x+1)(x-1) + b(x-1)$ 的形式, 设 $g(x) = x^2 + (a+1)x + 1 + a + b$ 椭圆和双曲线的离心率的范围确定两根的范围确定 $g(0) > 0, g(1) < 0$, 最后利用线性规划求得 $\frac{b}{a}$ 的取值范围.

【解析】



令 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
 \therefore 抛物线的离心率为 1,
 $\therefore 1$ 是方程 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的一个实根
 $\therefore a+b+c = -1$
 $\therefore c = -1 - a - b$ 代入 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx - 1 - a - b \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1) + a(x+1)(x-1) + b(x-1) \\ &= (x-1)[x^2 + (a+1)x + 1 + a + b] \end{aligned}$$

设 $g(x) = x^2 + (a+1)x + 1 + a + b$, 则 $g(x) = 0$ 的两根满足 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$

$\therefore g(0) = 1 + a + b > 0, g(1) = 3 + 2a + b < 0$ 作出可行区域, 如图示 $\frac{b}{a}$ 的几何意义是区域内的点与原点连线的斜率,

$$\therefore -2 < \frac{b}{a} < -\frac{1}{2}.$$

10. B 【点拨】先判断 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(x)$ 在 $(x > 0$ 且 $x < 1)$ 单调递增, $f(x) + f(k-x^2) = 0$ 有两根, 即 $x = x^2 - k$ 有两根, 求 k 即可.

$$\text{【解析】} f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x^3 \quad f(x) = -f(-x),$$

当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 单调递增

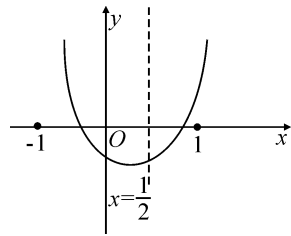
$f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, $f(x) + f(k-x^2) = 0$ 有根,

$$\therefore f(x) = -f(k-x^2)$$

$$\text{即 } f(x) = f(x^2 - k)$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数且在 $(-1, 1)$ 单调递增.

$\therefore x = x^2 - k$ 有两根, 即 $x^2 - x - k = 0$ 有两根. 根据图象, $x^2 - x - k = 0$ 在 $(-1, 1)$ 有根, 令 $g(x) = x^2 - x - k$



$$\therefore \begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ 即 } -\frac{1}{4} < k < 0 \\ g(1) > 0 \end{cases}$$

11. -6 【点拨】运行程序即可.

【解析】 $i=1 \quad S=0$

$$S=0-1=-1 \quad i=2$$

$$S=-1+2^2=3 \quad i=3$$

$$S=3-9=-6 \quad i=4$$

\therefore 输出结果为了 -6 .

12. 2 【点拨】利用通项公式即可得出.

$$\text{【解析】} T_{r+1} = C_6^r (\sqrt{x})^{6-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r = a^r C_6^r x^{3-\frac{3r}{2}},$$

$$\text{令 } 3 - \frac{3r}{2} = 0, \text{ 解得 } r = 2.$$

$$\therefore a^2 C_6^2 = 60, a > 0, \text{ 解得 } a = 2.$$

故答案为: 2.

13. 4 【点拨】求出圆的标准方程, 求出圆心, 根据直线和圆心的关系, 求出 a, b 的关系, 利用基本不等式进行求解即可.

【解析】圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 即

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$, 表示以 $C(2, -1)$ 为圆心, 半径等于 2 的圆.

由于直线 $ax - 2by = 2 (a > 0, b > 0)$ 过圆心, 故有 $2a + 2b = 2$, 即 $a + b = 1$.

$$\begin{aligned} \therefore a + b = 1, \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 \\ &= 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}} \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) \geq 4,$$

当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ 时, 即 $a = b$ 时取 “=”.

14. $1 + \ln 2$ 【点拨】阴影部分 E 由两部分组成, 矩形部分用长乘以宽计算, 曲边梯形的面积, 利用定积分计算.

【解析】由题意阴影部分 E 有两部分组成, 因为函数 $y = \frac{1}{x}$

$$(x > 0), \text{ 当 } y = 2 \text{ 时, } x = \frac{1}{2},$$

$$\text{故阴影部分的面积 } S = 2 \times \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx$$

$$= 1 + \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= 1 - \ln \frac{1}{2} = 1 + \ln 2.$$

15. $\{t | t \geq -\frac{1}{3}\}$ 【点拨】 $f(t) \geq 1$, 当 $t \geq 1$ 时, $f(t) = 2^t \geq 1$, 当 t

< 1 时 $f(t) = 3t + \frac{5}{2} \geq 1$ 从而求出 t 的范围.

【解析】 $f(t) = a$, 则有 $f(a) = 2^a$,

又 \therefore 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调增函数

$$\therefore f(t) = a \geq 1$$

$$f(t) \geq 1, \text{ 当 } t \geq 1 \text{ 时, } f(t) = 2^t \geq 1 \text{ 即 } t \geq 0 \quad \therefore t \geq 1.$$

$$\text{当 } t < 1 \text{ 时, } f(t) = \frac{3}{4}t + \frac{5}{4} \geq 1 \text{ 即 } t \geq -\frac{1}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{3} \leq t < 1 \quad \therefore t \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

16. 【点拨】(I) 根据向量点乘求出 $f(x)$ 的解析式, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 求出

T , 当 $f(x)$ 取最大值时角的集合为 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

(II) 先将 $f\left(\frac{A}{2}\right)$ 化简, 求出 $A = \frac{\pi}{3}$ 用余弦定理表示 $\cos A$, 结合面积公式, 用均值不等式即求出面积最大值.

【解析】(I) 易得 $\mathbf{a} = (-\sin x, \cos x)$, 则 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sin^2 x$

$$+ \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ 时, 即 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$,

$f(x)$ 取最大值是 $\frac{3}{2}$.

(II) $\therefore f\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = 1$,

$$\therefore \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\therefore 12 = b^2 + c^2 - bc,$$

$$\therefore b^2 + c^2 = 12 + bc \geq 2bc,$$

$\therefore bc \leq 12$. (当且仅当 $b = c$ 时等号成立)

$$\therefore S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} bc \leq 3\sqrt{3}.$$

\therefore 当三角形 ABC 为等边三角形时面积取最大值是 $3\sqrt{3}$.

17. 【点拨】(I) 集成电路 E 需要维修包含两种情况: ①3 个元件均不能正常工作; ②3 个元件中有 2 个不正常工作.

(II) 其服从 $B\left(2, \frac{5}{12}\right)$, 列出分布列计算期望即可.

【解析】(I) 三个电子元件能正常工作分别记为事件 A, B, C 则 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{2}{3}$. 依题意, 集成电路 E 需要维修有两种情形:

①3 个元件都不能正常工作, 概率为 $P_1 = P(\overline{ABC}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

②3 个元件中的 2 个不能正常工作, 概率为 $P_2 = P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C})$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

所以, 集成电路 E 需要维修的概率为 $P_1 + P_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3}$

$$= \frac{5}{12}.$$

(II) 设 ξ 为维修集成电路的个数, 则 ξ 服从 $B\left(2, \frac{5}{12}\right)$,

而 $X = 100\xi, P(X = 100\xi) = P(\xi = k) = C_2^k \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k \cdot$

$$\left(\frac{7}{12}\right)^{2-k}, k=0, 1, 2.$$

X 的分布列为:

X	0	100	200
P	$\frac{49}{144}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{25}{144}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{49}{144} + 100 \times \frac{35}{72} + 200 \times \frac{25}{144} = \frac{250}{3}.$$

18. 【点拨】(I) 证明 OGF 面内的两条相交直线 OG 和 OF 分别平行面 ACD 即可.

(II) 以 O 点建空间坐标系, 利用空间向量求线面角.

【证明】(I) $\therefore OF$ 为 $\triangle ABC$ 的一条中线,

$\therefore OF \parallel AC$,

又 $OF \not\subset$ 平面 $ACD, AC \subset$ 平面 $ACD, \therefore OF \parallel$ 平面 ACD .

又 $\therefore OG$ 为 $\angle DOB$ 的平分线,

$\therefore OG \perp BD$,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore AD \perp BD$,

$\therefore OG \parallel AD$, 又 $OG \not\subset$ 平面 $ACD, AD \subset$ 平面 ACD ,

$\therefore OG \parallel$ 平面 ACD ,

又 $\therefore OG, OF$ 为平面 OGF 内的两条相交直线,

\therefore 平面 $OGF \parallel$ 平面 CAD .

(II) $\therefore O$ 为 AB 的中点, $\therefore CO \perp AB$,

\therefore 平面 $CAB \perp$ 平面 DAB , 平面 $CAB \cap$ 平面 $DAB = AB, OC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore CO \perp$ 平面 DAB , 又 $\text{Rt} \triangle DAB$ 中, $AB = 2, \angle DAB = 60^\circ$,

$\therefore AD = 1$, 又 $OG \parallel AD, OG = 1, OA = 1$,

\therefore 四边形 $ADGO$ 为菱形, $\angle AOG = 120^\circ$,

设 DG 中点为 M , 则 $\angle AOM = 90^\circ$, 即 $OM \perp OB$,

\therefore 直线 OM, OB, OC 两两垂直,

以 O 为原点, 以 OM, OB, OC 为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), F\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\therefore \overrightarrow{FG} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (0, -1, 1), \overrightarrow{BD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right).$$

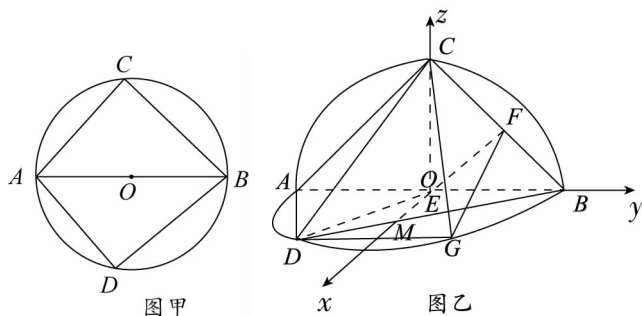
设平面 BCD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$, 则 $\mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0$,

$$\therefore \begin{cases} -y + z = 0 \\ \sqrt{3}x - \frac{3}{2}y = 0, \end{cases} \text{令 } y = 1, \mathbf{n}_1 = (\sqrt{3}, 1, 1).$$

$$\therefore \overrightarrow{FG} \cdot \mathbf{n}_1 = 1, |\overrightarrow{FG}| = 1, |\mathbf{n}_1| = \sqrt{5}.$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{FG}, \mathbf{n}_1 \rangle = \frac{\overrightarrow{FG} \cdot \mathbf{n}_1}{|\overrightarrow{FG}| \cdot |\mathbf{n}_1|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

\therefore 直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



19. 【点拨】(I) 将 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 代入化简即 $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$, 再列

出 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$, 再求和即可.

(II) 将 S_n 代入 b_n 中, 求出 b_n , 利用分组求和结合错位相减求 b_n 前 n 项和.

【解析】(I) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2S_n^2}{2S_{n-1} - 1}$ 化简得 $S_{n-1} - S_n = S_n S_{n-1}$ 即 $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$, 又 $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1$, 所以数列

$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 为以 1 为首项, 2 为公差的等差数列,

$$\frac{1}{S_n} = 2n - 1, \text{ 则 } P_n = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^2$$

(II) 由(I)得 $\frac{1}{S_n} = 2n - 1$ 所以 $S_n = \frac{1}{2n-1}, b_n = \frac{S_n}{2n+1} + \frac{2^n}{S_n}$

$$= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + (2n-1) \times 2^n$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + (2n-1) \times 2^n$$

所以 $A_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$

$B_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n$, ①

$2B_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \dots + (2n-3) \times 2^n + (2n-1) \times 2^{n+1}$, ②

①-②得, $-B_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + 2 \times 2^{n-1} + 2 \times 2^n - (2n-1) \times 2^{n+1} = (3-2n) \times 2^{n+1} - 6$

$\therefore T_n = A_n + B_n = \frac{n}{2n+1} + (2n-3) \times 2^{n+1} + 6$.

20. 【点拨】(I) 求等讨论单调性, 分 $a \leq 0$ 和 $a > 0$. 讨论单调性, 结合零点分布求解.

(II) 结合(I)中的 $x - \frac{1}{x} \geq 2\ln x (x \geq 1)$ 成立, 令 $x = \frac{n^2}{n^2-1}$ ($n > 0$ 且 $n \in N_+$) 迭加即可证明不等式.

【解析】(I) $\because f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right) \therefore (a-b)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$, 即得 $a = b$

$$f(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\ln x, f'(x) = a\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}$$

$$= \frac{ax^2 - 2x + a}{x^2}$$

当 $a \leq 0$ 时, 因为 $x \geq 1$, 所以 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递减,

此时 $f(2) < f(1) = 0$ 与 $f(x) \geq 0$ 不符, (舍)

当 $a > 0$ 时, 令 $g(x) = ax^2 - 2x + a, \Delta = 4 - 4a^2$

若 $\Delta \leq 0$ 即 $a \geq 1$ 时, $g(x) \geq 0, f'(x) \geq 0, f(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递增.

$f(x) \geq f(1) = 0$ 成立

若 $\Delta > 0$ 即 $0 < a < 1$ 时, 设 $g(x)$ 的零点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{2}{a} > 0, x_1 x_2 = 1$, 所以有 $0 < x_1 < 1 < x_2$.

则当 $x \in (1, x_2)$ 时, $g(x) < 0, f'(x) < 0, f(x)$ 在 $x \in (1, x_2)$ 上单调递减,

$f(x) < f(1) = 0$ 与 $f(x) \geq 0$ 不符, (舍)

综上: 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

(II) 由(I)知, 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\ln x \geq 0$ 恒成立.

即 $x - \frac{1}{x} \geq 2\ln x (x \geq 1)$,

令 $x = \frac{n^2}{n^2-1} (n > 1, n \in N_+)$

则有 $\frac{n^2}{n^2-1} - \frac{n^2-1}{n^2} > 2\ln \frac{n^2}{n^2-1}$, 即 $\frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} >$

$2\ln \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$.

所以 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{n^2} > 2\ln \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$

迭加有 $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} >$

$2\ln \frac{2n}{n+1}$

所以 $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 2\ln \frac{2n}{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$

故 $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 2\ln \frac{2n}{n+1} - \frac{3}{4}$ 成立.

21. 【点拨】(I) 将向量翻译成坐标, 将 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 代入方程即可确定方程.

(II) (i) 将 $l_1: y - \frac{3}{2} = k(x-1)$ 联立 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 令 $\Delta = 0$ 即可求出 k , 从而知 l_2 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 设 l_2 方程为 $y = \frac{1}{2}x + t$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 计算 $k_{PM} + k_{PN} = 0$. 得 $\angle MPK = \angle NPK$, 利用正弦定理即可.

(ii) 假设存在, 根据假设, 求出 k , 看是否与题意相符.

【解析】(I) 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), c > 0$, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-c-1, -\frac{3}{2}) \cdot (c-1, -\frac{3}{2}) = 1 - c^2 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$,

所以 $c = 1$.

因为 $2a = |PF_1| + |PF_2| = 4$, 所以 $a = 2$.

$\therefore b^2 = 3$

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) (i) 设 l_1 方程 $y - \frac{3}{2} = k(x-1)$, 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立, 消 y 得

$$(4k^2 + 3)x^2 + (12k - 8k^2)x + (3 - 2k)^2 - 12 = 0$$

则题意知 $\Delta = 0$, 解得 $k = -\frac{1}{2}$.

因为直线 l_2 与 l_1 的倾斜角互补, 所以 l_2 的斜率是 $\frac{1}{2}$.

设直线 l_2 方程: $y = \frac{1}{2}x + t, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + t \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{整理得 } x^2 + tx + t^2 - 3 = 0,$$

由 $\Delta > 0$, 得 $t^2 < 4$,

$$x_1 + x_2 = -t, x_1 \cdot x_2 = t^2 - 3;$$

$$\text{直线 } PM, PN \text{ 的斜率之和 } k_{PM} + k_{PN} = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x_1 + t - \frac{3}{2}\right)(x_2 - 1) + \left(\frac{1}{2}x_2 + t - \frac{3}{2}\right)(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + (t-2)(x_1 + x_2) - (2t-3)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$= 0.$$

所以 PM, PN 关于直线 $x = 1$ 对称, 即 $\angle MPK = \angle NPK$, 在 $\triangle PMK$ 和 $\triangle PNK$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{PM}{\sin \angle PKM} = \frac{MK}{\sin \angle MPK}, \frac{PN}{\sin \angle PKN} = \frac{NK}{\sin \angle NPK},$$

又因为 $\angle MPK = \angle NPK, \angle PKM + \angle PKN = 180^\circ$

所以 $\frac{PM}{PN} = \frac{MK}{NK}$

故 $|PM| \cdot |KN| = |PN| \cdot |KM|$ 成立.

(ii) 由(i)知, $k_{PM} + k_{PN} = 0, k_{l_1} = -\frac{1}{2}, k_{l_2} = \frac{1}{2}$.

假设存在直线 l_2 , 满足题意, 不妨设 $k_{PM} = -k, k_{PN} = k, (k > 0)$

若 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -k, k$ 按某种排序构成等比数列, 设公比为 q , 则 $q = -1$ 或 $q^2 = -1$ 或 $q^3 = -1$.

所以 $q = -1$,

则 $k = \frac{1}{2}$, 此时直线 PN 与 l_2 平行或重合, 与题意不符, 故不存在直线 l_2 , 满足题意.