2018全国高考模拟卷九

本试卷分为两卷，第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题，满分 150 分，考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷（选择题　共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x|y=\ln(2-x)\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $(1,3)$　B. $(1,3]$　C. $[-1,2)$　D. $(-1,2)$

2. 复数 z 满足$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot z=3+4\mathrm{i}$，则$|z|=$（　　）

A. $2\sqrt{6}$　B. $\sqrt{7}$　C. $5\sqrt{2}$　D. 5

3. 已知 $\mathbf{R}$ 上的奇函数$f(x)$满足：当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+x-1$，则$f[f(-1)]=$（　　）

A. -1　B. 1　C. 2　D. -2

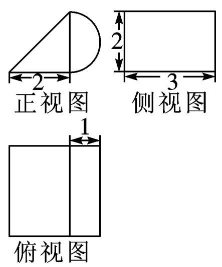
4. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积等于（　　）cm^3.

A. $4+\frac{2}{3}\pi$

B. $4+\frac{3}{2}\pi$

C. $6+\frac{2}{3}\pi$

D. $6+\frac{3}{2}\pi$



第 4 题图

5. 下列命题正确的个数为（　　）

①“$\forall x\in\mathbf{R}$ 都是 $x^2\geqslant 0$”的否定是“$\exists x_0\in\mathbf{R}$ 使得 $x_0^2\leqslant 0$”；

②“$x\neq 3$”是“$|x|\neq 3$”成立的充分条件；

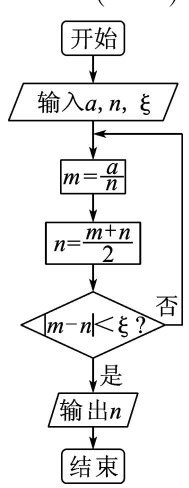
③命题“若 $m\leqslant\frac{1}{2}$，则方程 $mx^2+2x+2=0$ 有实数根”的否命题为真命题.

A. 0　B. 1

C. 2　D. 3

6. 美索不达米亚平原是人类文明的发祥地之一. 美索不达米亚人善于计算，他们创造了优良的计数系统，其中开方算法是最具有代表性的. 程序框图如图所示，若输入 a,n,ξ 的值分别为 8，2，0.5，（每次运算都精确到小数点后两位）则输出结果为（　　）

A. 2.81　B. 2.82　C. 2.83　D. 2.84



第 6 题图

7. 随着国家二孩政策的全面放开，为了调查一线城市和非一线城市的二孩生育意愿，某机构用简单随机抽样方法从不同地区调查了 100 位育龄妇女，结果如右图.

	非一线	一线	总计
愿生	45	20	65
不愿生	13	22	35
总计	58	42	100

附表：

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

由$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$算得，

$K^2=\frac{100\times(45\times 22-20\times 13)^2}{58\times 42\times 35\times 65}\approx 9.616$

参照附表，得到的正确结论是（　　）

A. 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下，认为“生育意愿与城市级别有关”

B. 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下，认为“生育意愿与城市级别无关”

C. 有 99% 以上的把握认为“生育意愿与城市阶级有关”

D. 有 99% 以上的把握认为“生育意愿与城市级别无关”

8. 若 x,y 满足条件$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\x-2y+6\geqslant 0\\x\leqslant 2\end{cases}$，则目标函数 $z=x^2+y^2$ 的最小值是（　　）

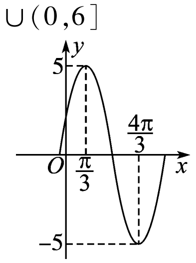
A. $\sqrt{2}$　B. 2　C. 4　D. $\frac{68}{9}$

9. 已知 $A(1,2)$，$B(2,11)$，若直线 $y=\left(m-\frac{6}{m}\right)x+1$（$m\neq 0$）与线段 AB 相交，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $[-2,0)\cup[3,+\infty)$　B. $(-\infty,-1]\cup(0,6]$

C. $[-2,-1]\cup[3,6]$　D. $[-2,0)\cup(0,6]$

10. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$0<\varphi<\pi$）的部分图像如下图所示，若$f(x_0)=3$，$x_0\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，则 $\sin x_0$ 的值为（　　）



A. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$　B. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

C. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$　D. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

11. 设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左焦点为 F_1，左顶点为 A，过 F_1 作 x 轴的垂线交双曲线于 P、Q 两点，过 P 作 PM 垂直 QA 于 M，过 Q 作 QN 垂直 PA 于 N，设 PM 与 QN 的交点为 B. 若 B 到直线 PQ 的距离大于 $a+\sqrt{a^2+b^2}$，则该双曲线的离心率的取值范围是（　　）

A. $(1,\sqrt{2})$　B. $(\sqrt{2},+\infty)$

C. $(1,2\sqrt{2})$　D. $(2\sqrt{2},+\infty)$

12. 若函数$f(x)=[x^3+3x^2+(a+6)x+6-a]e^{-x}$在区间$(2,4)$上存在极大值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-32)$　B. $(-\infty,-27)$

C. $(-32,-27)$　D. $(-32,-27]$

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\left(1-\frac{1}{x}\right)(1+x)^4$ 的展开式中 x^2 项的系数为________.

14. $\int_0^1(2x+\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x=$________.

15. 已知半径为 1 的球 O 内切于正四面体 $A-BCD$，线段 MN 是球 O 的一条动直径（M,N 是直径的两端点），点 P 是正四面体 $A-BCD$ 的表面上的一个动点，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围是________.

16. $\triangle ABC$ 中，$\sin(A-B)=\sin C-\sin B$，D 是边 BC 的一个三等分点（靠近点 B），记$\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle BAD}=\lambda$，则当 λ 取最大值时，$\tan\angle ACD=$________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，数列$\{b_n\}$是等比数列，满足 $a_1=3$，$b_1=1$，$b_2+S_2=10$，$a_5-2b_2=a_3$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

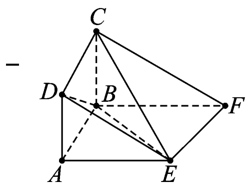
（Ⅱ）令 $c_n=a_n\cdot b_n$，设数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

在如图所示的多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为正方形，底面 $ABFE$ 为直角梯形，$\angle ABF$ 为直角，$AE\parallel BF$，$AB=\frac{1}{2}BF=1$，平面 $ABCD\perp$平面 $ABFE$.

（Ⅰ）求证：$DB\perp EC$；

（Ⅱ）若 $AE=AB$，求二面角 $C-EF-B$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

一个正四面体的“骰子”（四个面分别标有 1，2，3，4 四个数了），掷一次“骰子”三个侧面的数字的和为“点数”，连续抛掷“骰子”两次.

（Ⅰ）设 A 为事件“两次掷‘骰子’的点数和为 16”，求事件 A 发生的概率；

（Ⅱ）设 X 为两次掷“骰子”的点数之差的绝对值，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,$F_1$,$F_2$ 分别是椭圆的左、右焦点,M 为椭圆上除长轴端点外的任意一点,且$\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)过点 $D(0,-2)$作直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点,点 N 满足 $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$($O$ 为原点),求四边形 $OANB$ 面积的最大值,并求此时直线 l 的方程.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x+ax$,($a\in\mathbf{R}$),其图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$两点,且 $x_1<x_2$.

(Ⅰ)求 a 的取值范围;

(Ⅱ)证明:$f'\left(\frac{3x_1+x_2}{4}\right)<0$;($f'(x)$为 $f(x)$的导函数)

(Ⅲ)设点 C 在函数 $f(x)$的图象上,且$\triangle ABC$ 为等边三角形,记$\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=t$,求$(t-1)(a+\sqrt{3})$的值.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

以直角坐标系的原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,已知点 P 的直角坐标为$(1,2)$,点 M 的极坐标为$(3,\frac{\pi}{2})$,若直线 l 过点 P,且倾斜角为$\frac{\pi}{6}$,圆 C 以 M 为圆心,3 为半径.

(Ⅰ)求直线 l 的参数方程和圆 C 的极坐标方程;

(Ⅱ)设直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点,求 $|PA|\cdot|PB|$.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x+\frac{1}{a}|(a>0)$.

(Ⅰ)当 $a=2$ 时,求不等式 $f(x)>3$ 的解集;

(Ⅱ)证明:$f(m)+f(-\frac{1}{m})\geqslant 4$.

2018全国高考模拟卷九

1. C 【点拨】本题考查集合的交集运算.

【解析】. $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$,可化为 $A\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$. $B=\{x|y=\ln(2-x)\}$ 可化为 $B=\{x|2-x>0\}=\{x|x<2\}$ $\therefore A\cap B=[-1,2)$. $\therefore$ C 选项正确.

2. D 【点拨】本题考查复数除法以及模的计算.

【解析】由 $\dfrac{1+i}{1-i}\cdot z=3+4i$

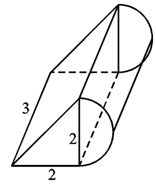
可得 $z=\dfrac{(3+4i)(1-i)}{1+i}=\dfrac{3-3i+4i-4i^2}{1+i}=\dfrac{7+i}{1+i}=\dfrac{(7+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{7-7i+i-i^2}{2}=\dfrac{8-6i}{2}=4-3i$

$\therefore |z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$. $\therefore$ D 选项正确.

3. A 【点拨】本题考查奇函数的基本性质.

【解析】$\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-1)=-f(1)=-[1^2+1-1]=-1$, $\therefore f[f(-1)]=f(-1)=-1$. $\therefore$ A 选项正确.

4. D 【点拨】本题考查三视图的还原.



【解析】由三视图可知,该几何体为一个三棱柱和一个半圆柱的组合体.

$V=V_{柱}+V_{圆柱}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times 3+\dfrac{1}{2}\times\pi\cdot 1^2\times 3$

$=6+\dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore$ D 选项正确.

5. B 【点拨】本题考查命题的否定形式,命题真假的判定.

【解析】①选项中"$\forall x\in\mathbf{R}$ 都有 $x^2\geqslant 0$"的否定为"$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2<0$", $\therefore$ ①式错误. ②选项中当 $x=-3$ 时无法推出 $|x|\neq 3$, $\therefore$ 由 $x\neq 3$ 不能推出 $|x|\neq 3$, $\therefore$ "$x\neq 3$"是"$|x|\neq 3$"的不充分条件. ③选项中原命题的否命题为"若 $m>\dfrac{1}{2}$,则方程 $mx^2+2x+2=0$ 无实数根." $\because\ \triangle=4-4m\cdot 2=4-8m<0$, $\therefore$ 无实数根. $\therefore$ ③式正确. $\therefore$ B 选项正确.

6. D 【点拨】本题考查程序框图的计算.

【解析】程序第一次运行时 $\begin{cases}m=\dfrac{8}{2}=4\\ n=\dfrac{4+2}{2}=3\end{cases}$ 此时 $|m-n|=1>\xi$,

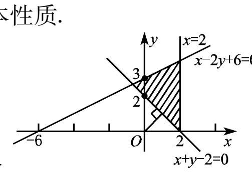
程序第二次运行时, $m=\dfrac{8}{3}\approx 2.67$, $n=\dfrac{2.67+3}{2}\approx 2.84$. 此时 $|m-n|=0.17<\xi$, $\therefore$ 输出 $n=2.84$. $\therefore$ D 选项正确.

注:本题要注意,题干中要求"每次运算都精确到小数点后两位",在计算 m 的值时应当化为小数,不能用分数来表示.

7. C 【点拨】本题考查 K^2 检验的基本概念.

【解析】B 选项应为"在犯错误的概率不超过 1% 的前提下,认为生育意愿与城市级别无关",而不是 0.1%. $\therefore$ C 选项正确.

8. B 【点拨】本题考查线性规划的基本性质.



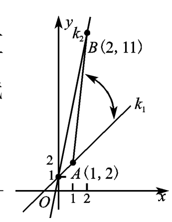
【解析】作出可行域如图所示, $z=x^2+y^2$ 可看作点 $(0,0)$ 到可行域内的点 (x,y) 之间距离的平方. 由图可知点 $(0,0)$ 到可行域中点的最短距离为图中垂线段的长,即 $(0,0)$ 到 $x+y-2=0$ 的距离. $\therefore z_{\min}=\left(\dfrac{|-2|}{\sqrt{1+1}}\right)^2=2$. $\therefore$ 选项 B 正确.

9. C 【点拨】本题考查两直线间位置关系问题,需要数形结合来分析.

【解析】$\because$ 直线 $y=(m-\dfrac{6}{m})x+1$ 与线段 AB 相交, $\therefore$ 点 A、B 分别位于直线 $y=(m-\dfrac{6}{m})x+1$ 的左右两侧. $\therefore$ 由线性规划的知识可知, $[(m-\dfrac{6}{m})\cdot 1+1-2]\cdot[(m-\dfrac{6}{m})\cdot 2+1-11]\leqslant 0$, $\therefore (m-\dfrac{6}{m})^2-6(m-\dfrac{6}{m})+5\leqslant 0$, $\therefore 1\leqslant m-\dfrac{6}{m}\leqslant 5$.

解得 $-2\leqslant m\leqslant -1$ 或 $3\leqslant m\leqslant 6$. $\therefore$ C 选项正确.

法 2:作出直线与点 A,B 的情况如下图.



直线 $y=(m-\dfrac{6}{m})x+1$ 过定点 $(0,1)$ 要使直线与线段 AB 相交,则由图可知应当满足直线的斜率位于 k_1 与 k_2 之间. $\therefore k_1\leqslant m-\dfrac{6}{m}\leqslant k_2$.

$\because k_1=\dfrac{2-1}{1-0}=1$, $k_2=\dfrac{11-1}{2-0}=5$. $\therefore 1\leqslant m-\dfrac{6}{m}\leqslant 5$. $\therefore$ 解得 $m\in[-2,-1]\cup[3,6]$. $\therefore$ C 选项正确.

10. A 【点拨】本题考查利用三角函数图象求表达式,以及凑角

求值.

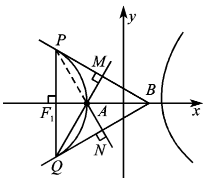
【解析】由图中三角函数的图象可得$\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{2}\\\dfrac{4\pi}{3}\omega+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\omega=1\\\varphi=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$

$A=5$,$\therefore f(x)=5\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$,$\because f(x_0)=3$,$\therefore 5\sin(x_0+\dfrac{\pi}{6})=3$. $\therefore\sin(x_0+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{3}{5}$. $\because\dfrac{\pi}{3}<x_0<\dfrac{5}{6}\pi$,$\therefore\dfrac{\pi}{2}<x_0+\dfrac{\pi}{6}<\pi$. $\therefore\cos(x_0+\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{4}{5}$.

$\therefore\sin x_0=\sin[(x_0+\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{\pi}{6}]=\sin(x_0+\dfrac{\pi}{6})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos(x_0+\dfrac{\pi}{6})\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-(-\dfrac{4}{5})\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}$ $\therefore$ A 选项正确.

11. B 【点拨】本题考查双曲线的几何性质.



【解析】由对称性可知,点 B 必位于 x 轴上,又$\because\angle PAF_1=\angle BAN$,$\angle BAN=\angle BQF_1$,$\therefore\angle PAF_1=\angle BQF_1$,$\therefore$ Rt$\triangle PAF_1\backsim$Rt$\triangle BQF_1$. 由图可知:$|AF_1|=c-a$,$|PF_1|=\dfrac{b^2}{a}$. $\because Rt\triangle PAF_1\backsim Rt\triangle BQF_1$,$\therefore\dfrac{c-a}{\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{\dfrac{b^2}{a}}{BF_1}$,$\therefore BF_1=\dfrac{\dfrac{b^4}{a^2}}{c-a}$. $\because BF_1>a+\sqrt{a^2+b^2}=a+c$,$\therefore\dfrac{\dfrac{b^4}{a^2}}{c-a}>a+c$. $\therefore\dfrac{b^4}{a^2}>c^2-a^2$,$\therefore\dfrac{b^2}{a^2}>1$.

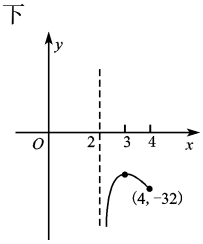
$\therefore e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}>\sqrt{2}$. $\therefore$ B 选项正确.

12. C 【点拨】本题考查函数极值点问题.

【解析】$f'(x)=e^{-x}[-x^3-ax+2a]$令$f'(x)=0$,$\therefore -x^3-ax+2a=0$. $\because f(x)$在$(2,4)$上有极大值,$\therefore -x^3-ax+2a=0$在$(2,4)$上有根,$\therefore a=\dfrac{x^3}{2-x}$,设$g(x)=\dfrac{x^3}{2-x}$,$\therefore g'(x)=\dfrac{2x^2(3-x)}{(2-x)^2}$,$2<x<4$. $\therefore g(x)$在$(2,3)$上$\uparrow$,在$(3,4)$上$\downarrow$.

$\because g(2)=-\infty$,$g(3)=-27$,$g(4)=-32$,

$\therefore$ 作出 $g(x)$ 图象如下



(Ⅰ)当 $a<-32$ 时,$y=a$ 与 $g(x)$ 有唯一的一个交点,不妨设为 x_0,则当 $x\in(2,x_0)$时,$a>\dfrac{x^3}{2-x}$,$\therefore -x^3+a(2-x)<0$,此时$f'(x)<0$;当$x\in(x_0,4)$时,$a<\dfrac{x^3}{2-x}$,$\therefore -x^3+a(2-x)>0$,此时$f'(x)>0$;$\therefore f(x)$在$(2,x_0)$上$\downarrow$,$(x_0,4)$上$\uparrow$,$\therefore$ 此时$f(x)$无极大值,$\therefore a<-32$ 舍去. (Ⅱ)当$-32<a<-27$时,$y=a$与$g(x)$有两个交点,不妨设x_1,x_2,且$x_1<x_2$,则可判知当$x\in(2,x_1)$时,$a>\dfrac{x^3}{2-x}$;当$x\in(x_1,x_2)$时,$a<\dfrac{x^3}{2-x}$;当$x\in(x_2,4)$时,$a>\dfrac{x^3}{2-x}$. $\therefore f(x)$在$(2,x_1)$上$\downarrow$,在(x_1,x_2)上$\uparrow$,在$(x_2,4)$上$\downarrow$,此时,$f(x)$在$(2,4)$上存在极大值,满足题意. (Ⅲ)当$a>-27$时,$y=a$与$g(x)$无交点,此时$f(x)\downarrow$无极大值. $\therefore$ 综上$-32<a<-27$. $\therefore$ C 选项正确.

13. 2 【点拨】本题考查二项式展开式的通项公式的使用.

【解析】在$(1-\dfrac{1}{x})(1+x)^4$的展开式中x^2项可看作是由1乘以$(1+x)^4$中x^2项以及$(-\dfrac{1}{x})$乘以$(1+x)^4$中的x^3项构成. $\therefore$ 由$(1+x)^4$的通项公式得$T_{r+1}=C_4^r1^{4-r}\cdot x^r=C_4^rx^r$. 令$r=2$得$x^2$项系数为$C_4^2$;令$r=3$得$x^3$项系数为$C_4^3$;$\therefore(1-\dfrac{1}{x})(1+x)^4$展开式中$x^2$项的系数为$C_4^2-C_4^3=2$.

14. $1+\dfrac{\pi}{4}$ 【点拨】本题考查积分的基本性质,注意带根式的积分要利用几何意义来求.

【解析】$\int_0^1(2x+\sqrt{1-x^2})dx=\int_0^12xdx+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=x^2|_0^1+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=1+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.

设$T=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$,令$y=\sqrt{1-x^2}$.

$\therefore x^2+y^2=1(0\leqslant x\leqslant 1,y\geqslant 0)$,$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$的几何意义为$\dfrac{1}{4}$单位圆的面积.

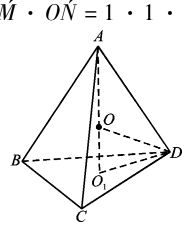
$\therefore T=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\dfrac{\pi}{4}$.

$\therefore\int_0^1(2x+\sqrt{1-x^2})dx=1+\dfrac{\pi}{4}$.

15. $[0,8]$ 【点拨】本题考查向量数量积的拆分.

【解析】$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})$

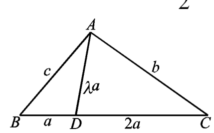
$=\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$



$\because M,O,N$三点共线且$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=0$. $\therefore\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1\cdot 1\cdot\cos 180°=-1$,$\therefore\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}^2+0-1=\overrightarrow{PO}^2-1$. $\because$ 正四面体$A-BCD$的内切球半径为1. 设四面体$A-BCD$边长为a,$\therefore\dfrac{\sqrt{6}}{12}a=1$,$\therefore a=2\sqrt{6}$,$\therefore\triangle BCD$外接圆半径为$r=2\sqrt{2}$. 在 $Rt\triangle OO_1D$ 中,$OD=\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2}=3$,$\therefore 1\leqslant\overrightarrow{PO}^2\leqslant|OD|^2$,$\therefore 1\leqslant\overrightarrow{PO}^2\leqslant 9$,$\therefore\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}\in[0,8]$.

16. $2+\sqrt{3}$ 【点拨】本题考查正余弦定理的应用.

【解析】由$\sin(A-B)=\sin C-\sin B$可化得$\sin(A-B)=\sin(A+B)-\sin B$. $\therefore\sin B=2\cos A\sin B$. $\because\sin B\neq 0$,$\therefore\cos A=\dfrac{1}{2}$.



$\therefore A=60°$设$BD=a$,则$DC=2a$.

$\because\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{BD}=\lambda$,$\therefore AD=\lambda a$.

$\because\angle ADB=\pi-\angle ADC$,$\therefore\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$,$\therefore\dfrac{a^2+\lambda^2a^2-c^2}{2\lambda a^2}=-\dfrac{\lambda^2a^2+4a^2-b^2}{2\cdot 2a\lambda a}$,$\therefore$ 化得:$6a^2+3\lambda^2a^2=2c^2+b^2$①,$\because\cos A=\dfrac{1}{2}$. $\therefore\dfrac{c^2+b^2-9a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore 9a^2=c^2+b^2-bc$②

$\dfrac{①}{②}$得:$\dfrac{2+\lambda^2}{3}=\dfrac{2c^2+b^2}{c^2+b^2-bc}=\dfrac{2+\dfrac{b^2}{c^2}}{1+\dfrac{b^2}{c^2}-\dfrac{b}{c}}$

$=\dfrac{(\dfrac{b^2}{c^2}-\dfrac{b}{c}+1)+\dfrac{b}{c}+1}{\dfrac{b^2}{c^2}-\dfrac{b}{c}+1}=1+\dfrac{\dfrac{b}{c}+1}{\dfrac{b^2}{c^2}-\dfrac{b}{c}+1}$,设$\dfrac{b}{c}=x$

$\therefore\dfrac{2+\lambda^2}{3}=1+\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$,令$x+1=t$. $\therefore$ 上式$=1+$

$\frac{t}{(t-1)^2-(t-1)+1}=1+\frac{t}{t^2-3t+3}=1+\frac{1}{t+\frac{3}{t}-3}$. ∵ $t+\frac{3}{t}\geqslant 2\sqrt{3}$. ∴ $\frac{2+\lambda^2}{3}\leqslant 1+\frac{1}{2\sqrt{3}-3}$ ∴ $\lambda\leqslant\sqrt{2\sqrt{3}+4}=\sqrt{3}+1$ 当且仅当 $t=\sqrt{3}$时 λ 取得最大值,此时$\frac{b}{c}+1=\sqrt{3}$. ∴ $\frac{\sin B}{\sin C}=\sqrt{3}-1$. ∴ $\frac{\sin(60°+C)}{\sin C}=\sqrt{3}-1$. ∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{2}=\sqrt{3}-1$

∴ $\tan C=2+\sqrt{3}$.

17.【点拨】(Ⅰ)按照等差数列与等比数列的性质列出方程组即可.

(Ⅱ)本题考查错位相减的计算.

【解析】(Ⅰ)设数列$\{a_n\}$的公差为 d,数列$\{b_n\}$的公比为 q,则由$\begin{cases}b_2+S_2=10,\\a_5-2b_2=a_3,\end{cases}$得$\begin{cases}q+6+d=10.\\3+4d-2q=3+2d,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=2,\\q=2,\end{cases}$所以 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$,$b_n=2^{n-1}$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $c_n=(2n+1)\cdot 2^{n-1}$,

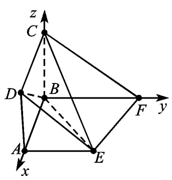
∴ $T_n=3\cdot 2^0+5\cdot 2^1+7\cdot 2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-2}+(2n+1)\cdot 2^{n-1}$①.

$2T_n=3\cdot 2^1+5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}+(2n+1)\cdot 2^n$②.

①-②得:$-T_n=3+2\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}-(2n+1)\cdot 2^n=1+2+2^2+\cdots+2^n-(2n+1)\cdot 2^n=2^{n+1}-1-(2n+1)\cdot 2^n=(1-2n)\cdot 2^n-1$

∴ $T_n=(2n-1)\cdot 2^n+1$

18.【点拨】本题考查利用空间直角坐标系求证线线垂直以及二面角的方法.



【解析】(Ⅰ)∵ 底面 $ABFE$ 为直角梯形,$AE//BF$,$\angle EAB=90°$. ∴ $AE\perp AB$,$BF\perp AB$. ∵ 平面 $ABCD\perp$平面 $ABFE$,平面 $ABCD\cap$平面 $ABFE=AB$. ∴ $AE\perp$平面 $ABCD$. $BF\perp$平面 $ABCD$. ∴ $BF\perp BC$. 设 $AE=t$,以 BA,BF,BC 所在的直线分别为 x,y,z 轴建立如图坐标系,则 $B(0,0,0)$,$C(0,0,1)$,$D(1,0,1)$,$E(1,t,0)$,$\overrightarrow{DB}=(-1,0,-1)$,$\overrightarrow{EC}=(-1,-t,1)$. ∵ $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EC}=0$,∴ $DB\perp EC$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $\overrightarrow{BC}=(0,0,1)$是平面 BEF 的一个法向量. 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 CEF 的法向量. ∵ $AE=AB=1$,∴ $E(1,1,0)$,$F(0,2,0)$∴ $\overrightarrow{CE}=(1,1,-1)$,$\overrightarrow{CF}=(0,2,-1)$由 $\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}\Rightarrow x+y-z=0$,由 $\overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{n}=0\Rightarrow 2y-z=0$. 令 $z=2$,得 $x=1$,$y=1$,故 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$是平面 CEF 的一个法向量.

∴ $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,即二面角 $C\text{-}EF\text{-}B$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

19.【点拨】本题考查古典概型的计算.

【解析】(Ⅰ)两次点数之和为 16,即两次的底面数字为:(1,3),(2,2),(3,1),$P(A)=\frac{3}{4\times 4}=\frac{3}{16}$.

(Ⅱ)X 的可能取值为 0,1,2,3 且 $P(X=0)=\frac{4}{4\times 4}=\frac{1}{4}$,$P(X=1)=\frac{3\times 2}{4\times 4}=\frac{3}{8}$,$P(X=2)=\frac{2\times 2}{4\times 4}=\frac{1}{4}$,$P(X=3)=\frac{2}{4\times 4}=\frac{1}{8}$,则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$E(X)=\frac{5}{4}$.

20.【点拨】(Ⅰ)利用椭圆的离心率公式及焦点三角形的周长公式,求得 a 和 c 的值,$b^2=a^2-c^2=1$,即可求得椭圆方程.

(Ⅱ)$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OD|\cdot|x_1-x_2|=|x_1-x_2|$. 将 $S_{\triangle AOB}$化成由 k 表示的式子,求出最值即可.

【解析】(Ⅰ)∵ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又∵ $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $2a+2c=4+2\sqrt{3}$. ∴ $a+c=2+\sqrt{3}$,∴ $a=2$,$c=\sqrt{3}$,∴ $a^2=4$,$b^2=1$.

∴ 椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(Ⅱ)∵ $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,∴ 四边形 $OANB$ 为平行四边形,显然直线 l 的斜率存在,设 l 的方程 $y=kx-2$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,把 $y=kx-2$ 代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得$(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$,由 $\Delta=16^2k^2-48(1+4k^2)>0$ 得 $k^2>\frac{3}{4}$,∴ $x_1+x_2=\frac{16k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$. ∵ $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OD|\cdot|x_1-x_2|=|x_1-x_2|$. ∴ $S_{OANB}=2S_{\triangle OAB}=2|x_1-x_2|=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{(\frac{16k}{1+4k^2})^2-4\frac{12}{1+4k^2}}=8\sqrt{\frac{4k^2-3}{(1+4k^2)^2}}$,令 $t=4k^2-3>0$,∴ $4k^2=t+3$,∴ $S_{OANB}=8\sqrt{\frac{t}{(t+4)^2}}=8\sqrt{\frac{1}{8+t+\frac{16}{t}}}\leqslant 8\sqrt{\frac{1}{16}}=2$. 当且仅当 $t=4$,即 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$时取等号,∴ $(S_{OANB})_{\max}=2$,此时 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

21.【点拨】(Ⅰ)分类讨论判断出 $f(x)$的单调性,求出 a 的范围.

(Ⅱ)将$\frac{3x_1+x_2}{4}$放缩成$\frac{3x_1+x_2}{4}<\frac{x_1+x_2}{2}$,要证$f'(\frac{3x_1+x_2}{4})<0$,只需证$f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$,利用$f(x_1)=f(x_2)$得出 a 与 x_1,x_2 的关系,将$f'(\frac{x_1+x_2}{2})$转化为 x_1,x_2 表示的式子,然后设$\frac{x_2-x_1}{2}=s$ 全化为关于 s 的函数式,证明即可.

【解析】(Ⅰ)∵ $f(x)=e^x+ax$,∴ $f'(x)=e^x+a$,若 $a\geqslant 0$,则 $f'(x)>0$,则函数 $f(x)$在 R 上单调递增,这与题设矛盾. ∴ $a<0$ 易知$f(x)$在$(-\infty,\ln(-a))$上单调递减,在$(\ln(-a),+\infty)$上单调递增,∴ $f(x)_{\min}=f(\ln(-a))=-a+a\ln(-a)$. 且 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$;$x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$.

∴ $f(\ln(-a))=-a+a\ln(-a)<0$,∴ $a<-e$.

(Ⅱ)∵ $\begin{cases}e^{x_1}+ax_1=0\\e^{x_2}+ax_2=0\end{cases}$,∴ 两式相减得 $a=-\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$. 记$\frac{x_2-x_1}{2}=s(s>0)$,则$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}[2s-(e^s-e^{-s})]$,设 $g(s)=2s-(e^s-e^{-s})$,则 $g'(s)=2-(e^s+e^{-s})<0$,

∴ $g(s)$是单调减函数,则有 $g(s)<g(0)=0$,而$\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}>0$,

∴ $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$. 又∵ $f'(x)=e^x+a$ 是单调增函数,且$\frac{3x_1+x_2}{4}<\frac{x_1+x_2}{2}$. ∴ $f'(\frac{3x_1+x_2}{4})<f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$.

(Ⅲ)由$\begin{cases}e^{x_1}+ax_1=0\\e^{x_2}+ax_2=0\end{cases}$得$\begin{cases}e^{x_1}=-ax_1\\e^{x_2}=-ax_2\end{cases}$∴ $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}=-a\sqrt{x_1x_2}$,

设 $P(x_0,y_0)$,在等边三角形 ABC 中,易知 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\in(x_1,x_2)$,$y_0=f(x_0)<0$,由等边三角形性质知 $y_0=-\frac{\sqrt{3}(x_2-x_1)}{2}$,

∴ $y_0+\frac{\sqrt{3}(x_2-x_1)}{2}=0$,即 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}+\frac{a}{2}(x_2+x_1)+\frac{\sqrt{3}(x_2-x_1)}{2}$

$=0$，$\therefore -a\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{a}{2}(x_2+x_1)+\dfrac{\sqrt{3}(x_2-x_1)}{2}=0$，$\because x_1>0$，

$\therefore -a\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}+\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x_2}{x_1}+1\right)+\dfrac{\sqrt{3}\left(\dfrac{x_2}{x_1}-1\right)}{2}=0$，$\therefore -at+\dfrac{a}{2}(t^2+1)+\dfrac{\sqrt{3}(t^2-1)}{2}=0$，$(a+\sqrt{3})t^2-2at+a-\sqrt{3}=0$，$\therefore [(a+\sqrt{3})t+\sqrt{3}-a](t-1)=0$，又$\because t>1$，$\therefore (a+\sqrt{3})t+\sqrt{3}-a=0$，

$\therefore t=\dfrac{a-\sqrt{3}}{a+\sqrt{3}}$，$t-1=-\dfrac{2\sqrt{3}}{a+\sqrt{3}}$，

$\therefore (t-1)(a+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$.

22.【点拨】本题考查极坐标与直角坐标系的互化，利用$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|$来计算即可.

【解析】(Ⅰ)直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

圆 C 的极坐标方程为$\rho=6\sin\theta$.

(Ⅱ)圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-3)^2=9$，把$\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=2+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$代入 $x^2+(y-3)^2=9$，得 $t^2+(\sqrt{3}-1)t-7=0$，

$\therefore t_1\cdot t_2=-7$，

又$|PA|=|t_1|$，$|PB|=|t_2|$，$\therefore |PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=7$.

23.【点拨】(Ⅰ)分类讨论脱去绝对值求解.

(Ⅱ)利用“$|a|+|b|\geqslant|a+b|$”可将 $f(m)+f\left(-\dfrac{1}{m}\right)$化成$2\left|m+\dfrac{1}{m}\right|$，然后用均值不等式即可求得.

【解析】(Ⅰ)当 $a=2$ 时，$f(x)=|x+2|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$，原不等式等价于$\begin{cases}x<-2\\ -x-2-x-\dfrac{1}{2}>3\end{cases}$或$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant-\dfrac{1}{2}\\ x+2-x-\dfrac{1}{2}>3\end{cases}$或$\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ x+2+x+\dfrac{1}{2}>3\end{cases}$解得：$x<-\dfrac{11}{4}$或 $x\in\phi$ 或 $x>\dfrac{1}{4}$，所以不等式的解集为$\left\{x\middle|x<-\dfrac{11}{4}\text{或}x>\dfrac{1}{4}\right\}$.

(Ⅱ)$f(m)+f\left(-\dfrac{1}{m}\right)=|m+a|+\left|m+\dfrac{1}{a}\right|+\left|-\dfrac{1}{m}+a\right|+\left|-\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{a}\right|=|m+a|+\left|-\dfrac{1}{m}+a\right|+\left|m+\dfrac{1}{a}\right|+\left|-\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{a}\right|\geqslant2\left|m+\dfrac{1}{m}\right|=2\left(|m|+\left|\dfrac{1}{m}\right|\right)\geqslant4$.