

2018全国高考模拟卷七

本试卷分为两卷,第Ⅰ卷为选择题,第Ⅱ卷为非选择题,满分150分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题 共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知 i 为虚数单位, $\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数,若 $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, 则 $\bar{z}^2 =$ ()

- A. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
C. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1\right\}$, $B = \left\{x \mid x^2 - 6x + 8 \leq 0\right\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{x \mid x \leq 0\}$
B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$
C. $\{x \mid 0 < x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$
D. $\{x \mid 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$

3. 如果双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \sqrt{5}x$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{6}$
C. $\sqrt{5}$ D. 4

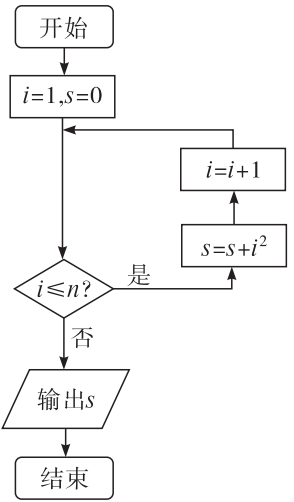
4. 如图是求 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$ 的值的程序框图, 则正整数 n 为 ()

- A. 50
B. 99
C. 100
D. 101

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比 $q > 1$, 且 $a_1 + a_6 = 8$, $a_3 a_4 = 12$,

则 $\frac{a_{2017}}{a_{2007}} =$ ()

- A. 3 B. 6 C. 8 D. 9

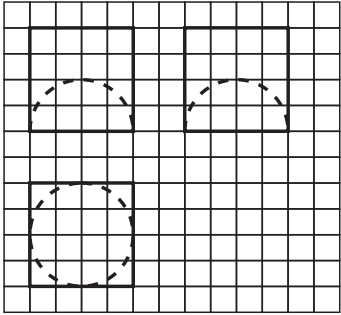


6. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2 \leq 0, \\ y - 2 \leq 0, \\ x + y - 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x + y$ 的取值范围是 ()

- A. $[2, 4]$ B. $[4, 6]$ C. $[2, 6]$ D. $(-\infty, 2]$

7. 如图, 图中每个小正方形的边长为1, 某几何体的三视图如图所示. 则这个几何体的表面积是 ()

- A. $80 + 16\pi$
B. $96 + 4\pi$
C. $80 + 8\pi$
D. $96 + 8\pi$



8. “石头、剪刀、布”, 又称“猜丁壳”, 是一种流传多年的猜拳游戏. 起源于中国, 然后传到日本、朝鲜等地, 随着亚欧贸易的不断发展它传到了欧洲, 到了近现代逐渐风靡世界. 其游戏规则是: 出拳之前双方齐喊口令, 然后在话音刚落时同时出拳, 握紧的拳头代表“石头”, 食指和中指伸出代表“剪刀”, 五指伸开代表“布”. “石头”胜“剪刀”, “剪刀”胜“布”, 而“布”又胜过“石头”, 若所出的拳相同, 则为和局. 小明和大黄两位同学进行“石头、剪刀、布”游戏比赛, 假设他们两人每次都随机出石头、剪刀、布中的某一个, 则猜拳2次, 大黄全部战胜小明的概率为 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

9. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, 如果 $m, n \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(m) = f(n)$, 则 $f(m + n)$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

10. 已知三棱锥 $M - ABC$ 的顶点都在同一个球 O 的表面上, 且 $MA = 1, MB = \sqrt{2}, MC = \sqrt{3}$, 当三棱锥 $M - ABC$ 的三个侧面面积之和最大时, 三棱锥 $M - ABC$ 与球 O 的

体积之比为 ()

- A. $\frac{1}{6\pi}$ B. $\frac{1}{3\pi}$ C. $\frac{1}{2\pi}$ D. $\frac{1}{\pi}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \in \mathbf{N}^*$. 若 $4a_5 + 3a_6 = 16$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 =$ ()

- A. 16 B. 28 C. 32 D. 48

12. 设函数 $f(x) = e^x(3x - 1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若有且只有一个整数 x_0 使得 $f(x_0) \leq 0$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{2}{e}, \frac{3}{4}\right)$ B. $\left[\frac{2}{e}, \frac{3}{4}\right)$ C. $\left(\frac{2}{e}, 1\right)$ D. $\left[\frac{2}{e}, 1\right)$

第Ⅱ卷(非选择题 共90分)

二、填空题(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 已知平面向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 120° , 且 $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 4$, 若 $(m\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则 $m =$ _____.

14. 已知 $(1 - 2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 =$ _____.

15. 已知点 P 到 y 轴的距离比它到点 $(2, 0)$ 的距离小2, 则点 P 的轨迹方程是_____.

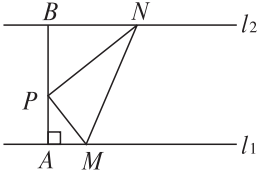
16. 已知函数 $y = f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x$, 当 $x < 0$ 时, $f(-x) = af(x) (a > 0)$. 当任意实数 $m \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, 函数 $g(x) = f(x) - mx - m$ 均有唯一零点, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题(本大题共6小题, 共70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分12分)
如图, P 是两条平行直线 l_1, l_2 之间的一个定点, 且点 P 到 l_1, l_2 的距离分别为 $PA = 1, PB = \sqrt{3}$. 设 $\triangle PMN$ 的另两个顶点 M, N 分别在 l_1, l_2 上运动, 设 $\angle MPN = \alpha, \angle PMN = \beta, \angle PNM = \gamma$, 且满足 $\sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha (\cos \beta + \cos \gamma)$

(Ⅰ) 求 α ;

(Ⅱ) 求 $\frac{1}{PM} + \frac{\sqrt{3}}{PN}$ 的最大值.

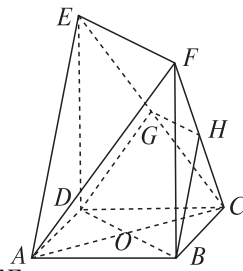


18. (本小题满分12分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形, 四边形 $BDEF$ 是矩形, 且 $BF = 2, CF = \sqrt{5}$, G 和 H 分别是 CE 和 CF 的中点.

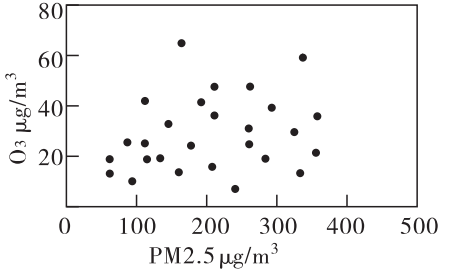
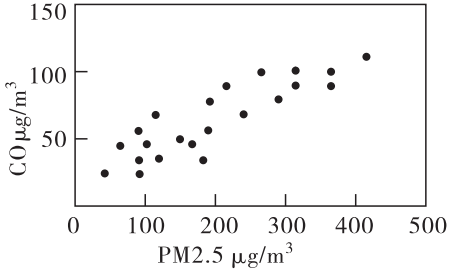
(Ⅰ) 求证: 平面 $ABCD \perp$ 平面 $BDEF$;

(Ⅱ) 求二面角 $B - GH - E$ 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

专家研究表明,PM2.5 是霾的主要成分,在研究 PM2.5 形成原因时,某研究人员研究了 PM2.5 与燃烧排放的 CO₂、NO₂、CO、O₃、PM₁₀ 等物质的相关关系. 下图是 PM2.5 与 CO 和 O₃ 相关性的散点图.



(I)根据上面散点图,请你就 CO、O₃ 对 PM2.5 的影响关系做出初步评价;

(II)以 100μg/m³ 为单位,在上述左图中取三个点,如下表所示:

PM2.5μg/m ³ (<i>x</i>)	1	2	4
COμg/m ³ (<i>y</i>)	0.5	1	1.5

求 $\hat{y}$ 关于 $\hat{y}$ 的回归方程,并估计当 CO 排放量是 200 μg/m³时,PM2.5 的值.

(用最小二乘法求回归方程的系数是 $b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$,

$a = \bar{y} - b \bar{x}$);

(III)我们知道雾霾对交通影响较大. H 市交通部门发现,在一个月内,当 CO 排放量分别是 60,120,180 时,某路口的交通流量(单位:万辆)依次是 800,600,200,而在一个月内,CO 排放量是 60,120,180 的概率依次是 $p, \frac{q}{2}, q\left(\frac{1}{2} < p < 1\right)$,求该路口一个月的交通流量期望值的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 *C* 的中心在坐标原点, *F* 是椭圆在 *y* 轴正半轴上的一个焦点,其短轴长为 $2\sqrt{2}$,离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(I)求椭圆 *C* 的方程;

(II)过点 *F* 分别作斜率为 k_1, k_2 的直线交椭圆 *C* 得到弦 *AB, CD*,它们的中点分别是 *M, N*. 当 $k_1 k_2 = 1$ 时,求证:直线 *MN* 过定点.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x + 1) - \frac{ax}{x + a} (x \geq 0)$

(I)当 $0 \leq a \leq 2$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II)证明:当 $x > 0$ 是 $(e^x - 1)\ln(x + 1) + e^x > x^2 + x + 1$

(e 为自然对数的底数).

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系和参数方程

在直角坐标系 *xOy* 中,以原点 *O* 为极点, *x* 轴的非负半轴为极轴,建立极坐标系,已知曲线 *C*₁

$$\begin{cases} x = -4 + \cos t \\ y = 3 + \sin t \end{cases} (t \text{ 为参数}), C_2: \begin{cases} x = 8 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}).$$

(I)求 *C*₁, *C*₂ 的普通方程,并说明它们分别表示什么曲线;

(II)若 *C*₁ 上的点 *P* 对应的参数 $t = \frac{\pi}{2}$, *Q* 为 *C*₂ 上的动点,求线段 *PQ* 中点 *M* 到直线 *C*₃; $\rho(\cos \theta - 2 \sin \theta) = 7$ 距离的最小值.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知 *m, n* 都是实数, $m \neq 0, f(x) = |x - 1| + |x - 2|$.

(I)若 $f(x) > 2$, 求实数 *x* 的取值范围;

(II)若 $|m + n| + |m - n| \geq |m|f(x)$ 对满足条件的所有 *m, n* 都成立,求实数 *x* 的取值范围.

2018全国高考模拟卷七

1. B 【点拨】本题考查复数的代数运算.

$$\text{【解析】} z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\bar{z}^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

2. D 【点拨】本题考查集合的运算

$$\text{【解析】全集 } U = \mathbf{R}, A = \{x | \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1\} = \{x | x \geq 0\}$$

$$B = \{x | x^2 - 6x + 8 \leq 0\} = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$$

$$\complement_U B = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$$

$$A \cap (\complement_U B) = \{x | 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$$

3. B 【点拨】本题考查根据双曲线方程求离心率.

$$\text{【解析】双曲线 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \text{ 的一条渐近线为}$$

$$y = \sqrt{5}x.$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{5} \quad b = \sqrt{5}a$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{6a^2}}{a} = \sqrt{6}$$

4. C 【点拨】本题考查程序框图和循环语句.

$$\text{【解析】本题利用当型循环求 } 1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2.$$

$$i \text{ 的最大值是 } 100 \quad i \leq n$$

$$\therefore n = 100.$$

5. D 【点拨】本题考查等比数列基本量的计算.

$$\text{【解析】等比数列 } \{a_n\} \text{ 中, 公比 } q > 1, a_1 + a_6 = 8, a_3 a_4 = 12.$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_6 = 8 \\ a_3 a_4 = a_1 a_6 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_6 = 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_6 = 2 \end{cases}$$

$$\because q > 1. \therefore \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_6 = 6 \end{cases} \quad q^{6-1} = \frac{a_6}{a_1} = 3, q^5 = 3$$

$$\frac{a_{2017}}{a_{2007}} = q^{10} = 3^2 = 9.$$

6. C 【点拨】本题考查直线线性规划相关计算.

$$\text{【解析】画出可行域如图, 直线 } l_1: 2x + y = 0.$$

当 l 过 $B(2,2)$ 时, $z_{\max} = 2 \times 2 + 2 = 6$

当 l 过 $C(0,2)$ 时, $z_{\min} = 2 \times 0 + 2 = 2$.

$\therefore z = 2x + y$ 的取值范围是 $[2, 6]$.

7. B 【点拨】本题考查简单组合体的表面积及空间几何体的三视图.

【解析】由三视图知,该几何体是一个棱长为 4 个正方体挖去一个半径为 2 的半球,其表面积为 $S_{\text{表}} = 6 \times 4^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2 = 6 \times 4^2 + \pi \times 2^2 = 96 + 4\pi$.

8. A 【点拨】本题考查古典概型及相互独立事件同时发生的概率.

【解析】在一局比赛中,小明大黄双方所有出拳方式如下表

大黄 \ 小明	石头	剪子	布
石头	(石头、石头)	(石头、剪子)	(石头、布)
剪子	(剪子、石头)	(剪子、剪子)	(剪子、布)
布	(布、石头)	(布、剪子)	(布、布)

共 9 种,其中大黄取胜的出拳方式只有 (石头、布) (剪子、石头) (布、剪子) 3 种.

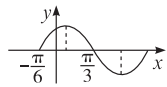
$\therefore$ 一局比赛中大黄取胜的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

由于两局比赛结果相互独立.

$\therefore$ 两局比赛中大黄全部战胜小明的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

9. C 【点拨】本题考查正弦型函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象性质及相关计算

【解析】 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)



的部分图象如图所示

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \pi,$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi)$$

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = k\pi - \frac{2\pi}{3}, \text{ 又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

由图象可以看出, $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, 图象的对称轴为 $x =$

$$\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

$$m, n \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right), f(m) = f(n)$$

则 m, n 关于 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称.

$$\therefore m + n = \frac{\pi}{6}.$$

$$f(m + n) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10. A 【点拨】本题考查三棱锥和外接球的体积计算

【解析】三棱锥 $M-ABC$ 的顶点都在同一个球 O 的表面上, 且 $MA = 1, MB = \sqrt{2}, MC = \sqrt{3}$, 当且仅当 MA, MB, MC 两两垂直时, 三棱锥 $M-ABC$ 的三个侧面面积之和最大, 此时, 球心 O 恰好是底面 $\triangle ABC$ 的外心, 球 O 的半径

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$V_{M-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$V_{\text{球}O} = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi$$

$$\frac{V_{M-ABC}}{V_{\text{球}O}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{6}\pi} = \frac{1}{6\pi}$$

11. C 【点拨】本题考查递推数列的前 n 项和的求法, 特别是构造类似于斐波那契数列的数列.

【解析】解法一

$\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad n \in \mathbb{N}^*$

可猜想 $\{a_n\}$ 类似于斐波那契数列 $\{b_n\}$.

$\{b_n\}$ 前 9 项分别为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

$\{b_n\}$ 的前 9 项之和为 $s_9 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 = 88$.

$$4b_5 + 3b_6 = 4 \times 5 + 3 \times 8 = 44$$

$$\text{而 } 4a_5 + 3a_6 = 16.$$

$$\frac{4a_5 + 3a_6}{4b_5 + 3b_6} = \frac{16}{44} = \frac{4}{11}$$

$$\therefore a_n = \frac{4}{11} b_n.$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = \frac{4}{11} (b_1 + b_2 + \cdots + b_9) = \frac{4}{11} \times 88 = 32.$$

解法二

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad n \in \mathbb{N}^* \quad 4a_5 + 3a_6 = 16$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = a_1 + 2a_2$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2a_1 + 3a_2$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 3a_1 + 5a_2$$

$$a_7 = a_5 + a_6 = 5a_1 + 8a_2$$

$$a_8 = a_6 + a_7 = 8a_1 + 13a_2$$

$$a_9 = a_7 + a_8 = 13a_1 + 21a_2$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$$

$$= (1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13) a_1 + (1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21) a_2 = 34a_1 + 54a_2$$

$$4a_5 + 3a_6 = 4(2a_1 + 3a_2) + 3(3a_1 + 5a_2)$$

$$= 17a_1 + 27a_2 = 16$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 34a_1 + 54a_2 = 2(17a_1 + 27a_2) = 2 \times 16 = 32$$

12. C 【点拨】设 $g(x) = e^x(3x - 1), h(x) = ax - a$, 对 $g(x)$ 求导, 将问题转化为存在唯一的整数 x_0 使得 $g(x_0)$ 在直线 $h(x) = ax - a$ 的下方, 求导数可得函数的极值, 解 $g(-1) - h(-1) = -4e^{-1} + 2a \geq 0$, 求得 a 的取值范围.

【解析】设 $g(x) = e^x(3x - 1), h(x) = ax - a$,

则 $g'(x) = e^x(3x + 2)$,

$$\therefore x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), g'(x) < 0, g(x) \text{ 单调递减},$$

$$x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right), g'(x) > 0, g(x) \text{ 单调递增},$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3}, \text{ 取最小值 } -3e^{-\frac{2}{3}},$$

$$\therefore g(0) = -1 < -a = h(0),$$

$$g(1) - h(1) = 2e > 0,$$

直线 $h(x) = ax - a$ 恒过定点 $(1, 0)$ 且斜率为 a ,

$$\therefore g(-1) - h(-1) = -4e^{-1} + 2a > 0,$$

$$\therefore a > \frac{2}{e}, a < 1,$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围 } \left(\frac{2}{e}, 1\right).$$

13. 1 【点拨】本题考查平面向量的数量积及向量垂直的充要条件.

□ □ □ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 夹角 $\theta = 120^\circ$, $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$

$$(\mathbf{ma} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} = 0$$

$$\therefore (\mathbf{ma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$ma^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$m|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = 0$$

$$4m + 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore m = 1$$

14. -2 □ □ □ 本题考查二项展开式各项系数和,可用赋值法

$$\square \square \square (1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$$

$$= 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$$

$$\text{令 } x=1 \text{ 则 } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = (1-2)^7 = -1$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = (a_0 + a_1 + \cdots + a_7) - a_0 = -1 - 1 = -2.$$

15. $y=0$ ($x < 0$) 和 $y^2 = 8x$ ($x \geq 0$)

□ □ □ 本题考查根据条件求动点的轨迹方程

□ □ □ 设 $P(x, y)$, 则 P 到 y 轴的距离为 $|x|$.

P 到 $(2, 0)$ 的距离为 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

P 点的轨迹方程满足 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - |x| = 2$

$$(x-2)^2 + y^2 = (|x| + 2)^2$$

$$y^2 = 4x + 4|x|.$$

当 $x \geq 0$ 时, 方程为 $y^2 = 8x$.

当 $x < 0$ 时, 方程为 $y = 0$.

16. $[3, +\infty)$ □ □ □ 本题考查分段函数解析式的求法,利用数形结合思想解决方程的根与函数零点及参数范围的确定.

□ □ □ $y = f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x$.

当 $x < 0$ 时, $f(-x) = af(x)$ ($a > 0$)

$$\text{即 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{a}f(-x) = \frac{1}{a}e^{-x}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \frac{1}{a}e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

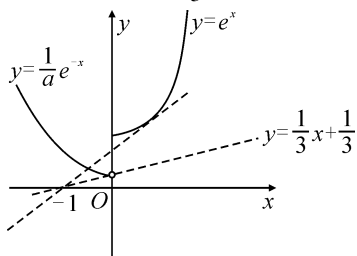
当 $m \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 时

$g(x) = f(x) - mx - m$ 有唯一零点.

即 $f(x) = mx + m$ 有唯一解.

即 $y = f(x)$ 的图象与 $y = mx + m$ 的图象只有一个交点.

分别画出 $y = f(x)$ 的图象和 $m = \frac{1}{3}$, $m = 1$ 时 $y = mx + m$ 的图象



如图所示. 直线 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ 与 y 轴交点为 $A\left(0, \frac{1}{3}\right)$

曲线 $y = \frac{1}{a}e^{-x}$ 与 y 轴的交点为 $B\left(0, \frac{1}{a}\right)$

当且仅当 B 与 A 重合或 B 在 A 下方时

$g(x) = f(x) - mx - m$ 均有唯一零点

$$\text{此时 } \frac{1}{a} \leq \frac{1}{3} \quad (a > 0) \quad \text{解得 } a \geq 3$$

$\therefore a$ 的取值范围为 $a \in [3, +\infty)$.

17. □ □ □ (I) 本题主要考查利用正弦定理余弦定理解三角形的问题.

(II) 本题主要考查把几何量表示成三角函数式进而求最值的问题.

□ □ □ (I) 设 $MN = p$, $PN = m$, $PM = n$, 由正弦定理和余弦定理得 $m + n = p \left(\frac{p^2 + n^2 - m^2}{2pn} + \frac{p^2 + m^2 - n^2}{2pm} \right)$

化简整理得 $m^2 + n^2 = p^2$. 由勾股定理逆定理得 $\alpha = 90^\circ$.

(II) 设 $\angle PMA = \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle APM$ 中, $PM \cdot \sin\theta = PA$, 即 $PM = \frac{1}{\sin\theta}$,

由(1)知 $\angle MPN = \frac{\pi}{2}$, 故 $\angle BPN = \theta$,

所以在 $\text{Rt}\triangle BPN$ 中, $PN \cdot \cos\theta = PB$, 则 $PN = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{PM} + \frac{\sqrt{3}}{PN} = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4},$$

所以当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{1}{PM} + \frac{\sqrt{3}}{PN}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

18. □ □ □ (I) 本题考查根据已知条件证明平面与平面垂直的方法

(II) 本题考查根据已知条件计算二面角的余弦值,可用传统几何方法,也可用向量法.

□ □ □ (I) 由题意得, $BC = 1$, $BF = 2$, $CF = \sqrt{5}$,

$BC^2 + BF^2 = CF^2$, 所以 $BF \perp BC$,

又四边形 $BDEF$ 是矩形, 所以 $BF \perp BD$, $BD \cap BC = B$,

从而 $BF \perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $BF \subset$ 平面 $BDEF$, 所以平面 $ABCD \perp$ 平面 $BDEF$.

(II) 由题意及(I)知, DA, DC, DE 两两垂直,

分别以 DA, DC, DE 为 x, y, z 轴建立如图

所示的空间直角坐标系,

则可得 $D(0, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$,

$B(1, 1, 0)$, $E(0, 0, 2)$, $F(1, 1, 2)$,

又 G 和 H 分别是 CE 和 CF 的中点, 所以

$G\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $H\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$,

所以 $\overrightarrow{DB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{DG} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\overrightarrow{CE} = (0, -1, 2)$,

$\overrightarrow{CF} = (1, 0, 2)$,

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 是平面 $BDGH$ 的一个法向量, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DG} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{1}{2}y + z = 0 \end{cases} \text{ 可取 } y = -2, \text{ 得 } \mathbf{n} = (2, -2, 1).$$

设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 是平面 CEF 的一个法向量, 则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \end{cases} \text{ 同理可得 } \mathbf{m} = (-2, 2, 1).$$

所以 $\cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{-4 - 4 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = -\frac{7}{9}$,

又二面角 $B-GH-E$ 为钝二面角.

所以二面角 $B-GH-E$ 的余弦值为 $-\frac{7}{9}$.

19. □ □ □ (I) 本题主要考查根据散点图判断两个变量的相关关系.

(II) 本题主要考查利用最小二乘法求 $\hat{y}$ 关于 $\hat{x}$ 的回归方程, 并求值.

(III) 本题主要考查根据已知条件列出随机变量的分布列, 并求随机变量的期望值的最值范围.

□ □ □ (I) CO 对 $\text{PM}_{2.5}$ 有正相关关系, 而 O_3 对 $\text{PM}_{2.5}$ 没有相关关系.

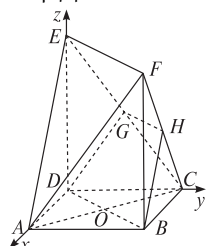
(II) $b = \frac{9}{28}$, $a = \frac{1}{4}$, $\hat{y} = \frac{9}{28}\hat{x} + \frac{1}{4}$, 当 CO 为 200 时, 即 $\hat{y} = 2$

时, $\frac{9}{28}\hat{x} + \frac{1}{4} = 2$,

所以 $\hat{x} = \frac{49}{9}$, 即 $\text{PM}_{2.5} = \frac{49}{9} \times 100 = \frac{4900}{9} \approx 544 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

(说明: 本小题的结果可以用分数或者小数表示)

(III) 设交通流量是 X , 则得如下分布列:



交通流量 X	800	600	200
P	p	$\frac{1}{2}q$	q

$$\text{因为 } \begin{cases} p + \frac{q}{2} + q = 1 \\ \frac{1}{2} < p < 1 \end{cases}, \text{ 所以 } EX = 800 \times p + 600 \times \frac{1}{2}q + 200 \times q \\ = \frac{1400}{3}p + \frac{1000}{3}q \in \left(\frac{1700}{3}, 800 \right),$$

即 $566.7 < E(X) < 800$, 即交通流量期望值在 566.7 万辆到 800 万辆之间.

(说明: 本题的取值范围的值可以用分数或者小数表示)

20. 【点拨】(I) 本题考查根据已知条件确定椭圆的方程

(II) 本题考查直线与椭圆位置关系问题, 并考查证明直线过定点的方法.

【解析】(I) 设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由题意可

$$\text{得 } b = \sqrt{2}, \text{ 而 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 } a = \sqrt{3},$$

$$\text{于是, 椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{2} = 1.$$

(II) 记 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$, 有

$$2y_1^2 + 3x_1^2 = 6 \quad ①$$

$$2y_2^2 + 3x_2^2 = 6 \quad ②$$

$$① - ② \text{ 得: } 2(y_1^2 - y_2^2) + 3(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x_3}{y_3} = k_1 \quad ③$$

$$\text{另一方面, } \frac{y_3 - 1}{x_3} = k_1 \quad ④$$

$$\text{联立 } ③④ \text{ 得 } \begin{cases} x_3 = \frac{-2k_1}{2k_1^2 + 3} \\ y_3 = \frac{3}{2k_1^2 + 3} \end{cases}, \text{ 即 } M\left(\frac{-2k_1}{2k_1^2 + 3}, \frac{3}{2k_1^2 + 3}\right).$$

$$\text{同理, 得 } N\left(\frac{-2k_2}{2k_2^2 + 3}, \frac{3}{2k_2^2 + 3}\right), \text{ 注意到 } k_1 k_2 = 1,$$

$$\text{故 } N\left(\frac{-2k_1}{3k_1^2 + 2}, \frac{3k_1^2}{3k_1^2 + 2}\right).$$

容易知道 $k_1^2 \neq 1$, 若不然, $k_1 = 1$ 时, 注意到 $k_1 k_2 = 1$, 故 $k_1 = k_2 = 1$, 这不可能; 同理, $k_1 \neq -1$.

于是, 直线 MN 的斜率

$$k = \frac{\frac{3k_1^2}{3k_1^2 + 2} - \frac{3}{2k_1^2 + 3}}{\frac{-2k_1}{3k_1^2 + 2} - \frac{-2k_1}{2k_1^2 + 3}} = \frac{3k_1^2(2k_1^2 + 3) - 3(3k_1^2 + 2)}{-2k_1(2k_1^2 + 3) + 2k_1(3k_1^2 + 2)} = \frac{6k_1^4 - 6}{2k_1^3 - 2k_1} = \frac{3(k_1^2 + 1)}{k_1}.$$

$$\text{于是, 直线 } MN \text{ 的方程为 } y - \frac{3}{2k_1^2 + 3} = \frac{3(k_1^2 + 1)}{k_1} \left(x + \frac{2k_1}{2k_1^2 + 3} \right), \text{ 即 } y = \frac{3(k_1^2 + 1)}{k_1} x + 3,$$

$$\text{所以, 直线 } MN \text{ 过点 } (0, 3).$$

21. 【点拨】(I) 本题考查利用导数法求函数单调区间的方法

(II) 本题考查利用导数法证明不等式的方法.

【解析】(I) $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{a(x+a) - ax}{(x+a)^2} = \frac{x(x+2a-a^2)}{(x+1)(x+a)^2},$$

当 $0 \leq a \leq 2$ 时, $2a - a^2 \geq 0$, 故 $f'(x) \geq 0$,

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $[0, +\infty)$, 无单调减区间.

(II) 由 (I) 知当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 特别当 $a = 2$ 时,

$$\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2},$$

$$\text{下证 } \frac{2x}{x+2} > \frac{x^2}{e^x - 1}, \text{ 即证 } e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

$$\text{设函数 } g(x) = e^x - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right), \text{ 则 } g'(x) = e^x - (x+1),$$

$$\text{设 } h(x) = e^x - (x+1),$$

$$h'(x) = e^x - 1, \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } e^x > 1, \text{ 即 } h'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$$\text{从而 } h(x) = e^x - (x+1) > h(0) = 0 \quad ①$$

所以 $g'(x) > 0$.

$$\text{所以 } g(x) = e^x - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上是增函数, 从}$$

$$\text{而 } g(x) > g(0) = 0$$

$$\text{所以 } e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1, \text{ 即 } \frac{2x}{x+2} > \frac{x^2}{e^x - 1},$$

$$\text{所以 } \ln(x+1) > \frac{x^2}{e^x - 1}, \text{ 即 } (e^x - 1)\ln(x+1) > x^2.$$

又由上面证法中 ① 可知, $e^x > x + 1$.

由不等式的性质知, $(e^x - 1)\ln(x+1) + e^x > x^2 + x + 1$.

22. 【点拨】(I) 本题考查参数方程与普通方程的互化, 根据方程判断曲线形状

(II) 本题考查极坐标方程与普通方程的互化, 动点到定直线距离的最小值求法.

$$\text{【解析】(I) } C_1: (x+4)^2 + (y-3)^2 = 1, C_2: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

C_1 圆心为 $(-4, 3)$, 半径是 1 的圆, C_2 为中心是坐标原点焦点在 x 轴上, 长轴为 8 短轴为 3 的椭圆.

(II) 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $P(-4, 4), Q(8\cos\theta, 3\sin\theta)$, 故

$$M\left(-2 + 4\cos\theta, 2 + \frac{3}{2}\sin\theta\right),$$

$$C_3 \text{ 为直线 } x - 2y - 7 = 0, M \text{ 到 } C_3 \text{ 的距离 } d = \frac{\sqrt{5}}{5} |4\cos\theta -$$

$$3\sin\theta - 13| = \frac{\sqrt{5}}{5} |5\cos(\theta + \varphi) - 13|.$$

$$\text{其中 } \tan\varphi = \frac{3}{4}, \text{ 当 } \cos(\theta + \varphi) = 1 \text{ 时, } d \text{ 取得最小值 } \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

23. 【点拨】(I) 本题考查含绝对值的不等式的解法.

(II) 本题考查恒成立问题中求参数的取值范围.

$$\text{【解析】(I) } f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \\ 2x - 3, & x > 2, \end{cases} \text{ 由 } f(x) > 2 \text{ 得}$$

$$\begin{cases} 3 - 2x > 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x > 2 \\ 2x - 3 > 2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > \frac{5}{2}.$$

$$\text{故所求实数 } x \text{ 的取值范围为 } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

(II) 由 $|m+n| + |m-n| \geq |m|f(x)$ 且 $m \neq 0$ 得

$$\frac{|m+n| + |m-n|}{|m|} \geq f(x),$$

$$\text{又 } \frac{|m+n| + |m-n|}{|m|} \geq \frac{|m+n+m-n|}{|m|} = 2,$$

$$\therefore f(x) \leq 2,$$

$$\therefore f(x) > 2 \text{ 的解集是 } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right),$$

$$\therefore f(x) \leq 2 \text{ 的解集是 } \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

$$\therefore \text{ 所求实数 } x \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right].$$