2018全国高考模拟卷四

本试卷分为两卷，第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题，满分150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=$　（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

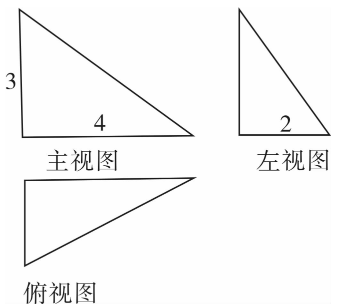
C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是增函数，$g(x)$ 是减函数，则下列结论正确的是　（　　）

A. $f(x)g(x)$ 是增函数　　B. $f(x)g(x)$ 是减函数

C. $f(x)-g(x)$ 是增函数　　D. $f(x)+g(x)$ 是减函数

3. 一个三棱锥的三视图是三个直角三角形，如图所示，则该三棱锥的外接球体积为　（　　）



A. 29π　　B. $\dfrac{29^{\frac{3}{2}}}{3}\pi$　　C. $\dfrac{29}{3}\pi$　　D. $\dfrac{29^{\frac{3}{2}}}{6}\pi$

4. 设数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的等差数列，$a_1=2$ 且 a_1-1，a_3，a_3+6 成等比数列，则 a_{2017}　（　　）

A. 1008　　B. 2016　　C. 1010　　D. 2017

5. 甲、乙、丙、丁、戊5名技术工人进行“劳动技术大比拼”，决出第1名到第5名的名次，甲、乙两位参赛者去问成绩，回答者对甲说“很遗憾，你和乙没有得到冠军”，对乙说“你当然不会是最差的”. 从上述回答分析，5人名次排列可能有（　　）种情况

A. 120　　B. 72　　C. 60　　D. 54

6. 已知点 P 为圆 B：$x^2+4x+y^2=0$ 上任意一点，$A(2,0)$，线段 AP 的垂直平分线 l 和直线 BP 相交于点 Q，当点 P 在圆上运动时，点 Q 的轨迹方程为　（　　）

A. $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$　　B. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x<0)$

C. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x>0)$

7. 2017年2月，中央电视台推出大型文化情感类节目《朗读者》后，反响热烈. 某学校人文社团为调查该节目对高中生阅读习惯产生的影响，决定从本校随机抽查了20名同学，调查他们平均每天在课外阅读的时间（单位：分钟），根据所得数据的茎叶图，以5为组距将数据分为8组：$[0,5)$，$[5,10)$，…，$[35,40]$ 作出频率分布直方图如图所示，则原始的茎叶图可能是　（　　）

A.

0	7 6
1	7 6 5 4 4 0
2	7 5 5 4 2 1 0
3	9 5 3 2 0

B.

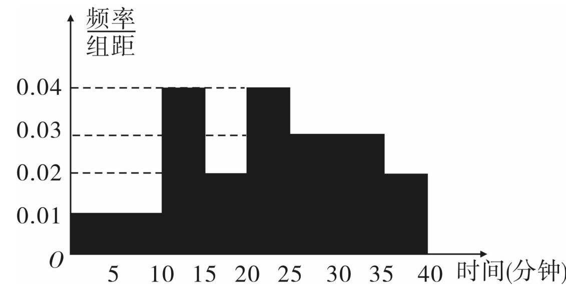
0	7 4
1	7 6 4 4 1 0
2	7 5 5 4 2 1 0
3	9 5 3 2 0

C.

0	7 4
1	7 7 4 4 4 0
2	7 5 5 5 2 1 0
3	9 5 3 2 0

D.

0	7 4
1	7 6 4 4 4 0
2	8 7 6 5 2 1 0
3	9 5 5 2 0



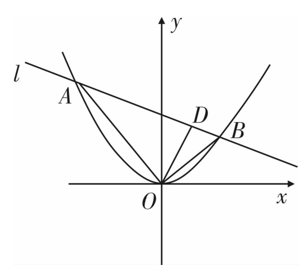
8. 已知 $\tan x=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin x\cos x=$　（　　）

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $-\dfrac{3}{10}$　　C. $\pm\dfrac{3}{10}$　　D. $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

9. 已知不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 2\\ x\leqslant 1\\ y\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域为 D，点 $M(x,y)$ 在 D 中运动时，$-x+y$ 的取值记为 a，则函数 $f(x)=4^x-a\cdot 2^{x+1}+1$ 有零点的概率是　（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

10. 如图，已知直线与抛物线 $x^2=2py$ 交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，$OD\perp AB$ 交 AB 于点 D，点 D 的坐标为 $(2,4)$，则 p 的值为　（　　）



A. 2　　B. 4　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{5}{2}$

11. 向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{e}|=1$，对 $\forall t\in\mathbf{R}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}|\leqslant|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|$，则　（　　）

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})$

C. $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})$　　D. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{x^3}{6}-ax$，若 $f(x)$ 存在两个极值点，则 a 的取值范围为　（　　）

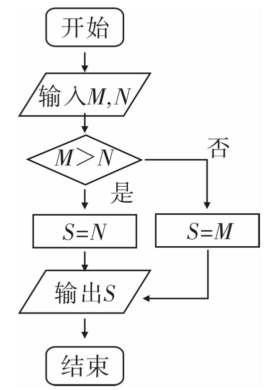
A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(-\infty,1)$

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 设 i 为虚数单位，则 $(x+\mathrm{i})^6$ 的展开式中含 x^4 的项为________



14. 已知 $M=\int_0^1\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x$，$N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$，由程序框图输出的 S 为________

15. 下列四个命题：

①“$a^2+b^2=0$，则 a，b 全为0”的逆否命题是“若 a，b 全不为0，则 $a^2+b^2\neq 0$”；

②已知回归直线的斜率的估计值为1.23，样本点的中心为 $(4,5)$，则回归直线方程为 $\hat{y}=1.23x+0.08$；

③随机变量 $X\sim N(5,\sigma^2)$，若 $P(X>10-a)=0.4$，则 $P(X>a)=0.6$；

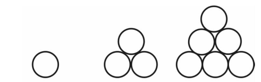
④设一组数据的方差是0.1，将这组数据的每个数据都乘以10，所得到的一组新数据的方差是10.

正确的命题序号为________

16.《算学启蒙》是中国元代数学家朱世杰所著。书中提出的“垛积术”，在现在仍有重要的启发意义. 如该书“堆积还原门”第四问：“今有三角垛果子，每面底子四十四个，问共积几何？”实质就是数列求和. 所谓“三角垛”果子，是指顶层一个果子（西瓜、苹果之类）；从上数第二层三个果子组成一个正三角形，每边两个果子；第三层六个果子组成一个正三角形，每边三个果子，等等，如图：（注：每个果子为半径一样的球，邻近的球外切）. 设 n 层“三角垛”果子的总数为 S_n，则

（1）$S_n=$________，（2）：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{S_i}=$________.

（注：参考公式：$\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$）



顶层　第一层　第二层

三、解答题（本大题共6小题，共70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C=2\sin B$，AD 为 $\angle BAC$ 的平分线.

（Ⅰ）求 $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}$；

（Ⅱ）若 $AD=2$，$BD=2\sqrt{2}$，求 AC 的长.

18.(本小题满分 12 分)

“共享单车”(也称“时租自行车”)是指企业与政府合作,在校园、地铁站点、公交站点、居民区、商业区、公共服务区等提供自行车单车共享服务,是共享经济的一种新形态,使用者需缴纳一定费用。2016 年年底以来,因其符合“低碳出行”的理念,在全国范围内得到大面积推广. 某单车公司为调查共享单车使用者对此项服务的“满意度”,在该公司的客户中随机采访 100 人,调查结果如下:

	满意	不满意	总计
男性	40	16	56
女性	20	24	44
总计	60	40	100

(Ⅰ)根据以上数据,能否在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下认为“满意度”与“性别”有关?

(Ⅱ)现从调查的男性用户中按分层抽样的方法选出 7 人,再从这 7 人中抽取 4 人。记这 4 人中对此项服务“满意”的人数为 X,试求 X 的分布列与数学期望.

参考公式:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中,$n=a+b+c+d$.

参考数据:

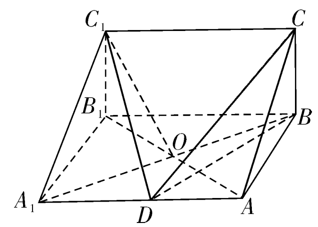
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	0.455	0.708	1.323	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.(本小题满分 12 分)

如图,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,四边形 ABB_1A_1 为边长为 a 的菱形,$BA=BC$,点 C_1 在平面 ABB_1A_1 的投影为其对角线的交点 O,点 D 在 AA_1 上,且 $A_1D=3DA$,$\angle AA_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$.

(Ⅰ)求证:$AA_1\perp$面 C_1OD;

(Ⅱ)求面 C_1OD 与面 CBD 所形成的锐二面角的平面角的余弦值.



20.(本小题满分 12 分)

已知点 M 为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任意一点,$F$ 是椭圆的焦点,$|MF|$的最大值与最小值之积为$\dfrac{a^2}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的离心率;

(Ⅱ)已知 $F(-1,0)$,过点 F 的直线 l 与椭圆 E 相交于 P,Q 两点,设 PQ 的中点为 N,PQ 的垂直平分线与 x 轴和 y 轴分别交于 A,B 两点,O 为坐标原点,记$\triangle NFA$ 的面积为 S_1,$\triangle OBA$ 的面积为 S_2,求$\dfrac{2S_1S_2}{S_1^2+S_2^2}$的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}-a\ln(x+1)$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线平行于 x 轴,求实数 a 的值;

(Ⅱ)当 $x>0$ 时,$f(x)>1$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

已知直线 $l:\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),在以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴的极坐标系中,曲线 $C:\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$.

(Ⅰ)写出曲线 C 的普通方程;

(Ⅱ)若曲线 C 与 l 交于 M,N,求$|MN|$.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

设函数 $f(x)=|x-a|+|x+b|$,$a>0$,$b>0$.

(Ⅰ)当 $a=b=1$ 时,求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集;

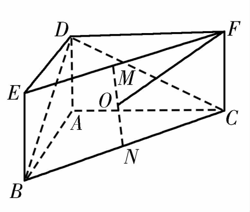
(Ⅱ)若 $a+b\leqslant 1$,$f(x)\geqslant 1$ 恒成立,求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值.

2018全国高考模拟卷四

1. C 【点拨】利用一元二次不等式得到集合 B,求交集即可.
【解析】由 $B=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$ 得:$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$,
故 $A\cap B=\{-1,0,1,2\}$

2. C 【点拨】利用单调性法则即可判断.
【解析】单调性法则:①增+增=增;②减+减=减;
③增-减=增;④减-增=减.
故可判断 C 正确.

3. D 【点拨】根据三视图画出三棱锥的立体图,再根据三棱锥的特点求外接球半径,即可求出体积.
【解析】将三视图还原为三棱锥 $A-BCD$. 由图可知,三棱锥 $A-BCD$ 的外接球即为三棱柱 $ABC-DEF$ 的外接球. 取 EF 中点 M,BC 中点 N,故 MN 中点 O 为外接球球心. 设 $OF=R$,根据三视图可知 $FC=3$. 故 $OM=\frac{1}{2}FC=\frac{3}{2}$,$BC=2\sqrt{5}$.



故 $MF=\frac{1}{2}BC=\sqrt{5}$.

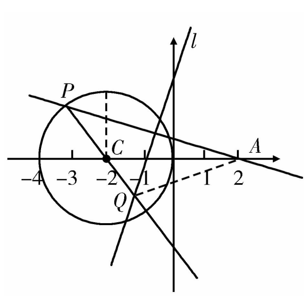
$\therefore R^2=OM^2+MF^2=\frac{9}{4}+5=\frac{29}{4}$,即 $R=\frac{\sqrt{29}}{2}$,

故 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{29^{\frac{3}{2}}}{6}\pi$.

4. C 【点拨】利用等差数列和等比数列的通项解题.
【解析】由 a_1-1,a_3,a_3+6 成等比数列可知 $a_3^2=(a_1-1)\cdot(a_3+6)$,即 $a_3^2=a_3+6$. 解得:$a_3=3$ 或 $a_3=-2$.
$\because\{a_n\}$ 为递增的等差数列,
$\therefore a_3=-2$(舍),$a_3=3$.
故 $2d=a_3-a_1=3-2=1\quad d=\frac{1}{2}$,
$\therefore a_{2017}=a_1+2016d=2+2016\times\frac{1}{2}=1010$.

5. D 【点拨】甲、乙不是第一名且乙不是最后一名,乙的限制最多,故先排乙,有 3 种情况,再排甲,也有 3 种情况,余下的问题是三个元素在三个位置的全排列,根据分布计数原理,即可求解.
【解析】根据题意,甲、乙都不是第一名且乙不是最后一名,有 3 种情况,再排甲,也有 3 种情况,余下 3 人有 A_3^3 种排法,故共有 $3\times3\times A_3^3=54$ 种.

6. C 【点拨】由垂直平分线的性质可以知道 $|PQ|=|QA|$,故 $||QA|-|QC||=||QP|-|QC||=|PC|=2$,根据双曲线的性质可知,$Q$ 点轨迹为双曲线.
【解析】$\because Q$ 在 PA 的垂直平分线上,$\therefore|PQ|=|QA|$,
$\therefore||QA|-|QC||=||QP|-|QC||=|PC|=2$.
$\therefore Q$ 点轨迹为以 C 和 A 为焦点的双曲线.
Q 点可以以 x 轴正半轴区域内,此时仍满足题意.

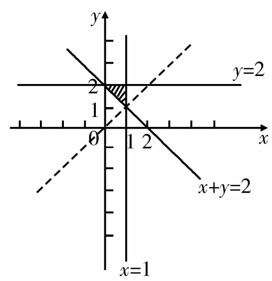


设双曲线的方程为:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,则 $\begin{cases}2a=2\\c=2\end{cases}$
$\because c^2=a^2+b^2$,
$\therefore a^2=1\quad b^2=3$.
$\therefore$ 点 Q 的轨迹为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

7. B 【点拨】利用频率分布直方图和茎叶图即可求解.
【解析】由频率分布直方图可知属于区间$[0,5)$的数据共有 $0.01\times5\times20=1$(个),排除 A. 属于$[20,25)$的数据共有 $0.04\times5\times20=4$(个). 排除 C 和 D,故选 B.

8. A 【点拨】利用同角三角函数关系及二倍角公式即可求解.
【解析】$\because\tan x=\frac{1}{3}\quad\therefore\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{3}$
$\because\sin^2x+\cos^2x=1$,
注意到 $\tan x=\frac{1}{3}>0$,故 x 只能为一,三象限角.
$\therefore\begin{cases}\sin x=\frac{1}{\sqrt{10}}\\\cos x=\frac{3}{\sqrt{10}}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin x=\frac{-1}{\sqrt{10}}\\\cos x=\frac{-3}{\sqrt{10}}\end{cases}$,故 $\sin x\cos x=\frac{3}{10}$.

9. C 【点拨】本题首先利用线性规划求出 a 的范围,再利用二次函数求符合条件的 a 的范围,最后利用几何概型求概率.
【解析】$\because f(x)=4^x-a\cdot2^{x+1}+1=4^x-2a\cdot2^x+1$. 令 $t=2^x>0$,
则 $f(x)=g(t)=t^2-2at+1$. 若函数 $f(x)=4^x-a\cdot2^{x+1}+1$ 有零点,即方程 $4^x-a\cdot2^{x+1}+1=0$ 有实根,即方程 $t^2-2at+1=0$ 有大于零的实根. 由韦达定理得 $t_1t_2=1>0$. 故方程的两个根同号,则 $t_1+t_2=2a>0$. 解得 $a>0$,又因为 $\Delta=4a^2-4\geqslant0$,解得 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant1$. 综上可得,$a\geqslant1$.

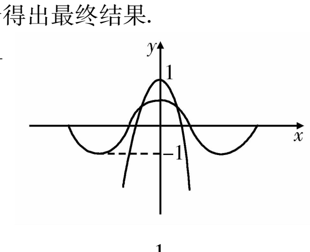


根据约束条件画出可行域:
设 $z=-x+y$,即 $y=x+z$. z 可看为直线在 y 轴的截距,由可行域可知,在$(1,1)$取最小值,在$(0,2)$取最大值. 故 $z_{\min}=0$,$z_{\max}=2$,即 $0\leqslant a\leqslant2$. 综上可得:$P=\frac{1}{2}$.

10. D 【点拨】根据直线斜率的关系及抛物线的性质求解.
【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,
$\because k_{OD}=\frac{4-0}{2-0}=2$,$OD\perp AB$,$\therefore k_{AB}=-\frac{1}{2}$,
$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $x+2y-10=0$……①.
将①代入到抛物线方程得:$x^2+px-10p=0$.
则 $x_1x_2=-10p$. $\because x_1^2=2py_1$,$x_2^2=2py_2$,
$\therefore(x_1x_2)^2=4p^2\cdot y_1y_2$,$\quad\therefore y_1y_2=\frac{100p^2}{4p^2}=25$.
$\because OA\perp OB\quad\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$. 即 $-10p+25=0$,故 $p=\frac{5}{2}$.

11. C 【点拨】利用向量的运算及二次函数恒成立问题即可得出正确答案.
【解析】将 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|\leqslant|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|$ 两边平方得:$t^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}t-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1\geqslant0$,
该式对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 成立,故 $\Delta\leqslant0$.
即 $\Delta=(-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2-4(-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)\leqslant0$,
即 $4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2+8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+4\leqslant0$. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+1)^2=0$,
$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=-1$.
$\because\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{e}|^2=-1+1=0$,
$\therefore\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})$,故 C 成立.

12. A 【点拨】利用导数与函数极值的关系,将极值点转换为两个函数的交点,利用数形结合得出最终结果.
【解析】$\because f(x)=\sin x+\frac{x^3}{6}-ax$,
$\therefore f'(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-a$.
$\because f(x)$ 存在两个极值点,
$\therefore f'(x)$ 存在两个零点.



令 $f'(x)=0$,即 $\cos x+\frac{1}{2}x^2-a=0$,即 $\cos x=-\frac{1}{2}x^2+a$.
设 $y_1=\cos x$,$y_2=-\frac{1}{2}x^2+a$,若方程 $\cos x+\frac{1}{2}x^2-a=0$ 有两个解,则函数 y_1 与 y_2 有两个交点.
根据图像可知,抛物线顶点应大于余弦函数最高点,故 $a>1$.

13. $-15x^4$ 【点拨】利用复数的运算和二项式定理.

【解析】此二项式展开式的通项为：$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(\mathrm{i})^r$，

令 $r=2$，

则 $T_3=C_6^2\cdot x^4\cdot(\mathrm{i})^2=-15x^4$

14. ln2 【点拨】利用积分的运算求出 M 和 N 的值，再代入程序进行运算.

【解析】$M=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$，故 $M=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln2$，

$N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$. 故 $N=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$，

将 M 与 N 代入程序中，即可输出 $S=\ln2$.

15. ②③④ 【点拨】本题考查知识点较多，需逐条判断.

【解析】“$a^2+b^2=0$，则 a,b 全为 0”的逆否命题为“若 a,b 不全为 0，则 $a^2+b^2\neq0$”，故①错误.

回归直线一定过样本中心点，故②正确.

根据正态分布概率对称性质可知③正确.

根据方差的性质，若 $D(x)=a$，则 $D(\lambda x)=\lambda^2D(x)=\lambda^2a$，故④正确.

16. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ $\quad\frac{3}{2}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}$ 【点拨】根据题意写出数列的通项，利用题中给出的公式及等差数列的求和公式进行解题.

【解析】(1)根据题意可知：

第一层：1 个

第二层：3 个 $=1+2$

第三层：6 个 $=1+2+3$

第四层：10 个 $=1+2+3+4$

⋮

根据此规律可知，第 n 层共有 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$个，

故此数列的通项为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n)$，求 S_n 采用分组求和法.

$S_n=\frac{1}{2}(1^2+1)+\frac{1}{2}(2^2+2)+\cdots+\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{1}{2}[(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)]=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

(2)由(1)可知 $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$，

$$\begin{aligned}故\frac{1}{S_n}&=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}\\&=3\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\\&=3\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}故\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S_i}&=3\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]+\\&\quad3\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]+\cdots+\\&\quad3\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]\\&=3\left[\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\right.\\&\quad\left.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]\\&=\frac{3}{2}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

17.【点拨】(Ⅰ)利用正弦定理及三角形面积公式.(Ⅱ)利用面积桥及余弦定理.

【解析】(Ⅰ)因为 $\sin C=2\sin B$，由正弦定理可得 $c=2b$，

又 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\angle BAD=\angle CAD$.

所以$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD}=\frac{AB}{AC}=2$.

(Ⅱ)设$\triangle ABC$ 的高为 h. 由(Ⅰ)知$\frac{1}{2}BD\cdot h=2\cdot\frac{1}{2}DC\cdot h$

且 $BD=2\sqrt{2}$，则 $DC=\sqrt{2}$，

又 $AC^2=4+2-2\times2\times\sqrt{2}\cos\angle ADC\cdots$①

$AB^2=4+8-2\times2\times2\sqrt{2}\cos(\pi-\angle ADC)\cdots$②

①×2+②得 $2AC^2+AB^2=24$.

即 $6AC^2=24$，所以 AC 的长 2.

18.【点拨】(Ⅰ)考查变量间的相关性，利用 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$解题.

(Ⅱ)利用离散型随机变量中的超几何分布解题.

【解析】(Ⅰ)由列联表可得

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100\times(40\times24-20\times16)^2}{56\times44\times60\times40}=\frac{1600}{231}\approx6.926$$

$\because 6.926<7.897$，

所以在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下，不能推断“满意度”与性别有关.

(Ⅱ)由题意知，所抽取的 7 位男性中，对此项服务满意的有 5 人，不满意的有 2 人，从这 7 人中再抽取 4 人，对此项服务满意的人数 X 的所有可能取值为 2，3，4.

$P(X=2)=\frac{C_5^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{2}{7}$；$P(X=3)=\frac{C_5^3C_2^1}{C_7^4}=\frac{4}{7}$；

$P(X=4)=\frac{C_5^4}{C_7^4}=\frac{1}{7}$；

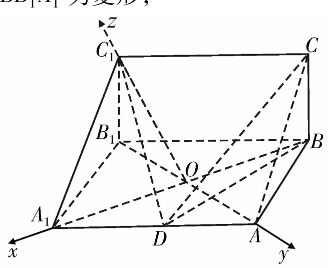
所以 X 的分布列是

X	2	3	4
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

所以 X 的数学期望是 $E(X)=2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{4}{7}+4\times\frac{1}{7}=\frac{20}{7}$.

19.【解析】(Ⅰ)建立空间直角坐标系，利用向量相乘为 **0**，证明垂直.(Ⅱ)求解平面 C_1OD 与平面 CBD 的法向量，利用法向量的夹角，求二面角.

【解析】(Ⅰ)ABB_1A_1 为菱形，



$\therefore AB_1\perp A_1B$，$C_1O\perp$面 ABB_1A_1.

$\therefore$ 以 OA_1 为 x 轴，OA 为 y 轴，

OC_1 为 z 轴建坐标系如图，

$\because AA_1=a$，$\angle AA_1B_1=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，$A(0,\frac{a}{2},0)$，

$\overrightarrow{A_1A}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},0)$，

$\overrightarrow{A_1D}=3\overrightarrow{DA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1A}=(-\frac{3\sqrt{3}}{8}a,\frac{3}{8}a,0)$，

$\therefore\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1D}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)+(-\frac{3\sqrt{3}}{8}a,\frac{3}{8}a,0)=(\frac{\sqrt{3}}{8}$

$a,\frac{3}{8}a,0)$,

$\therefore \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0$,

$\therefore OD\perp A_1A$

又 $C_1O\perp A_1A$

$C_1O\perp OD$

$\therefore A_1A\perp$ 面 C_1OD.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $\overrightarrow{A_1A}$ 为面 C_1OD 的一个法向量,记为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{A_1A}$ $=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},0)$,

由 $BA=BC=a$ 得 $B_1C_1=a$, $OB_1=\frac{a}{2}$, $\therefore OC_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore C_1=(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$,

$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}=(0,\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a)$,

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)+(\frac{\sqrt{3}}{8}a,\frac{3}{8}a,0)=(\frac{5\sqrt{3}}{8}a,\frac{3}{8}a,0)$,

设面 CBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{a}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot z=0\\ \frac{5\sqrt{3}}{8}a\cdot x+\frac{3}{8}a\cdot y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\sqrt{3}z\\ x=\frac{3}{5}z\end{cases}$.

令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}_2=(\frac{3}{5},-\sqrt{3},1)$,

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-\frac{4\sqrt{3}}{5}a}{a\cdot\frac{\sqrt{109}}{5}}=-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{109}}$.

$\therefore$ 面 C_1OD 与面 CBD 所成的锐二面角的平面角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{109}}=\frac{4\sqrt{327}}{109}$.

20.【点拨】(Ⅰ)利用椭圆的几何性质找到 a 和 c 的关系,即可解决.(Ⅱ)将直线方程和椭圆方程联立,写出 $\frac{2S_1S_2}{S_1^2+S_2^2}$ 的表达式,最后利用基本不等式求出取值范围.

【解析】(Ⅰ)设 $F(c,0)$,根据椭圆的性质得 $|MF|$ 的最大值为 $a+c$,最小值 $a-c$,由题意可得 $a^2-c^2=\frac{a^2}{2}$,即 $a=\sqrt{2}c$,所以,椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅱ)因为 $c=1$,由(Ⅰ)可知 $a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}$, $b=1$,椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

由题意可知 l 的斜率一定存在且不为0,设 l 的方程为 $y=k(x+1)$.并设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=k(x+1)\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$,得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$,

则 $x_1+x_2=\frac{-4k^2}{1+2k^2}$, $y_1+y_2=k(x_1+x_2+2)=\frac{2k}{1+2k^2}$.

因此,中点 $N\left(-\frac{2k^2}{1+2k^2},\frac{k}{1+2k^2}\right)$.

因为 PQ 垂直于 AN,所以, $\frac{\frac{k}{1+2k^2}}{-\frac{2k^2}{1+2k^2}-x_A}\cdot k=-1$

所以 $x_A=\frac{-k^2}{1+2k^2}$.

因为 $\mathrm{Rt}\triangle NFA$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle OBA$ 相似,

所以 $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{|AN|}{|OA|}\right)^2=\frac{(\frac{-k^2}{1+2k^2}+\frac{2k^2}{1+2k^2})+(\frac{k}{1+2k^2})^2}{(\frac{-k^2}{1+2k^2})^2}=1+\frac{1}{k^2}$ >1.

令 $\frac{S_1}{S_2}=m$,则 $m>1$,所以 $\frac{2S_1S_2}{S_1^2+S_2^2}=\frac{2}{m+\frac{1}{m}}<1$,即 $\frac{2S_1S_2}{S_1^2+S_2^2}$ 的取值范围是 $(0,1)$.

21.【点拨】(Ⅰ)利用导数的几何意义.(Ⅱ)构造新函数 $g(x)=e^x-x-ax(n(x+1))-1$, $x\geqslant0$,求导,分类讨论.

【解析】(Ⅰ)因为 $f'(x)=\frac{e^xx-(e^x-1)x}{x^2}-\frac{a}{x+1}$,依题意得 $f'(1)=0$,所以 $a=2$.

(Ⅱ)由 $f(x)>1$, $\forall x>0$,所以 $e^x-1-ax\ln(x+1)>x$.

令 $g(x)=e^x-x-ax\ln(x+1)-1$, $x\geqslant0$,

则 $g'(x)=e^x-1-a\ln(x+1)-\frac{ax}{x+1}$,

令 $h(x)=e^x-1-a\ln(x+1)-\frac{ax}{x+1}$, $x\geqslant0$,

则 $h'(x)=e^x-a\left[\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\right]$, $h'(0)=1-2a$.

①当 $a\leqslant0$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$,则 $g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$. 所以 $g(x)>0$, $\forall x>0$,即 $e^x-1-ax\ln(x+1)>x$,故当 $x>0$ 时, $f(x)>1$ 恒成立.

②当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $h'(x)$ 递增, $h'(x)_{\min}=1-2a\geqslant0$,所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$. 则 $g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$. 所以 $g(x)>0$, $\forall x>0$,即 $e^x-1-ax\ln(x+1)>x$,故当 $x>0$ 时, $f(x)>1$ 恒成立.

此时 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$.

③当 $a>\frac{1}{2}$ 时 $h'(x)$ 递增, $h'(x)_{\min}=1-2a<0$,当 $x\to+\infty$ 时, $h'(x)\to+\infty$,则 $\exists x_0\in(0,+\infty)$,使得 $h'(x_0)=0$,当 $x\in(0,x_0)$ 时, $h'(x)<0$,所以 $h(x)$ 递减,此时, $h(x_0)<h(0)=0$,不合题意.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

22.【点拨】(Ⅰ)利用极坐标和直角坐标的转换.(Ⅱ)利用直线参数方程 t 的几何意义.

【解析】(Ⅰ)因为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$,所以 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$,即曲线 C 的普通方程 $y^2=4x$.

(Ⅱ)将 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ 代入 $y^2=4x$ 得 $t^2-8\sqrt{3}t-16=0$.

由韦达定理得 $\begin{cases}t_1+t_2=8\sqrt{3}\\ t_1t_2=-16\end{cases}$,

所以 $|MN|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=16$.

23.【点拨】(Ⅰ)分段讨论去掉绝对值,解不等式.(Ⅱ)利用绝对值不等式的性质及基本不等式即可解决.

【解析】(Ⅰ)当 $a=b=1$ 时, $f(x)=|x-1|+|x+1|$ $=\begin{cases}-2x,x<-1\\ 2,-1\leqslant x\leqslant1.\\ 2x,x\geqslant1\end{cases}$

当 $x<-1$ 时, $f(x)\geqslant3x+2$,得 $x<-1$

当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时, $f(x)\geqslant3x+2$,得 $-1\leqslant x\leqslant0$,

当 $1\leqslant x$ 时, $f(x)\geqslant3x+2$ 无解.

综上所述:不等式的解集为 $\{x|x\leqslant0\}$.

(Ⅱ)因为 $|x-a|+|x+b|\geqslant|a+b|=a+b$.

由题意知 $a+b\geqslant 1$，又 $a+b\leqslant 1$，所以 $a+b=1$，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=1+1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 4$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时，取等号.

所以$\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$的最小值为 4.