2018全国高考模拟卷二

本试卷分为两卷，第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题，满分 150 分，考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷（选择题　共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知复数 z 满足 $iz=\dfrac{4+3i}{1+2i}$，则复数 z 在复平面内对应的点在　（　　）

A. 第一象限　B. 第二象限
C. 第三象限　D. 第四象限

2. 已知集合 $A=\{x|\log_3(2x-1)\leqslant 0\}$，$B=\{x|y=\sqrt{3x^2-2x}\}$，全集 $U=\mathbf{R}$，则 $A\cap(\complement_U B)$ 等于　（　　）

A. $(\frac{1}{2},1]$　B. $(0,\frac{2}{3})$
C. $(\frac{2}{3},1]$　D. $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$

3. 若 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，且 $3\cos 2\alpha=\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$，则 $\sin 2\alpha$ 的值为　（　　）

A. $-\frac{1}{18}$　B. $\frac{1}{18}$　C. $-\frac{17}{18}$　D. $\frac{17}{18}$

4. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{2^x-1}$，$g(x)=\dfrac{x}{2}$，则下列结论正确的是　（　　）

A. $h(x)=f(x)+g(x)$ 是偶函数
B. $h(x)=f(x)+g(x)$ 是奇函数
C. $h(x)=f(x)g(x)$ 是奇函数
D. $h(x)=f(x)g(x)$ 是偶函数

5. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上，AB,CD 的中点为双曲线 E 的两个焦点，且双曲线 E 的离心率是 2，直线 AC 的斜率为 k，则 $|k|$ 等于　（　　）

A. 2　B. $\frac{3}{2}$　C. $\frac{5}{2}$　D. 3

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{NC}$，$P$ 是直线 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，则实数 m 的值为　（　　）

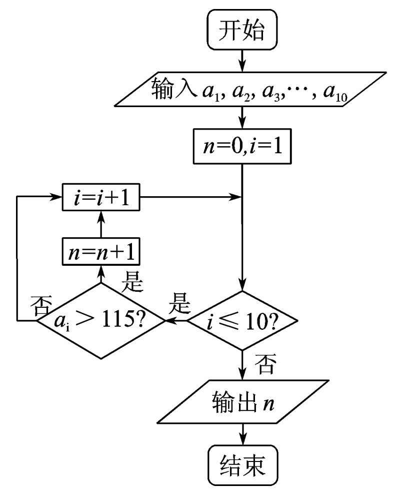
A. -4　B. -1　C. 1　D. 4

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象与直线 $y=a(0<a<A)$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 2，4，8，则 $f(x)$ 的单调递减区间是　（　　）

A. $[6k\pi,6k\pi+3]$，$k\in Z$
B. $[6k\pi-3,6k\pi]$，$k\in Z$
C. $[6k,6k+3]$，$k\in Z$
D. $[6k-3,6k]$，$k\in Z$

8. 某旅游景点统计了今年 5 月 1 号至 10 号每天的门票收入（单位：万元），分别记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$（如：a_3 表示 5 月 3 号的门票收入），下表是 5 月 1 号至 5 月 10 号每天的门票收入，根据表中的数据，下面程序框图输出的结果为　（　　）

时期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
门票收入（万元）	80	120	110	91	65	77	131	116	55	77



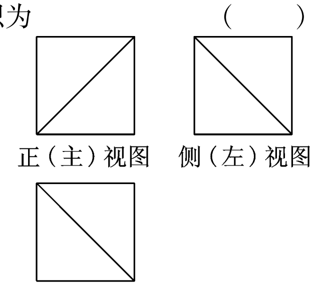
A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

9. 来自英、法、日、德的甲、乙、内、丁四位客人，刚好碰在一起. 他们除懂本国语言外，每人还会说其他三国语言的一种，有一种语言是三人都会说的，但没有一种语言人人都懂，现知道：①甲是日本人，丁不会说日语，但他俩都能自由交谈；②四人中没有一个人既能用日语交谈，又能用法语交谈；③甲、乙、丙、丁交谈时，找不到共同语言沟通；④乙不会说英语，当甲与丙交谈时，他都能做翻译. 针对他们懂的语言，正确的推理是　（　　）

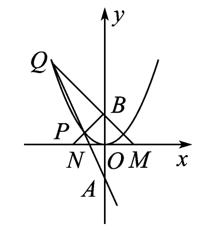
A. 甲日德、乙法德、丙英法、丁英德
B. 甲日英、乙日德、丙德法、丁日英
C. 甲日德、乙法德、丙英德、丁英德
D. 甲日法、乙英德、丙法德、丁法英

10. 如图，已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的外接球的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，将正方体割去部分后，剩余几何体的三视图如图所示，则剩余几何体的表面积为　（　　）

A. $\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
B. $3+\sqrt{3}$ 或 $\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $2+\sqrt{3}$
D. $\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $2+\sqrt{3}$



11. 如图，已知抛物线的方程为 $x^2=2py(p>0)$，过点 $A(0,-1)$ 作直线 l 与抛物线相交于 P,Q 两点. 点 B 的坐标为 $(0,1)$，连接 BP,BQ，设 QB,BP 与 x 轴分别相交于 M,N 两点. 如果 QB 的斜率与 PB 的斜率之积为 -3，则 $\angle MBN$ 的大小等于　（　　）



A. $\frac{\pi}{2}$　B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{3}$

12. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $e^x\geqslant a(x-1)+b$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 ab 的最大值是　（　　）

A. $\frac{1}{2}e^3$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^3$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}e^3$　D. e^3

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

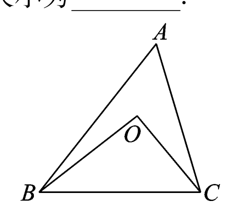
二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 在 $\left(1-x+\dfrac{1}{x^{2017}}\right)^9$ 的展开式中，含 x^3 项的系数为________.

14. 公元前 3 世纪，古希腊欧几里得在《几何原本》里提出："球的体积（V）与它的直径（D）的立方成正比"，此即 $V=kD^3$，欧几里得未给出 k 的值. 17 世纪日本数学家们对求球的体积的方法还不了解，他们将体积公式 $V=kD^3$ 中的常数 k 称为"立圆率"或"玉积率". 类似地，对于等边圆柱（轴截面是正方形的圆柱）、正方体也可利用公式 $V=kD^3$ 求体积（在等边圆柱中，D 表示底面圆的直径；在正方体中，D 表示棱长）. 假设运用此体积公式求得球（直径为 a）、等边圆柱（底面圆的直径为 a）、正方体（棱长为 a）的"玉积率"分别为 k_1、k_2、k_3，那么 $k_1:k_2:k_3=$________.

15. 由约束条件 $\begin{cases}x,y\geqslant 0,\\ y\leqslant -3x+3,\\ y\leqslant kx+1\end{cases}$ 确定的可行域 D 能被半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆面完全覆盖，则实数 k 的取值范围是________.

16. 如图，已知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，$\angle BOC=90^\circ$，若 $4BC^2=AB\cdot AC$，则 A 的大小为________.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1\neq 0$，常数 $\lambda>0$，且 $\lambda a_1 a_n=S_1+S_n$ 对一切正整数 n 都成立.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $a_1>0$，$\lambda=100$，当 n 为何值时，数列 $\left\{\lg\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和最大?

18.（本小题满分 12 分）

某同学在研究性学习中，收集到某制药厂今年前 5 个月甲胶囊生产产量（单位：万盒）的数据如下表所示：

x（月份）	1	2	3	4	5
y（万盒）	4	4	5	6	6

（Ⅰ）该同学为了求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，根据表中数据已经正确计算出 $\hat{b}=0.6$，试求出 $\hat{a}$ 的值，并估计该厂 6 月份生产的甲胶囊产量数；

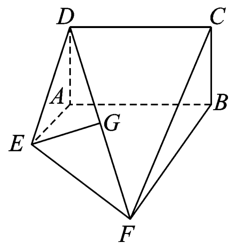
（Ⅱ）若某药店现有该制药厂今年二月份生产的甲胶囊 4 盒和三月份生产的甲胶囊 5 盒，小红同学从中随机购买了 3 盒甲胶囊，后经了解发现该制药厂今年二月份生产的所有甲胶囊均存在质量问题. 记小红同学所购买的 3 盒甲胶囊中存在质量问题的盒数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

19.（本小题满分 12 分）

已知多面体 $ABCDEF$ 如图所示，其中 $ABCD$ 为矩形，$\triangle DAE$ 为等腰直角三角形，$DA \perp AE$，四边形 $AEFB$ 为梯形，且 $AE /\!/ BF$，$\angle ABF=90^{\circ}$，$AB=BF=2AE=2$.

（Ⅰ）若 G 为线段 DF 的中点，求证：$EG /\!/$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）线段 DF 上是否存在一点 N，使得直线 BN 与平面 FCD 所成角的余弦值等于 $\frac{\sqrt{21}}{5}$？若存在，请指出点 N 的位置；若不存在，请说明理由.

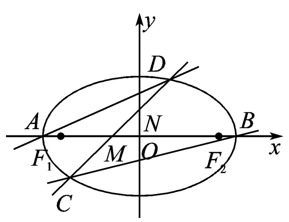


20.（本小题满分 12 分）

如图，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右顶点为 A、B，左、右焦点为 F_1、F_2，$|AB|=4$，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，直线 $y=kx+m\,(k>0)$ 交椭圆 E 于点 C，D 两点，与线段 F_1F_2、椭圆短轴分别交于 M、N 两点（M，N 不重合），且 $|CM|=|DN|$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设直线 AD，BC 的斜率分别为 k_1，k_2，求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的取值范围.



21.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\frac{bx}{\ln x}-ax$，e 为自然对数的底数.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(e^2, f(e^2))$ 处的切线方程为 $3x+4y-e^2=0$，求实数 a，b 的值；

（Ⅱ）当 $b=1$ 时，若存在 $x_1, x_2 \in [e, e^2]$，使 $f(x_1) \leqslant f'(x_2)+a$ 成立，求实数 a 的最小值.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，斜率为 1 的直线 l 过定点 $(-2,-4)$，以 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$.

（Ⅰ）求曲线 C 的直角坐标方程以及直线 l 的参数方程；

（Ⅱ）两曲线相交于 M，N 两点，若 $P(-2,-4)$，求 $|PM|+|PN|$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x+1|+|3x-2|$，且不等式 $f(x)\leqslant 5$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{4a}{5}\leqslant x\leqslant\frac{3b}{5}\right\}$，$a,b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）对任意实数 x，都有 $|x-a|+|x+b|\geqslant m^2-3m+5$ 成立，求实数 m 的最大值.

2018全国高考模拟卷二

1. C 【点拨】利用复数计算法则,则 z 化简得 $z=-1-2\mathrm{i}$,则在第三象限.

【解析】由已知得 $z=\frac{4+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}=\frac{4+3\mathrm{i}}{-2+\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$,故选 C.

2. D 【点拨】分别求出 A 和 B,再求出$\complement_R B$,再求 $A\cap(\complement_R B)$ 即可.

【解析】因为 $A=\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant1\}$,$B=\{x|x\leqslant0$ 或 $x\geqslant\frac{2}{3}\}$,所以 $A\cap(\complement_U B)=(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$,故选 D.

3. C 【点拨】等号左边用二倍角展开,等号右边展开约分化简得 $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{6}$,平方得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{17}{18}$,即 $\sin2\alpha=-\frac{17}{18}$.

【解析】由 $3\cos2\alpha=\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ 可得:$3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$,于是 $3(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{18}$,$\sin2\alpha=-\frac{17}{18}$,故选 C.

4. A 【点拨】由已知得 $f(x)+g(x)$ 为偶,$f(x)$、$g(x)$ 是非奇非偶函数.

【解析】因为 $h(x)=\frac{x}{2^x-1}+\frac{x}{2}=x(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})$,$h(-x)=-x(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2})=-x(\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2})=-x(\frac{-1}{2^x-1}-\frac{1}{2})=x(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})=h(x)$,且定义域关于原点对称,所以为偶函数,所以 A 项正确,B 项不正确;$h(x)=f(x)g(x)=\frac{x^2}{2(2^x-1)}$ 没有奇偶性,故选 A.

5. B 【点拨】假设点 A 在第一象限,点 B 在第二象限,分别写出 A、B 坐标,AB 恰好为通径,即 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$,$|BC|=2c$,$|K|=\frac{|AB|}{|BC|}$得到.

【解析】假设点 A 在第一象限,点 B 在第二象限,则 $A(c,\frac{b^2}{a})$,$B(c,-\frac{b^2}{a})$,所以$|AB|=\frac{2b^2}{a}$,$|BC|=2c$,所以$|k|=\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{\frac{2b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{ac}=\frac{c^2-a^2}{ac}=e-\frac{1}{e}=\frac{3}{2}$,故选 B.

6. B 【点拨】利用向量的加减法线性运算,待定系数可得 k、m 的值.

【解析】因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+k(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}+k(\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(1-k)\overrightarrow{AB}+\frac{k}{5}\overrightarrow{AC}$,且 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$,所以 $1-k=m$,$\frac{k}{5}=\frac{2}{5}$,解得 $k=2$,$m=-1$. 故选 B.

7. D 【点拨】根据题意可得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=6$,从而得 $\omega=\frac{\pi}{3}$,取最大值时,角的集合可求出 φ 的值,从而得$f(x)$解析式,利用复合函数求单调性可求出$f(x)$的单调减区间.

【解析】因为函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图象与直线 $y=a(0<a<A)$的三个相邻交点的横坐标分别是 2,4,8,所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=6$,所以 $\omega=\frac{\pi}{3}$,且当 $x=3$ 时函数取得最大值,所以$\frac{\pi}{3}\times3+\varphi=\frac{\pi}{2}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)=A\sin(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{2})$,因为 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{2}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,所以 $6k+3\leqslant x\leqslant6k+6,k\in\mathbf{Z}$,周期 $T=6$,所以 $6k-3\leqslant x\leqslant6k,k\in\mathbf{Z}$,故选 D.

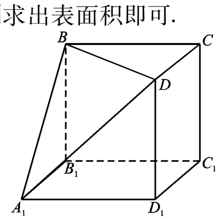
8. A 【点拨】根据列表中的数据,模拟程序即可得解.

【解析】根据程序框图知,该程序的作用是统计每天门票收入的值超过 115 万元的天数,由表可知 5 月 2 号,7 号,8 号的门票收入的值超过 115 万元,所以输出的 $n=3$,故选 A.

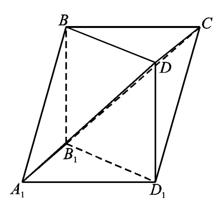
9. A 【点拨】根据题意用排除法,结合选项即可得到,主要考查推理.

【解析】分析题目和选项,由①知,丁不会说日语,排除 B 选项;由②知,任何人不会日语和法语,排除 D 选项;由③知乙、丙、丁不会同一种语言,排除 C 选项;由④知,乙会的语言是甲、丙的一种,A 选项符合,故选 A.

10. B 【点拨】根据几何体的三视图还原几何体有两种可能,分别求出表面积即可.



图(1)



图(2)

【解析】设正方体的边长为 a,依题意,$\frac{4}{3}\pi\times\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$,解得 $a=1$. 由三视图可知,该几何体的直观图有以下两种可能,图(1)对应的几何体的表面积为$\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$,图(2)对应的几何体的表面积为 $3+\sqrt{3}$. 故选 B.

11. D 【点拨】设 $P(x_P,\frac{x_P^2}{2P})$,$Q(x_Q,\frac{x_Q^2}{2P})$,根据 A、P、Q 三点共线,利用斜率相等得 P 和 Q 坐标之间的关系,再根据斜率之积等于 -3可得答案.

【解析】设 P 点坐标为 $(x_P,\frac{x_P^2}{2p})$，Q 点坐标为 $(x_Q,\frac{x_Q^2}{2p})$，

∵ A,P,Q 三点共线，∴ $k_{PA}=k_{QA}$，即 $\frac{\frac{x_P^2}{2p}+1}{x_P}=\frac{\frac{x_Q^2}{2p}+1}{x_Q}$，

∴ $0=\frac{\frac{x_P^2}{2p}+1}{x_P}-\frac{\frac{x_Q^2}{2p}+1}{x_Q}=\frac{x_P^2+2p}{2px_p}-\frac{x_Q^2+2p}{2px_Q}=\frac{x_p^2x_Q+2px_Q-x_px_Q^2-2px_p}{2px_px_Q}=\frac{(x_p-x_Q)(x_px_Q-2p)}{2px_px_Q}$，

∵ $x_p\neq x_Q$，∴ $x_px_Q-2p=0$，$k_{PB}+k_{QB}=\frac{\frac{x_P^2}{2p}-1}{x_P}+\frac{\frac{x_Q^2}{2p}-1}{x_Q}=\frac{x_P^2-2p}{2px_P}+\frac{x_Q^2-2p}{2px_Q}=\frac{x_P^2x_Q-2px_Q+x_Px_Q^2-2px_P}{2px_Px_Q}=\frac{(x_P+x_Q)(x_Px_Q-2p)}{2px_Px_Q}=0$，∵ $k_{PB}+k_{QB}=0$，$k_{PB}k_{QB}=-3$，

∴ $k_{PB}=\sqrt{3}$，$k_{QB}=-\sqrt{3}$，∴ $\angle BNM=\angle BMN=60°$，

∴ $\angle MBN=60°$. 故选 D.

12. A 【点拨】该题为恒成立问题，分别讨论 a 与 0 的大小关系，判断可能的情况，求可能情况下的极值即可.

【解析】当 $a<0$ 时，$e^x\geqslant a(x-1)+b$ 不可能恒成立；当 $a=0$ 时，$b\leqslant 0$，不可能是最大值；当 $a>0$ 时，设 $f(x)=e^x-[a(x-1)+b]$，则 $f'(x)=e^x-a$，令 $f'(x)=e^x-a=0$，解得 $x=\ln a$，当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=e^{\ln a}-[a(\ln a-1)+b]\geqslant 0$，即 $b\leqslant 2a-a\ln a$，所以 $ab\leqslant 2a^2-a^2\ln a$，记 $g(a)=2a^2-a^2\ln a$，则 $g'(a)=4a-(a^2\times\frac{1}{a}+2a\ln a)=3a-2a\ln a=a(3-2\ln a)$，当 $0<a<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$g'(a)>0$，当 $a>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$g'(a)<0$，所以当 $0<a<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$g(a)$ 单调递增，当 $a>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$g(a)$ 单调递减，所以 $g(a)_{\max}=g(e^{\frac{3}{2}})=2e^3-e^3\ln e^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}e^3$，所以 ab 的最大值为 $\frac{1}{2}e^3$. 故选 A.

13. -84 【点拨】将二项式展开，分析可能出现 x^3 的项，再利用展开式 T_{r+1} 的通项求解.

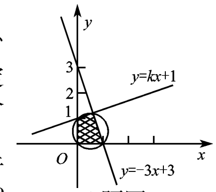
【解析】$(1-x+\frac{1}{x^{2017}})^9=C_9^0(1-x)^9+C_9^1(1-x)^8\frac{1}{x^{2017}}+\cdots+C_9^9(\frac{1}{x^{2017}})^9$，只有第一项含有 x^3，因为 $(1-x)^9$ 的通项 $T_{r+1}=C_9^r(-x)^r$，所以 $T_4=C_9^3(-x)^3=-84x^3$.

14. $\frac{\pi}{6}:\frac{\pi}{4}:1$ 【点拨】分别求出 V_1、V_2、V_3，$V_1:V_2:V_3=K_1:K_2:K_3$.

【解析】$V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{a}{2})^3=\frac{\pi}{6}a^3\Rightarrow k_1=\frac{\pi}{6}$；$V_2=\pi R^2a=\pi(\frac{a}{2})^2a=\frac{\pi}{4}a^3\Rightarrow k_2=\frac{\pi}{4}$；$V_3=a^3\Rightarrow k_3=1$，故 $k_1:k_2:k_3=\frac{\pi}{6}:\frac{\pi}{4}:1$.

15. $(-\infty,\frac{1}{3}]$ 【点拨】先作出可行域，结合图形，要使可行域能被 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的图覆盖，只需直线 $y=kx+1$ 斜率小于等于与 $y=-3x+3$ 垂直时的斜率 $\frac{1}{3}$ 即可.

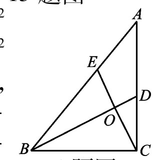
【解析】∵ 可行域能被圆覆盖，∴ 可行域是封闭的，作出可行域：结合图，要使可行域能被 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆覆盖，只需直线 $y=kx+1$ 斜率小于等于与直线 $y=-3x+3$ 垂直时的斜率 $\frac{1}{3}$ 即可，即 $k\leqslant\frac{1}{3}$.



15 题图

16. $\frac{\pi}{3}$ 【点拨】分别延长 BO、CO，交 AC、AB 于 D、E，在 Rt△ BOE 中，利用勾股定理，在 Rt△ DOC 中用勾股定理，再结合余弦定理即可求出 A.

【解析】分别延长 BO，CO 交 AC，AB 于 D，E，设 $DO=x$，$EO=y$，故 $BO=2x$，$CO=2y$. 在 Rt△ BOC 中，$BC^2=BO^2+CO^2=4x^2+4y^2$；在 Rt△ BOE 中，$BE^2=BO^2+EO^2=4x^2+y^2$，故 $AB^2=4(4x^2+y^2)$；在 Rt△ DOC 中，$DC^2=DO^2+CO^2=x^2+4y^2$，故 $AC^2=4(x^2+4y^2)$，令 $BC=a$，$AB=c$，$AC=b$，可知 $5a^2=b^2+c^2$①，又 $4BC^2=AB\cdot AC$，即 $4a^2=cb$，代入①式可知，$bc=b^2+c^2-a^2$，故由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.



16 题图

17.【点拨】(Ⅰ)由题意，$n=1$，由已知可知 $a(\lambda a_1-2)=0$，$a_1\neq 0$，结合数列的和与项的递推公式可求 a_n 的通项.(Ⅱ)由 $a_1>0$，且 $\lambda=100$ 时，令 $b_n=\lg\frac{1}{a_n}$，则 $b_n=\lg\frac{100}{2^n}=2-n\lg 2$，结合数列的单调性可求和的最大项.

【解析】(Ⅰ)令 $n=1$，得 $\lambda a_1^2=2S_1=2a_1$，$a_1(\lambda a_1-2)=0$.

因为 $a_1\neq 0$，所以 $a_1=\frac{2}{\lambda}$，当 $n\geqslant 2$ 时，$2a_n=\frac{2}{\lambda}+S_n$，$2a_{n-1}=\frac{2}{\lambda}+S_{n-1}$，

两式相减得 $2a_n-2a_{n-1}=a_n(n\geqslant 2)$，所以 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，从而数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以 $a_n=a_1\cdot 2^{n-1}=\frac{2^n}{\lambda}$.

(Ⅱ)当 $a_1>0$，$\lambda=100$ 时，

由(Ⅰ)知，$a_n=\frac{2^n}{100}$，$b_n=\lg\frac{1}{a_n}=\lg\frac{100}{2^n}=\lg 100-\lg 2^n=2-n\lg 2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是单调递减的等差数列，公差为 $-\lg 2$.

所以 $b_1>b_2>\cdots>b_6=\lg\frac{100}{2^6}=\lg\frac{100}{64}>\lg 1=0$.

当 $n\geqslant 7$ 时，$b_n\leqslant b_7=\lg\frac{100}{2^7}<\lg 1=0$.

所以数列 $\{\lg\frac{1}{a_n}\}$ 的前 6 项和最大.

18.【点拨】(Ⅰ)由线性回归方程过点 $(\bar{x},\bar{y})$，得 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，而 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 易求，且 $\hat{b}=0.6$，从而可得 $\hat{a}$ 的值，把 $x=6$ 代入回归方程可得 6 月份生产的甲胶囊产量数；

(Ⅱ)$X=0,1,2,3$，利用古典概型的概率计算公式可得 $P(X=0)$、$P(X=1)$、$P(X=2)$、$P(X=3)$，从而可得 x 的分布列，由期望公式可求 x 的期望.

【解析】(Ⅰ)$\bar{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$，$\bar{y}=\frac{1}{5}(4+4+5+6+6)=5$，因线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 过点 $(\bar{x},\bar{y})$

∴ $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}x=5-0.6\times 3=3.2$，

∴ 6 月份生产甲胶囊的产量数：$\hat{y}=0.6\times 6+3.2=6.8$

(Ⅱ)$X=0,1,2,3$，$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_5^2}{C_9^3}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$，

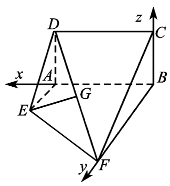
$P(X=2)=\frac{C_4^2C_5^1}{C_9^3}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$，

其分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$\therefore E(X)=\frac{5}{42}\times 0+\frac{10}{21}\times 1+\frac{5}{14}\times 2+\frac{1}{21}\times 3=\frac{4}{3}$.

19.【点拨】(Ⅰ)由 $ABCD$ 为矩形,得 $DA\perp AB$,又 $DA\perp AE$,可得 $DA\perp$ 平面 $ABFE$,结合 $\angle ABF=90°$,得 $BF\perp$ 平面 $ABCD$,从而得到直线 BA,BF,BC 两两垂直,以 B 为原点建立坐标系,则 $\overrightarrow{BF}$ 为平面 $ABCD$ 的法向量,求出 $\overrightarrow{BF},\overrightarrow{EG}$ 的坐标,通过计算 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ 得出 $\overrightarrow{EG}\perp\overrightarrow{BF}$,从而有 $EG /\!/$ 平面 $ABCD$;(Ⅱ)假设存在点 N 符合条件,设 $\overrightarrow{FN}=\lambda\overrightarrow{FD}$,求出 $\overrightarrow{BN}$ 和平面 FCD 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标,再结合所成角的余弦值计算出 λ,从而得出结论.



【解析】(Ⅰ)因为 $DA\perp AE,DA\perp AB,AB\cap AE=A$,故 $DA\perp$ 平面 $ABFE$,

故 $CB\perp$ 平面 $ABFE$,以 B 为原点,BA,BF,BC 分别为 x 轴,y 轴,z 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $F(0,2,0)$,$D(2,0,1)$,$G(1,1,\frac{1}{2})$,$E(2,1,0)$,$C(0,0,1)$

所以 $EG=(-1,0,\frac{1}{2})$,易知平面 $ABCD$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$,

所以 $\overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{n}=(-1,0,\frac{1}{2})\cdot(0,1,0)=0$. 所以 $\overrightarrow{EG}\perp\boldsymbol{n}$,又 $EG\not\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $EG /\!/$ 平面 $ABCD$.

(Ⅱ)当点 N 与点 D 重合时,直线 BN 与平面 FCD 所成角的余弦值等于 $\frac{\sqrt{21}}{5}$,理由如下:直线 BN 与平面 FCD 所成角的余弦值等于 $\frac{\sqrt{21}}{5}$,即直线 BN 与平面 FCD 所成角的正弦值等于 $\frac{2}{5}$,因为 $\overrightarrow{FD}=(2,-2,1)$,$\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$,设平面 FCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FD}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$,得 $\begin{cases}2x_1-2y_1+z_1=0\\ 2x_1=0\end{cases}$,取 $y_1=1$ 得平面 FCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,2)$.

假设线段 FD 上存在一点 N,使得直线 BN 与平面 FCD 所成角的正弦值等于 $\frac{2}{5}$,设 $\overrightarrow{FN}=\lambda\overrightarrow{FD}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$,则 $\overrightarrow{FN}=\lambda(2,-2,1)=(2\lambda,-2\lambda,\lambda)$,$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FN}=(2\lambda,2-2\lambda,\lambda)$,

所以 $\sin\alpha=\cos<\overrightarrow{BN},\boldsymbol{n}_1>$

$=\frac{\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\overrightarrow{BN}|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{(2\lambda)^2+(2-2\lambda)^2+(\lambda)^2}}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9\lambda^2-8\lambda+4}}=\frac{2}{5}$,

所以 $9\lambda^2-8\lambda-1=0$,解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-\frac{1}{9}$(舍去). 因此,线段 DF 上存在一点 N,当 N 点与 D 点重合时,直线 BN 与平面 FCD 所成角的余弦值等于 $\frac{\sqrt{21}}{5}$.

20.【点拨】(Ⅰ)确定 $2a=4,2c=2\sqrt{3}$,求出 b,即可求椭圆 E 的方程;(Ⅱ)直线 $y=kx+m(k>0)$ 与椭圆联立,利用韦达定理,结合 $|CM|=|DN|$,求出 m 的范围,再求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的取值范围.

【解析】(Ⅰ)因为 $2a=4,2c=2\sqrt{3}$,所以 $b^2=a^2-c^2=1$,所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(Ⅱ)将直线 $y=kx+m$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,得 $(4k^2+1)x^2+8mkx+4m^2-4=0$

设 $D(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8mk}{4k^2+1}$,$x_1\cdot x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$

又 $M(-\frac{m}{k},0)$,$N(0,m)$,由 $|CM|=|DN|$ 得 $x_1+x_2=x_M+x_N$,即 $-\frac{8mk}{4k^2+1}=-\frac{m}{k}$,

因为 $m\neq 0$、$k>0$,得 $k=\frac{1}{2}$,

此时,$x_1+x_2=-2m$,$x_1\cdot x_2=2m^2-2$.

因为直线 l 与线段 F_1F_2、椭圆短轴分别交于不同两点.

所以 $-\sqrt{3}\leqslant -2m\leqslant\sqrt{3}$,且 $m\neq 0$,即 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $m\neq 0$.

因为 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$,所以 $k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$,所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$,

两边平方得 $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2=\frac{y_1^2(x_2-2)^2}{y_2^2(x_1+2)^2}=\frac{\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)(x_2-2)^2}{\left(1-\frac{x_2^2}{4}\right)(x_1+2)^2}$

$=\frac{(2-x_1)(2-x_2)}{(2+x_2)(2+x_1)}=\frac{4-2(x_1+x_2)+x_1x_2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$

$=\frac{4-2(-2m)+2m^2-2}{4+2(-2m)+2m^2-2}=\frac{(m+1)^2}{(m-1)^2}$,

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1+m}{1-m}=-1-\frac{2}{m-1}$. $\left(\frac{k_1}{k_2}>0\right)$

又因为 $\frac{k_1}{k_2}=-1-\frac{2}{m-1}$ 在 $[-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$(0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$ 上单调递增.

所以 $7-4\sqrt{3}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\leqslant\frac{1+m}{1-m}\leqslant\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=7+4\sqrt{3}$,且 $\frac{1+m}{1-m}\neq 1$.

即 $7-4\sqrt{3}\leqslant\frac{k_1}{k_2}\leqslant 7+4\sqrt{3}$,且 $\frac{k_1}{k_2}\neq 1$,

所以 $\frac{k_1}{k_2}\in[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,7+4\sqrt{3}]$.

21.【点拨】(Ⅰ)$f'(x)=\frac{b(\ln x-1)}{(\ln x)^2}-a(x>0$,且 $x\neq 1)$,由题意可得 $f'(e^2)=\frac{b}{4}-a=-\frac{3}{4}$,$f(e^2)=\frac{be^2}{2}-ae^2=-\frac{1}{2}e^2$.

联立解得即可.

(Ⅱ)当 $b=1$ 时,$f(x)=\frac{x}{\ln x}-ax$,$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-a$,由 $x\in[e,e^2]$,可得 $\frac{1}{\ln x}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,由 $f'(x)+a=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=-\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$,可得 $[f'(x)+a]_{\max}=\frac{1}{4}$,$x\in[e,e^2]$,存在 $x_1\cdot x_2\in[e,e^2]$,使 $f(x_1)\leqslant f'(x_2)+a$ 成立 $\Leftrightarrow x\in[e,e^2]$,$f(x)_{\min}\leqslant f(x)_{\max}+a=\frac{1}{4}$,对 a 分类讨论解出即可.

【解析】(Ⅰ)由已知得 $x>0,x\neq 1$,$f'(x)=\frac{b(\ln x-1)}{(\ln x)^2}-a$,

则 $f(e^2)=\frac{be^2}{2}-ae^2=-\frac{e^2}{2}$,且 $f'(e^2)=\frac{b}{4}-a=-\frac{3}{4}$,解之得,$a=1,b=1$.

(Ⅱ)当 $b=1$ 时,$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-a=-(\frac{1}{\ln x})^2+\frac{1}{\ln x}-a=-(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}-a$.

故当 $\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{2}$,即 $x=e^2$ 时,$f'(x)_{\max}=\frac{1}{4}-a$,

"存在 $x_1,x_2\in[e,e^2]$,使 $f(x_1)\leqslant f'(x_2)+a$ 成立"等价于"当 $x\in[e,e^2]$ 时,有 $f(x)_{\min}\leqslant f'(x)_{\max}+a$",又当 $x\in[e,e^2]$ 时,

$f'(x)_{\max}=\frac{1}{4}-a$，$\therefore f'(x)_{\max}+a=\frac{1}{4}$，

问题等价于“当 $x\in[e,e^2]$ 时，有 $f(x)_{\min}\leqslant\frac{1}{4}$”.

①当 $a\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $[e,e^2]$ 上为减函数，则 $f(x)_{\min}=f(e^2)$

$=\frac{e^2}{2}-ae^2\leqslant\frac{1}{4}$

故 $a\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{4e^2}$；

②当 $a<\frac{1}{4}$ 时，$f'(x)=-(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}-a$ 在 $[e,e^2]$ 上的值域为 $\left[-a,\frac{1}{4}-a\right]$，

（ⅰ）当 $-a\geqslant0$ 时，即 $a\leqslant0$，$f'(x)\geqslant0$，在 $[e,e^2]$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $[e,e^2]$ 上为增函数，

于是 $f(x)_{\min}=f(e)=e-ae\geqslant e>\frac{1}{4}$，不合题意；

（ⅱ）当 $-a<0$，即 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，由 $f'(x)$ 的单调性和值域知，

存在唯一 $x_0\in(e,e^2)$，使 $f'(x)=0$，且满足当 $x\in(e,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；

当 $x\in(x_0,e^2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{x_0}{\ln x_0}-ax_0\leqslant\frac{1}{4}$，$x_0\in(e,e^2)$，

所以 $a\geqslant\frac{1}{\ln x_0}-\frac{1}{4x_0}>\frac{1}{\ln e^2}-\frac{1}{4e^2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$，与 $0<a<\frac{1}{4}$ 矛盾.

综上，得 a 的最小值为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{4e^2}$

22.【点拨】（Ⅰ）由斜率为 1 的直线 l 过定点 $(-2,-4)$，可得参数方程为：$\begin{cases}x=-2+t\cos\frac{\pi}{4}\\ y=-4+t\sin\frac{\pi}{4}\end{cases}$，（$t$ 为参数），由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$，即 $\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0$，利用互化公式可得直角坐标方程.

（Ⅱ）把直线 l 的方程代入抛物线方程可得：$t^2-12\sqrt{2}t+48=0$，利用根与系数的关系及其 $|PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|$，即可得出.

【解析】（Ⅰ）由 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$ 得 $\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2-4x=0$，$y^2=4x$，

因为直线 l 过定点 $(-2,-4)$ 且斜率为 1，所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-4+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（Ⅱ）将直线 l 的参数方程代入 $y^2=4x$ 中，得到 $t^2-12\sqrt{2}t+48=0$，设 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=12\sqrt{2}$，$t_1t_2=48>0$

设 $|PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=t_1+t_2=12\sqrt{2}$.

23.【点拨】（Ⅰ）分别讨论 $x\leqslant-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$，$x\geqslant\frac{2}{3}$ 时 $f(x)$ 的解析式，将 $f(x)$ 化为分段函数，求 $f(x)\leqslant5$ 的解集，从而可求出 a 和 b 的值；

（Ⅱ）$|x-1|+|x+2|\geqslant|x-1-x-2|=3$，即 $m^2-3m+5\leqslant3$，求 m 的取值范围即可.

【解析】（Ⅰ）若 $x\leqslant-\frac{1}{2}$，原不等式可化为 $-2x-1-3x+2\leqslant5$，解得 $x\geqslant-\frac{4}{5}$，即 $-\frac{4}{5}\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}$；

若 $-\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$，原不等式可化为 $2x+1-3x+2\leqslant5$，解得 $x\geqslant-2$，即 $-\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$；

若 $x\geqslant\frac{2}{3}$，原不等式可化为 $2x+1+3x-2\leqslant5$，解得 $x\leqslant\frac{6}{5}$，即 $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{6}{5}$；

综上所述，不等式 $|2x+1|+|3x-2|\leqslant5$ 的解集为 $\left[-\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right]$，

所以 $a=1$，$b=2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a=1$，$b=2$，所以 $|x-a|+|x+b|=|x-1|+|x+2|\geqslant|x-1-x-2|=3$，

故 $m^2-3m+5\leqslant3$，$m^2-3m+2\leqslant0$，所以 $1\leqslant m\leqslant2$，即实数的最大值为 2.