竞赛之窗

2005 年 IMO 中国国家集训队选拔考试

第 一 天

一、设 $\odot O$ 的内接凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 的交点为 P,过 P、B 两点的 $\odot O_1$ 与过 P、A 两点的 $\odot O_2$ 相交于两点 P、Q,且 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 分别与 $\odot O$ 相交于另一点 E、F. 求证:直线 PQ、CE、DF 共点或者互相平行. (冷岗松　供题)

二、给定正整数 $n(n\geq 2)$,求最大的 λ,使得:若有 n 个袋子,每一个袋子中都是一些重量为 2 的整数次幂克的小球,且各个袋子中的小球的总重量都相等,则必有某一重量的小球的总个数至少为 λ.(同一个袋子中可以有相等重量的小球.) (王建伟　供题)

三、n 是正整数,$a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为复数,且对集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任一非空子集 I,均有

$$\left|\prod_{j\in I}(1+a_j)-1\right|\leq\frac{1}{2}.$$

证明:$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\leq 3$. (朱华伟　供题)

第 二 天

四、设 $a_1,a_2,\cdots,a_6$;$b_1,b_2,\cdots,b_6$;$c_1,c_2,\cdots,c_6$ 都是 $1,2,\cdots,6$ 的排列. 求 $\sum_{i=1}^{6}a_ib_ic_i$ 的最小值. (熊　斌　供题)

五、设 n 是任意给定的正整数,x 是正实数. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x\left[\frac{k}{x}\right]-(x+1)\left[\frac{k}{x+1}\right]\right)\leq n,$$

其中 $[a]$ 表示不超过实数 a 的最大整数. (余红兵　供题)

六、设 α 是给定的正实数. 求所有的函数 $f:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R}$,使得对任意满足条件

$$\alpha m\leq k<(\alpha+1)m$$

的正整数 k、m,都有

$$f(k+m)=f(k)+f(m).$$

(陈永高　供题)

参 考 答 案

一、如图 1.

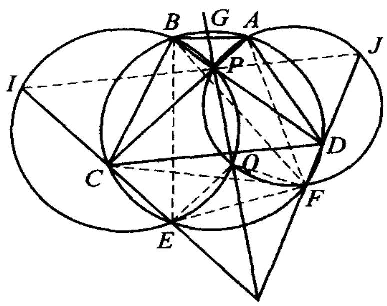

图 1

因为 $\angle PJF=\angle PAF=\angle CAF=\angle CDF$,

所以,$PJ\parallel CD$.

同理,$IP\parallel CD$.

故 I、P、J 三点共线.

又 $\angle EFD=180°-\angle ECD=180°-\angle EIJ$,

故 E、F、J、I 四点共圆.

这样,由根轴定理,知四边形 $IEFJ$ 的外接圆、$\odot O_1$、$\odot O_2$ 两两的公共弦 IE、PQ、JF 共点或者互相平行,即直线 PQ、CE、DF 共点或者互相平行.

二、不妨设最重的小球重量为 1. 先证:

$$\lambda_{\max}\geq\left[\frac{n}{2}\right]+1.$$

设每个袋子中小球的总重量为 G,则 $G\geq 1$.

假设任一重量的小球的总个数都小于或等于 $\left[\frac{n}{2}\right]$. 考察这 n 个袋子中所有小球的总重量,得

$$n \le nG < \left[\frac{n}{2}\right]\cdot(1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots)$$

$$=2\left[\frac{n}{2}\right] \le 2\cdot\frac{n}{2}=n.$$

矛盾.

反之,取充分大的正整数 s,使得

$$2-2^{-s}\ge\frac{2n}{n+1}.$$

由于 $\left[\frac{n}{2}\right]+1\ge\frac{n+1}{2}$,故

$$2-2^{-s}\ge\frac{2n}{n+1}\ge\frac{n}{\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

从而,$\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)(1+2^{-1}+\cdots+2^{-s})\ge n\times 1$.

所以,可在

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)个},\underbrace{2^{-1},2^{-1},\cdots,2^{-1}}_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)个},\cdots,\underbrace{2^{-s},2^{-s},\cdots,2^{-s}}_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)个}$$

中从前至后取出和为 1 的连续若干项,且至少可取 n 次. 所以,

$$\lambda_{\max}\le\left[\frac{n}{2}\right]+1.$$

综上可知,$\lambda_{\max}=\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

三、设 $1+a_j=r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$,$|\theta_j|\le\pi$,$j=1,2,\cdots,n$. 则题设条件变为

$$\left|\prod_{j\in I}r_j\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j\in I}\theta_j}-1\right|\le\frac{1}{2}. \quad ①$$

先证如下引理.

引理　设 r、θ 为实数,$r>0$,$|\theta|\le\pi$,$|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|\le\frac{1}{2}$,则

$$\frac{1}{2}\le r\le\frac{3}{2},\ |\theta|\le\frac{\pi}{6},\ |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|\le|r-1|+|\theta|.$$

引理的证明:

如图 2,由复数的几何意义,有

$$\frac{1}{2}\le r\le\frac{3}{2},$$

$$|\theta|\le\frac{\pi}{6}.$$

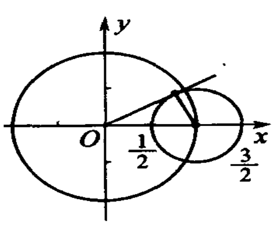

图 2

于是,有

$$|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|$$

$$=|r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-1|$$

$$=|(r-1)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+[(\cos\theta-1)+\mathrm{i}\sin\theta]|$$

$$\le|r-1|+\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}$$

$$=|r-1|+\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

$$=|r-1|+2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\le|r-1|+|\theta|.$$

引理得证.

由式①及引理,对 $|I|$ 用数学归纳法,知

$$\frac{1}{2}\le\prod_{j\in I}r_j\le\frac{3}{2},\ \left|\sum_{j\in I}\theta_j\right|\le\frac{\pi}{6}, \quad ②$$

由式①及引理,知

$$|a_j|=|r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}-1|\le|r_j-1|+|\theta_j|,$$

因此,$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\le\sum_{j=1}^{n}|r_j-1|+\sum_{j=1}^{n}|\theta_j|$

$$=\sum_{r_j\ge1}|r_j-1|+\sum_{r_j<1}|r_j-1|+\sum_{\theta_j\ge0}|\theta_j|+\sum_{\theta_j<0}|\theta_j|.$$

由式②,知

$$\sum_{r_j\ge1}|r_j-1|=\sum_{r_j\ge1}(r_j-1)$$

$$\le\prod_{r_j\ge1}(1+r_j-1)-1\le\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{r_j<1}|r_j-1|=\sum_{r_j<1}(1-r_j)$$

$$\le\prod_{r_j<1}[1-(1-r_j)]^{-1}-1\le2-1=1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}|\theta_j|=\sum_{\theta_j\ge0}\theta_j-\sum_{\theta_j<0}\theta_j\le\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\le\frac{\pi}{3}.$$

综上所述,有

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\le\frac{1}{2}+1+\frac{\pi}{3}<3.$$

四、记 $S=\sum_{i=1}^{6}a_ib_ic_i$. 由平均不等式,得

$$S\ge6\sqrt[6]{\prod_{i=1}^{6}a_ib_ic_i}=6\sqrt[6]{(6!)^3}$$

$$=6\sqrt{6!}=72\sqrt{5}>160.$$

下面证明 $S>161$.

因为 $a_1b_1c_1,a_2b_2c_2,\cdots,a_6b_6c_6$ 这 6 个数的几何平均值为 $12\sqrt{5}$,而 $26<12\sqrt{5}<27$,则 $a_1b_1c_1$,$a_2b_2c_2,\cdots,a_6b_6c_6$ 中必有 1 个数不小于 27,也必有 1 个数不大于 26,而 26 不是 1,2,3,4,5,6 中某 3 个数(可以重复)的积,所以,必有 1 个数不大于 25. 不妨设 $a_1b_1c_1=27$,$a_2b_2c_2=25$,于是,有

$$S=(\sqrt{a_1b_1c_1}-\sqrt{a_2b_2c_2})^2+2\sqrt{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}$$

$$+(a_3b_3c_3+a_4b_4c_4)+(a_5b_5c_5+a_6b_6c_6)$$

$$\geq(\sqrt{27}-\sqrt{25})^2+2\sqrt{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}+2\sqrt{a_3b_3c_3a_4b_4c_4}+2\sqrt{a_5b_5c_5a_6b_6c_6}$$

$$\geq(3\sqrt{3}-5)^2+2\times3\sqrt[6]{\prod_{i=1}^{6}a_ib_ic_i}$$

$$=(3\sqrt{3}-5)^2+72\sqrt{5}>161,$$

所以，$S\geq162$.

又当 $a_1,a_2,\cdots,a_6;b_1,b_2,\cdots,b_6;c_1,c_2,\cdots,c_6$ 分别为

1,2,3,4,5,6;　5,4,3,6,1,2;　5,4,3,1,6,2

时，有

$$S=1\times5\times5+2\times4\times4+3\times3\times3+4\times6\times1+5\times1\times6+6\times2\times2=162.$$

故 S 的最小值为 162.

五、首先证明一个引理.

引理　对任意大于零的实数 α、β，有整数 u 及实数 γ，使得

$$\alpha=\beta u+\gamma,$$

其中 $0\leq\gamma<\beta$，且 u 及 γ 唯一确定.

引理的证明：取 $u=\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]$ 及 $\gamma=\alpha-\beta\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]$，易知 $0\leq\gamma<\beta$. 此外，若另有整数 u' 及实数 $\gamma'(0\leq\gamma'<\beta)$，满足 $\alpha=\beta u'+\gamma'$，则

$$\beta(u-u')=\gamma'-\gamma.$$

因上式左边的绝对值或是 0 或大于等于 β，而右边的绝对值小于 β，故必须 $u=u'$ 及 $\gamma'=\gamma$. 这就证明了所说的唯一性.

下面证明原题.

由引理知，对任意的 $k=1,2,\cdots,n$，有

$$k=a_kx+b_k=c_k(x+1)+d_k, \quad ①$$

这里 $a_k=\left[\frac{k}{x}\right]$，$c_k=\left[\frac{k}{x+1}\right]$，$0\leq b_k<x$，$0\leq d_k<x+1$.

记不等式左边的和为 S，则

$$S=\sum_{k=1}^{n}[a_kx-c_k(x+1)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[(k-b_k)-(k-d_k)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}d_k-\sum_{k=1}^{n}b_k. \quad ②$$

记 $I=\{1\leq k\leq n\mid d_k>1\}$.

令 $f(k)=k-c_k-1$，因当 $k\in I$ 时，有

$$k=c_k(x+1)+d_k>c_k+1,$$

故 $0<f(k)<n$.

所以，f 是 I 到集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个映射.

我们证明 f 必是单射.

事实上，若有 k、$l\in I(k\neq l)$ 使 $f(k)=f(l)$，则 $k-l=c_k-c_l$，结合式①，易知

$$(c_k-c_l)x=d_l-d_k. \quad ③$$

另一方面，因 k、$l\in I$，知 d_k、$d_l\in(1,x+1)$，故 $|d_k-d_l|<|x|$. 但

$$|c_k-c_l||x|=|k-l||x|\geq|x|,$$

从而，式③两边绝对值不等. 矛盾.

此外，由 $k=c_k(x+1)+d_k$，易知

$$f(k)=c_kx+(d_k-1).$$

因当 $k\in I$ 时，有 $0<d_k-1<x$，故由引理中的唯一性，知 $c_k=a_{f(k)}$ 及 $d_k-1=b_{f(k)}$.

因此，由式②可知(注意对所有 k 有 $b_k\geq0$)

$$S=\sum_{k\in I}d_k+\sum_{k\notin I}d_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\leq\sum_{k\in I}d_k-\sum_{k\in I}b_{f(k)}+\sum_{k\notin I}d_k$$

$$=\sum_{k\in I}(d_k-b_{f(k)})+\sum_{k\notin I}d_k$$

$$=\sum_{k\in I}1+\sum_{k\notin I}d_k$$

$$\leq|I|+(n-|I|)=n.$$

六、$f(n)=bn$，b 为任意给定的实数.

首先证明：当 $n\geq2\alpha+3$ 时，有

$$f(n+1)-f(n)=f(n)-f(n-1).$$

只要证明存在正整数 u，使得

$$f(n+1)-f(n)=f(u+1)-f(u), \quad ①$$

$$f(n)-f(n-1)=f(u+1)-f(u). \quad ②$$

式①等价于

$$f(n+1)+f(u)=f(n)+f(u+1).$$

由题设条件知，只要有

$$\alpha(n+1)\leq u<(\alpha+1)(n+1),$$

$$\alpha n\leq u+1<(\alpha+1)n$$

即可. 也就是

$$\alpha(n+1)\leq u<u+1<(\alpha+1)n. \quad ③$$

同理，式②等价于

$$\alpha n\leq u<u+1<(\alpha+1)(n-1). \quad ④$$

由式③、④知，只要存在正整数 u，使得

$$\alpha(n+1)\leq u<u+1<(\alpha+1)(n-1).$$

由 $(\alpha+1)(n-1)-\alpha(n+1)=n-2\alpha-1\geq2$，

首届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

一、设实数 a、b、c 满足

$$a^2+2b^2+3c^2=\frac{3}{2}.$$

求证：$3^{-a}+9^{-b}+27^{-c}\geq 1$.

(李胜宏　供题)

二、设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，点 P 在线段 AD 上，过点 D 作一直线分别与线段 AB、PB 交于点 M、E，与线段 AC、PC 的延长线交于点 F、N. 如果 $DE=DF$，求证：$DM=DN$.

(陶平生　供题)

三、(1) 是否存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$，使得对任意的正整数 n，都有

$$a_{n+1}^2\geq 2a_na_{n+2}.$$

(2) 是否存在正无理数的无穷数列 $\{a_n\}$，使得对任意的正整数 n，都有

$$a_{n+1}^2\geq 2a_na_{n+2}.$$

(金荣生　供题)

四、给定大于 2 004 的正整数 n，将 1，2，…，n^2 分别填入 $n\times n$ 棋盘(由 n 行 n 列方格构成)的方格中，使每个方格恰有 1 个数. 如果 1 个方格中填的数大于它所在行至少 2 004 个方

知上式成立.

其次，设 n_0 为整数，$n_0-1<2\alpha+3\leq n_0$，则 $n_0\geq 3$. 由上述知

$$f(n+1)-f(n)=f(n_0)-f(n_0-1),\ n\geq n_0-1.$$

因此，

$$f(n)=(n-n_0+1)[f(n_0)-f(n_0-1)]+f(n_0-1),$$
$$n\geq n_0-1. \quad ⑤$$

取正整数 k、m，使得

$$m\geq n_0,\ \alpha m\geq n_0,\ \alpha m\leq k<(\alpha+1)m.$$

又由 $f(k+m)=f(k)+f(m)$，知

$$(k+m-n_0+1)[f(n_0)-f(n_0-1)]+f(n_0-1)$$
$$=(k-n_0+1)[f(n_0)-f(n_0-1)]+f(n_0-1)+$$
$$(m-n_0+1)[f(n_0)-f(n_0-1)]+f(n_0-1).$$

由此得 $(n_0-1)f(n_0)=n_0f(n_0-1)$.

令 $f(n_0-1)=b(n_0-1)$，则 $f(n_0)=bn_0$.

代入式⑤，知 $f(n)=bn$，$n\geq n_0-1$.

下面证明：对所有正整数 n，有 $f(n)=bn$.

若不然，设使得 $f(n)\neq bn$ 的最大正整数为 n_1.

当 $\alpha>1$ 时，取正整数 k，使得

$$\alpha n_1\leq k<(\alpha+1)n_1,$$

则 $k>n_1$，$k+n_1>n_1$，$f(k+n_1)=f(k)+f(n_1)$.

因此，$f(n_1)=f(k+n_1)-f(k)$

$$=(k+n_1)b-kb=n_1b,$$

矛盾.

当 $\alpha\leq 1$ 时，有 $\alpha n_1\leq n_1<(\alpha+1)n_1$. 因此，

$$b\cdot 2n_1=f(2n_1)=f(n_1)+f(n_1).$$

从而，$f(n_1)=n_1b$，矛盾.

又当 $f(n)=bn$，b 为任意给定的实数时，显然满足题意.

综上所述，所求的函数为 $f(n)=bn$，b 为任意给定的实数.

(2005 中国数学奥林匹克主试委员会　提供)