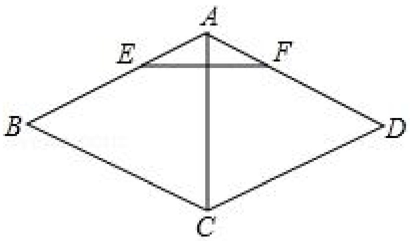
2008～2019北京中考数学分类(四边形)

一．解答题（共12小题）

1．如图，在菱形$ABCD$中，AC为对角线，点E，F分别在AB，AD上，$BE=DF$，连接EF．

（1）求证：$AC\perp EF$；

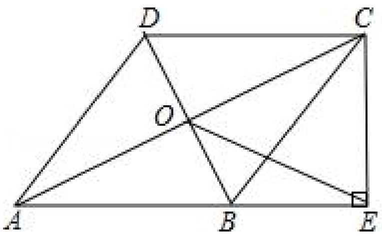
（2）延长EF交CD的延长线于点G，连接BD交AC于点O．若$BD=4$，$\tan G=\frac{1}{2}$，求AO的长．



2．如图，在四边形$ABCD$中，$AB\parallel DC$，$AB=AD$，对角线AC，BD交于点O，AC平分$\angle BAD$，过点C作$CE\perp AB$交AB的延长线于点E，连接OE．

（1）求证：四边形$ABCD$是菱形；

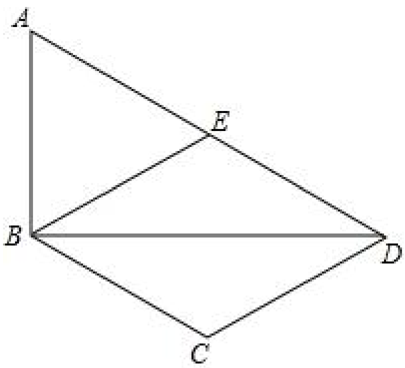
（2）若$AB=\sqrt{5}$，$BD=2$，求OE的长．



3．如图，在四边形$ABCD$中，BD为一条对角线，$AD\parallel BC$，$AD=2BC$，$\angle ABD=90^\circ$，E为AD的中点，连接BE．

（1）求证：四边形$BCDE$为菱形；

（2）连接AC，若AC平分$\angle BAD$，$BC=1$，求AC的长．

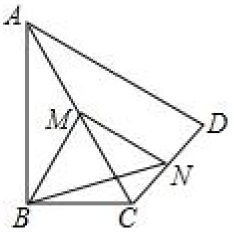


4．如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AC=AD$，M，N分别为AC，CD的中点，连

接 BM，MN，BN．

（1）求证：$BM=MN$；

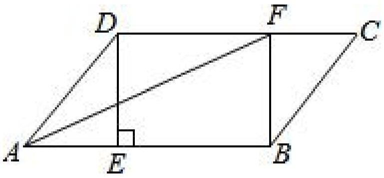
（2）$\angle BAD=60°$，AC 平分 $\angle BAD$，$AC=2$，求 BN 的长．



5．在▱ $ABCD$ 中，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，点 F 在边 CD 上，$DF=BE$，连接 AF，BF．

（1）求证：四边形 $BFDE$ 是矩形；

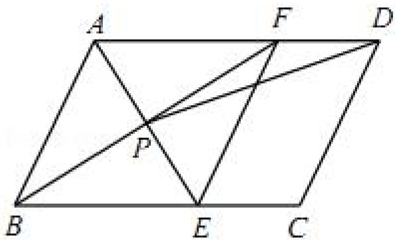
（2）若 $CF=3$，$BF=4$，$DF=5$，求证：AF 平分 $\angle DAB$．



6．如图，在▱ $ABCD$ 中，AE 平分 $\angle BAD$，交 BC 于点 E，BF 平分 $\angle ABC$，交 AD 于点 F，AE 与 BF 交于点 P，连接 EF，PD．

（1）求证：四边形 $ABEF$ 是菱形；

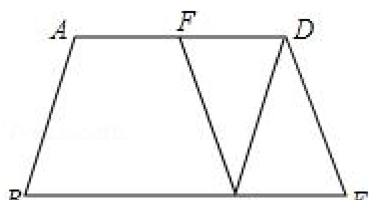
（2）若 $AB=4$，$AD=6$，$\angle ABC=60°$，求 $\tan\angle ADP$ 的值．



7．如图，在▱ $ABCD$ 中，F 是 AD 的中点，延长 BC 到点 E，使 $CE=\frac{1}{2}BC$，连接 DE，CF．

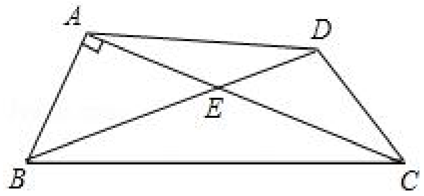
（1）求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

（2）若 $AB=4$，$AD=6$，$\angle B=60°$，求 DE 的长．

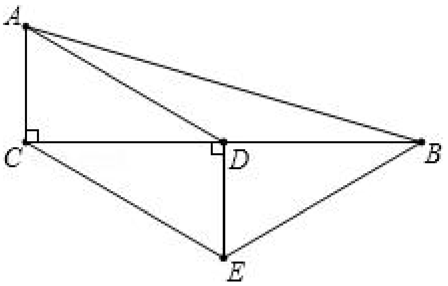


8．如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 E，$\angle BAC=90°$，$\angle CED=45°$，

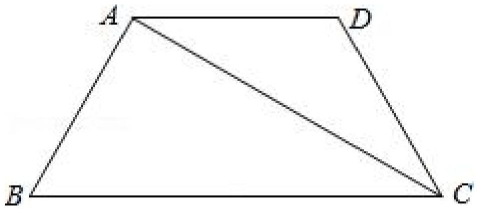
$\angle DCE=30^\circ$，$DE=\sqrt{2}$，$BE=2\sqrt{2}$．求 CD 的长和四边形 $ABCD$ 的面积．



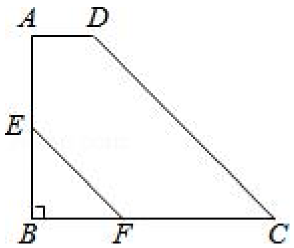
9．如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 是 BC 的中点，$DE\perp BC$，$CE\parallel AD$，若 $AC=2$，$CE=4$，求四边形 $ACEB$ 的周长．



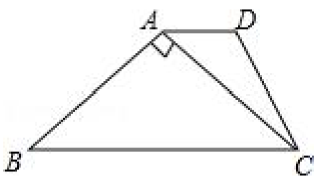
10．已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=DC=AD=2$，$BC=4$．求$\angle B$ 的度数及 AC 的长．



11．如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle B=90^\circ$，$\angle C=45^\circ$，$AD=1$，$BC=4$，E 为 AB 中点，$EF\parallel DC$ 交 BC 于点 F，求 EF 的长．



12．如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB\perp AC$，$\angle B=45^\circ$，$AD=\sqrt{2}$，$BC=4\sqrt{2}$，求 DC 的长．



2008～2019北京中考数学分类(四边形)

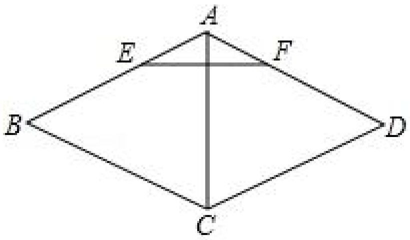
参考答案与试题解析

一．解答题（共12小题）

1．如图，在菱形$ABCD$中，AC为对角线，点E，F分别在AB，AD上，$BE=DF$，连接EF．

（1）求证：$AC\perp EF$；

（2）延长EF交CD的延长线于点G，连接BD交AC于点O．若$BD=4$，$\tan G=\frac{1}{2}$，求AO的长．



【解答】（1）证明：连接BD，如图1所示：

∵四边形$ABCD$是菱形，

∴$AB=AD$，$AC\perp BD$，$OB=OD$，

∵$BE=DF$，

∴AB：$BE=AD$：DF，

∴$EF\parallel BD$，

∴$AC\perp EF$；

（2）解：如图2所示：

∵由（1）得：$EF\parallel BD$，

∴$\angle G=\angle ADO$，

∴$\tan G=\tan\angle ADO=\frac{OA}{OD}=\frac{1}{2}$，

∴$OA=\frac{1}{2}OD$，

∵$BD=4$，

∴$OD=2$，

∴$OA=1$．

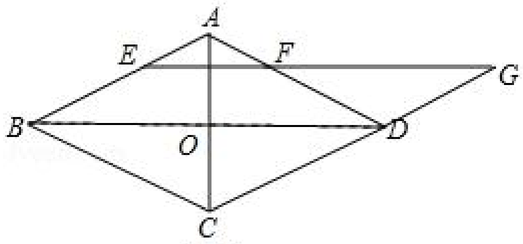


图2

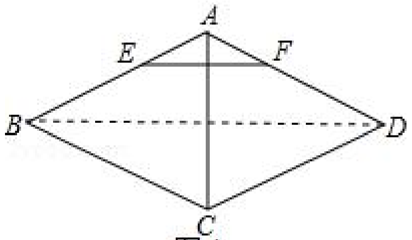
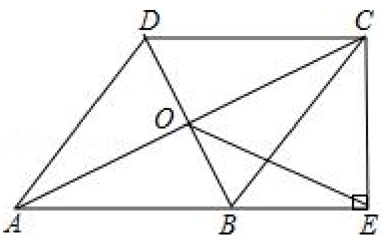


图1

2．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AB=AD$，对角线 AC，BD 交于点 O，AC 平分$\angle BAD$，过点 C 作 $CE \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E，连接 OE.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（2）若 $AB=\sqrt{5}$，$BD=2$，求 OE 的长.



【解答】解：（1）$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle OAB=\angle DCA$，

$\because AC$ 为$\angle DAB$ 的平分线，

$\therefore \angle OAB=\angle DAC$，

$\therefore \angle DCA=\angle DAC$，

$\therefore CD=AD=AB$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\because AD=AB$，

$\therefore$▱ $ABCD$ 是菱形；

（2）$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$OA=OC$，$BD\perp AC$，∵$CE\perp AB$，

∴$OE=OA=OC$，

∵$BD=2$，

∴$OB=\frac{1}{2}BD=1$，

在 Rt△AOB 中，$AB=\sqrt{5}$，$OB=1$，

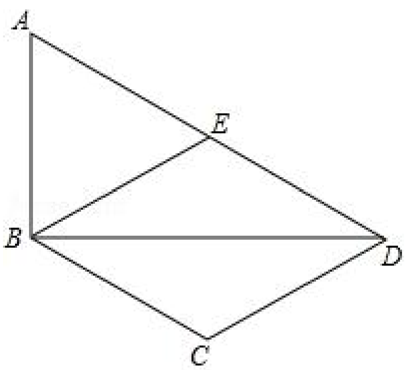
∴$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=2$，

∴$OE=OA=2$.

3．如图，在四边形 $ABCD$ 中，BD 为一条对角线，$AD\parallel BC$，$AD=2BC$，$\angle ABD=90°$，E 为 AD 的中点，连接 BE.

（1）求证：四边形 $BCDE$ 为菱形；

（2）连接 AC，若 AC 平分$\angle BAD$，$BC=1$，求 AC 的长.



【解答】（1）证明：∵$AD=2BC$，E 为 AD 的中点，

∴$DE=BC$，

∵$AD\parallel BC$，

∴四边形 $BCDE$ 是平行四边形，

∵$\angle ABD=90°$，$AE=DE$，

∴$BE=DE$，

∴四边形 $BCDE$ 是菱形.

（2）解：连接 AC.

∵$AD\parallel BC$，AC 平分$\angle BAD$，

∴$\angle BAC=\angle DAC=\angle BCA$，

∴$AB=BC=1$，

∵$AD=2BC=2$，

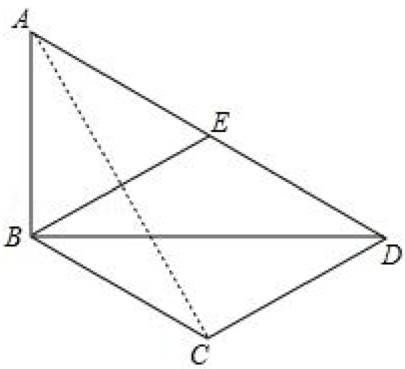
∴$\sin\angle ADB=\frac{1}{2}$，

∴$\angle ADB=30°$，

∴$\angle DAC=30°$，$\angle ADC=60°$，

在Rt△ACD中，∵$AD=2$，

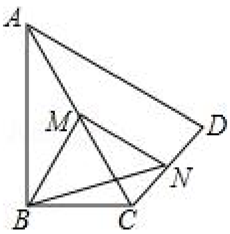
∴$CD=1$，$AC=\sqrt{3}$.



4．如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=90°$，$AC=AD$，M，N分别为AC，CD的中点，连接BM，MN，BN.

（1）求证：$BM=MN$；

（2）$\angle BAD=60°$，AC平分$\angle BAD$，$AC=2$，求BN的长.



【解答】（1）证明：在△CAD中，∵M、N分别是AC、CD的中点，

∴$MN\parallel AD$，$MN=\frac{1}{2}AD$，

在RT△ABC中，∵M是AC中点，

∴$BM=\frac{1}{2}AC$，

∵$AC=AD$，

∴$MN=BM$.

（2）解：∵$\angle BAD=60°$，AC平分$\angle BAD$，

∴$\angle BAC=\angle DAC=30°$，

由（1）可知，$BM=\frac{1}{2}AC=AM=MC$，

∴$\angle BMC=\angle BAM+\angle ABM=2\angle BAM=60°$，

∵$MN\parallel AD$，

∴$\angle NMC=\angle DAC=30°$，

∴$\angle BMN=\angle BMC+\angle NMC=90°$，

∴$BN^2=BM^2+MN^2$，

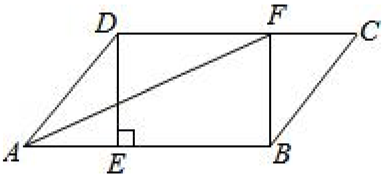
由（1）可知 $MN=BM=\frac{1}{2}AC=1$，

∴$BN=\sqrt{2}$

5．在▱ $ABCD$ 中，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，点 F 在边 CD 上，$DF=BE$，连接 AF，BF．

（1）求证：四边形 $BFDE$ 是矩形；

（2）若 $CF=3$，$BF=4$，$DF=5$，求证：AF 平分 $\angle DAB$．



【解答】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$．

∵$BE\parallel DF$，$BE=DF$，

∴四边形 $BFDE$ 是平行四边形．

∵$DE\perp AB$，

∴$\angle DEB=90°$，

∴四边形 $BFDE$ 是矩形；

（2）解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB\parallel DC$，

∴$\angle DFA=\angle FAB$．

在 Rt△BCF 中，由勾股定理，得

$BC=\sqrt{FC^2+FB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∴$AD=BC=DF=5$，

∴$\angle DAF=\angle DFA$，

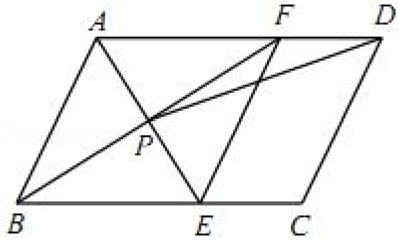
∴$\angle DAF=\angle FAB$，

即 AF 平分$\angle DAB$．

6．如图，在▱ $ABCD$ 中，AE 平分$\angle BAD$，交 BC 于点 E，BF 平分$\angle ABC$，交 AD 于点 F，AE 与 BF 交于点 P，连接 EF，PD．

（1）求证：四边形 $ABEF$ 是菱形；

（2）若 $AB=4$，$AD=6$，$\angle ABC=60°$，求 $\tan\angle ADP$ 的值．



【解答】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$．

∴$\angle DAE=\angle AEB$．

∵AE 是角平分线，

∴$\angle DAE=\angle BAE$．

∴$\angle BAE=\angle AEB$．

∴$AB=BE$．

同理 $AB=AF$．

∴$AF=BE$．

∴四边形 $ABEF$ 是平行四边形．

∵$AB=BE$，

∴四边形 $ABEF$ 是菱形．

（2）解：作 $PH\perp AD$ 于 H，

∵四边形 $ABEF$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，$AB=4$，

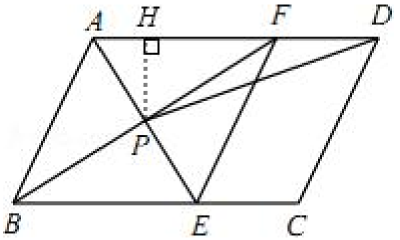
∴$AB=AF=4$，$\angle ABF=\angle AFB=30°$，$AP\perp BF$，

∴$AP=\frac{1}{2}AB=2$，

∴$PH=\sqrt{3}$，$AH=1$，

∴$DH=5$，

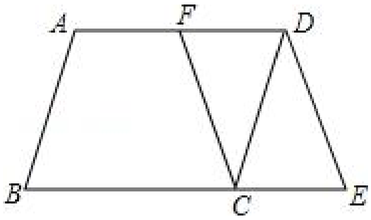
$\therefore \tan\angle ADP=\frac{PH}{DH}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.



7．如图，在▱ $ABCD$ 中，F 是 AD 的中点，延长 BC 到点 E，使 $CE=\frac{1}{2}BC$，连接 DE，CF.

（1）求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

（2）若 $AB=4$，$AD=6$，$\angle B=60°$，求 DE 的长.



【解答】证明：（1）在▱ $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，且 $AD=BC$.

$\because F$ 是 AD 的中点，

$\therefore DF=\frac{1}{2}AD$.

又$\because CE=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore DF=CE$，

$\because DF\parallel CE$，

$\therefore$四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

（2）解：如图，过点 D 作 $DH\perp BE$ 于点 H.

在▱ $ABCD$ 中，∵$\angle B=60°$，$AD\parallel BC$，

∴$\angle B=\angle DCE$，

∴$\angle DCE=60°$.

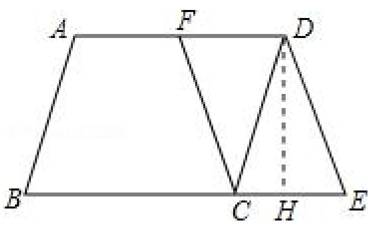
∵$AB=4$，

∴$CD=AB=4$，

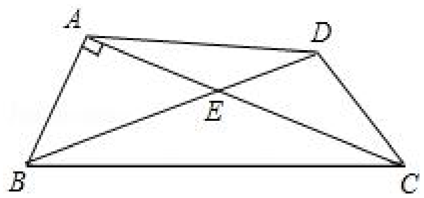
∴$CH=\frac{1}{2}CD=2$，$DH=2\sqrt{3}$.

在▱ $CEDF$ 中，$CE=DF=\frac{1}{2}AD=3$，则 $EH=1$.

∴在 Rt△DHE 中，根据勾股定理知 $DE=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{13}$.



8．如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 E，$\angle BAC=90°$，$\angle CED=45°$，$\angle DCE=30°$，$DE=\sqrt{2}$，$BE=2\sqrt{2}$．求 CD 的长和四边形 $ABCD$ 的面积.



【解答】解：过点 D 作 $DH\perp AC$，

∵$\angle CED=45°$，$DH\perp EC$，$DE=\sqrt{2}$，

∴$EH=DH$，

∵$EH^2+DH^2=ED^2$，

∴$EH^2=1$，

∴$EH=DH=1$，

又∵$\angle DCE=30°$，

∴$DC=2$，$HC=\sqrt{3}$，

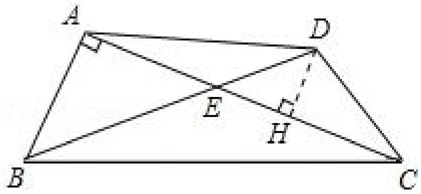
∵$\angle AEB=45°$，$\angle BAC=90°$，

$BE=2\sqrt{2}$，

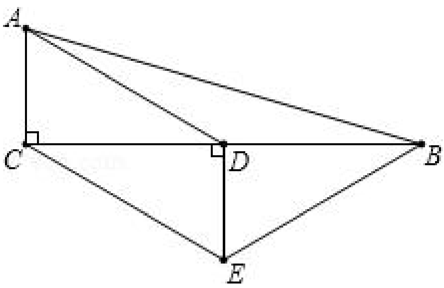
∴$AB=AE=2$，

∴$AC=2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$，

∴$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times 2\times(3+\sqrt{3})+\frac{1}{2}\times 1\times(3+\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}+9}{2}$.



9．如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，D是BC的中点，$DE\perp BC$，$CE/\!/AD$，若$AC=2$，$CE=4$，求四边形$ACEB$的周长．



【解答】解：∵$\angle ACB=90°$，$DE\perp BC$，

∴$AC/\!/DE$．

又∵$CE/\!/AD$，

∴四边形$ACED$是平行四边形．

∴$DE=AC=2$．

在Rt△CDE中，由勾股定理得$CD=\sqrt{CE^2-DE^2}=2\sqrt{3}$．

∵D是BC的中点，

∴$BC=2CD=4\sqrt{3}$．

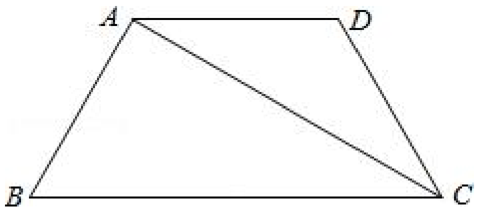
在△ABC中，$\angle ACB=90°$，由勾股定理得$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2\sqrt{13}$．

∵D是BC的中点，$DE\perp BC$，

∴$EB=EC=4$．

∴四边形$ACEB$的周长$=AC+CE+EB+BA=10+2\sqrt{13}$．

10．已知：如图，在梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，$AB=DC=AD=2$，$BC=4$．求$\angle B$的度数及AC的长．



【解答】解：解法一：分别作 $AF\perp BC$，$DG\perp BC$，F、G 是垂足，

$\therefore \angle AFB=\angle DGC=90°$，$AF\parallel DG$，

$\because AD\parallel BC$，

$\therefore$ 四边形 $AFGD$ 是矩形.

$\therefore AF=DG$，

$\because AB=DC$，

$\therefore \text{Rt}\triangle AFB\cong \text{Rt}\triangle DGC$.

$\therefore BF=CG$，

$\because AD=2$，$BC=4$，

$\therefore BF=1$，

在 $\text{Rt}\triangle AFB$ 中，

$\because \cos B=\frac{BF}{AB}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle B=60°$，

$\because BF=1$，

$\therefore AF=\sqrt{3}$，

$\because FC=3$，

由勾股定理，

得 $AC=2\sqrt{3}$，

$\therefore \angle B=60°$，$AC=2\sqrt{3}$.

解法二：过 A 点作 $AE\parallel DC$ 交 BC 于点 E，

$\because AD\parallel BC$，

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形.

$\therefore AD=EC$，$AE=DC$，

$\because AB=DC=AD=2$，$BC=4$，

$\therefore AE=BE=EC=AB$，

即 $AB=BE=AE$，$AE=CE$，

∴△BAC 是直角三角形，△ABE 是等边三角形，

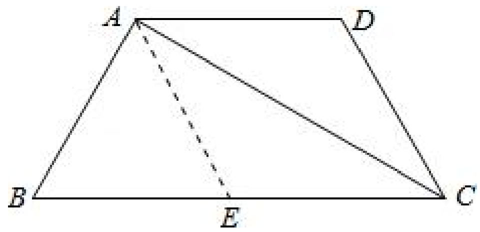
∴$\angle BAE=60°=\angle AEB$，$\angle EAC=\angle ACE=\frac{1}{2}\angle AEB=30°$，

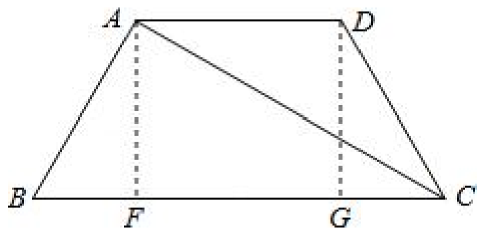
∴$\angle BAC=60°+30°=90°$，$\angle B=60°$．

在 Rt△ABC 中，

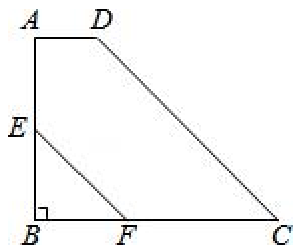
$AC=AB\tan\angle B=AB\cdot\tan60°=2\sqrt{3}$，

∴$\angle B=60°$，$AC=2\sqrt{3}$．





11．如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle B=90°$，$\angle C=45°$，$AD=1$，$BC=4$，E 为 AB 中点，$EF/\!/DC$ 交 BC 于点 F，求 EF 的长．



【解答】解：解法一：如图 1，过点 D 作 $DG\perp BC$ 于点 G

∵$AD/\!/BC$，$\angle B=90°$，

∴$\angle A=90$ 度．

可得四边形 $ABGD$ 为矩形．

∴$BG=AD=1$，$AB=DG$．

∵$BC=4$，

∴$GC=3$．

∵$\angle DGC=90°$，$\angle C=45°$，

∴$\angle CDG=45$度.

∴$DG=GC=3$.

∴$AB=3$.

又∵E为AB中点，

∴$BE=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$.

∵$EF\parallel DC$，

∴$\angle EFB=45$度.

在△BEF中，$\angle B=90$度.

∴$EF=\frac{BE}{\sin 45^\circ}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

解法二：如图2，延长FE交DA的延长线于点G．∵$AD\parallel BC$，$EF\parallel DC$，

∴四边形$GFCD$为平行四边形，$\angle G=\angle 1$.

∴$GD=FC$.

∵$EA=EB$，$\angle 2=\angle 3$，

∴$\triangle GAE\cong\triangle FBE$.

∴$AG=BF$.

∵$AD=1$，$BC=4$，

设$AG=x$，则$BF=x$，$CF=4-x$，$GD=x+1$.

∴$x+1=4-x$.

解得$x=\frac{3}{2}$．∵$\angle C=45^\circ$，

∴$\angle 1=45$度.

在△BEF中，$\angle B=90^\circ$，

∴$EF=\frac{BF}{\cos 45^\circ}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

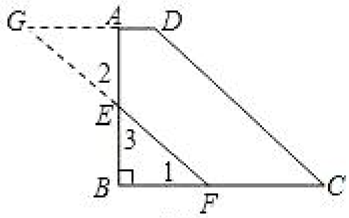


图 2

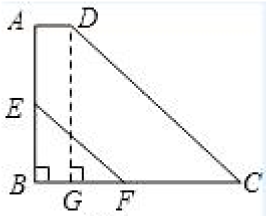
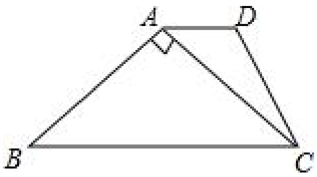


图 1

12．如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB\perp AC$，$\angle B=45°$，$AD=\sqrt{2}$，$BC=4\sqrt{2}$，求 DC 的长．



【解答】解：解法一：

如图 1，分别过点 A，D

作 $AE\perp BC$ 于点 E，$DF\perp BC$ 于点 F．

$\therefore AE\parallel DF$．

又 $AD\parallel BC$，

$\therefore$四边形 $AEFD$ 是矩形．

$\therefore EF=AD=\sqrt{2}$．

$\because AB\perp AC$，$\angle B=45°$，$BC=4\sqrt{2}$，

$\therefore AB=AC$．

$\therefore AE=EC=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{2}$．

$\therefore DF=AE=2\sqrt{2}$，$CF=EC-EF=\sqrt{2}$

在 Rt$\triangle DFC$ 中，$\angle DFC=90°$，

$\therefore DC=\sqrt{DF^2+CF^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$．

解法二：

如图 2，过点 D 作 $DF\parallel AB$，分别交 AC，BC 于点 E，F．

$\because AB\perp AC$，$\therefore \angle AED=\angle BAC=90$ 度．

$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \angle DAE=180°-\angle B-\angle BAC=45$ 度．

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$\angle B=45°$，$BC=4\sqrt{2}$，

$\therefore AC=BC\cdot\sin45^\circ=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$

在 Rt△ADE 中，$\angle AED=90^\circ$，$\angle DAE=45^\circ$，$AD=\sqrt{2}$,

$\therefore DE=AE=1$.

$\therefore CE=AC-AE=3$.

在 Rt△DEC 中，$\angle CED=90^\circ$，

$\therefore DC=\sqrt{DE^2+CE^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

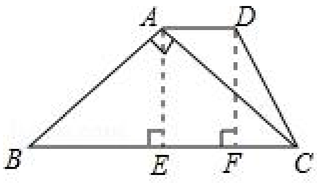


图1

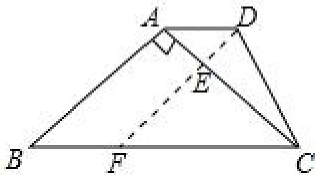


图2