

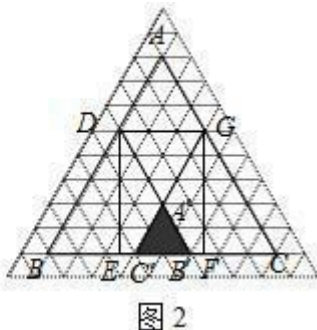
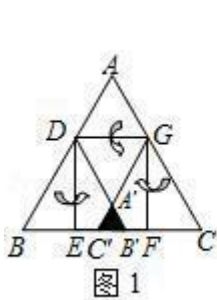
2008~2019 北京中考数学分类汇编(探究性试题之几何篇)

一. 解答题 (共 7 小题)

1. 已知等边三角形纸片 ABC 的边长为 8, D 为 AB 边上的点, 过点 D 作 $DG \parallel BC$ 交 AC 于点 G . $DE \perp BC$ 于点 E , 过点 G 作 $GF \perp BC$ 于点 F , 把三角形纸片 ABC 分别沿 DG , DE , GF 按图 1 所示方式折叠, 点 A , B , C 分别落在点 A' , B' , C' 处. 若点 A' , B' , C' 在矩形 $DEFG$ 内或其边上, 且互不重合, 此时我们称 $\triangle A'B'C'$ (即图中阴影部分) 为“重叠三角形”.

(1) 若把三角形纸片 ABC 放在等边三角形网格中 (图中每个小三角形都是边长为 1 的等边三角形), 点 A , B , C , D 恰好落在网格图中的格点上. 如图 2 所示, 请直接写出此时重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积;

(2) 实验探究: 设 AD 的长为 m , 若重叠三角形 $A'B'C'$ 存在. 试用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积, 并写出 m 的取值范围. (直接写出结果)

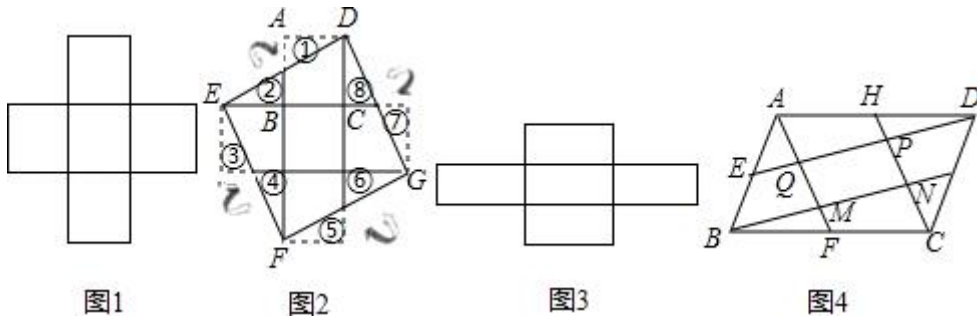


2. 阅读下列材料:

小明遇到一个问题: 5 个同样大小的正方形纸片排列形式如图 1 所示, 将它们分割后拼接成一个新的正方形. 他的做法是: 按图 2 所示的方法分割后, 将三角形纸片①绕 AB 的中点 O 旋转至三角形纸片②处, 依此方法继续操作, 即可拼接成一个新的正方形 $DEFG$. 请你参考小明的做法解决下列问题:

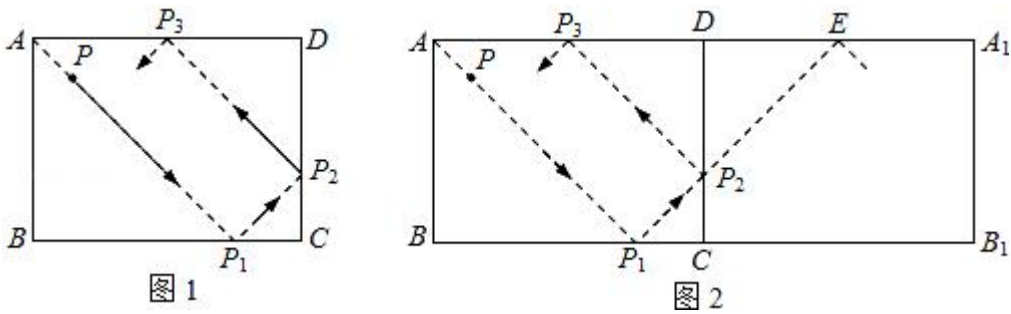
(1) 现有 5 个形状、大小相同的矩形纸片, 排列形式如图 3 所示. 请将其分割后拼接成一个平行四边形. 要求: 在图 3 中画出并指明拼接成的平行四边形 (画出一个符合条件的平行四边形即可);

(2) 如图 4, 在面积为 2 的平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E , F , G , H 分别是边 AB , BC , CD , DA 的中点, 分别连接 AF , BG , CH , DE 得到一个新的平行四边形 $MNPQ$, 请在图 4 中探究平行四边形 $MNPQ$ 面积的大小 (画图并直接写出结果).



3. 阅读下列材料：

小贝遇到一个有趣的问题：在矩形 $ABCD$ 中， $AD=8\text{cm}$ ， $AB=6\text{cm}$ 。现有一动点 P 按下列方式在矩形内运动：它从 A 点出发，沿着 AB 边夹角为 45° 的方向作直线运动，每次碰到矩形的一边，就会改变运动方向，沿着与这条边夹角为 45° 的方向作直线运动，并且它一直按照这种方式不停地运动，即当 P 点碰到 BC 边，沿着 BC 边夹角为 45° 的方向作直线运动，当 P 点碰到 CD 边，再沿着与 CD 边夹角为 45° 的方向作直线运动， \dots ，如图 1 所示，



问 P 点第一次与 D 点重合前与边相碰几次， P 点第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是多少。小贝的思考是这样开始的：如图 2，将矩形 $ABCD$ 沿直线 CD 折叠，得到矩形 A_1B_1CD ，由轴对称的知识，发现 $P_2P_3=P_2E$ ， $P_1A=P_1E$ 。

请你参考小贝的思路解决下列问题：

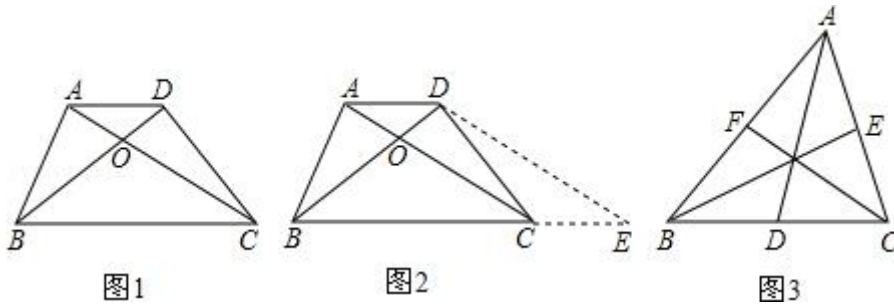
(1) P 点第一次与 D 点重合前与边相碰_____次； P 点从 A 点出发到第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是_____ cm ；

(2) 进一步探究：改变矩形 $ABCD$ 中 AD 、 AB 的长，且满足 $AD > AB$ ，动点 P 从 A 点出发，按照阅读材料中动点的运动方式，并满足前后连续两次与边相碰的位置在矩形 $ABCD$ 相邻的两边上。若 P 点第一次与 B 点重合前与边相碰 7 次，则 $AB:AD$ 的值为_____。

4. 阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题，如图 1，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC ， BD 相交于点 O 。若梯形 $ABCD$ 的面积为 1，试求以 AC ， BD ， $AD+BC$ 的长度为三边长的三角形的面

积.



小伟是这样思考的：要想解决这个问题，首先应想办法移动这些分散的线段，构造一个三角形，再计算其面积即可。他先后尝试了翻折，旋转，平移的方法，发现通过平移可以解决这个问题。他的方法是过点 D 作 AC 的平行线交 BC 的延长线于点 E ，得到的 $\triangle BDE$ 即是以 $AC, BD, AD+BC$ 的长度为三边长的三角形（如图 2）。

参考小伟同学的思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3， $\triangle ABC$ 的三条中线分别为 AD, BE, CF 。

(1) 在图 3 中利用图形变换画出并指明以 AD, BE, CF 的长度为三边长的一个三角形（保留画图痕迹）；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 1，则以 AD, BE, CF 的长度为三边长的三角形的面积等于_____。

5. 操作与探究：

(1) 对数轴上的点 P 进行如下操作：先把点 P 表示的数乘以 $\frac{1}{3}$ ，再把所得数对应的点向右平移 1 个单位，得到点 P 的对应点 P' 。

点 A, B 在数轴上，对线段 AB 上的每个点进行上述操作后得到线段 $A'B'$ ，其中点 A, B 的对应点分别为 A', B' 。如图 1，若点 A 表示的数是 -3，则点 A' 表示的数是_____；若点 B' 表示的数是 2，则点 B 表示的数是_____；已知线段 AB 上的点 E 经过上述操作后得到的对应点 E' 与点 E 重合，则点 E 表示的数是_____。

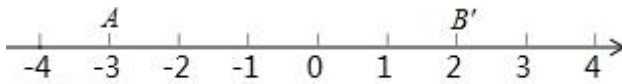


图1

(2) 如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，对正方形 $ABCD$ 及其内部的每个点进行如下操作：把每个点的横、纵坐标都乘以同一个实数 a ，将得到的点先向右平移 m 个单位，再向上平移 n 个单位 ($m > 0, n > 0$)，得到正方形 $A'B'C'D'$ 及其内部的点，其中点 A, B 的对应点分别为 A', B' 。已知正方形 $ABCD$ 内部的一个点 F 经过上述操作后得到的对应点 F' 与点 F 重合，求点 F 的坐标。

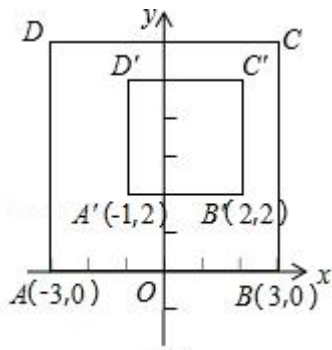


图2

6. 阅读下面材料:

小明遇到这样一个问题: 如图1, 在边长为 a ($a > 2$) 的正方形 $ABCD$ 各边上分别截取 $AE=BF=CG=DH=1$, 当 $\angle AFQ = \angle BGM = \angle CHN = \angle DEP = 45^\circ$ 时, 求正方形 $MNPQ$ 的面积.

小明发现, 分别延长 QE, MF, NG, PH 交 FA, GB, HC, ED 的延长线于点 R, S, T, W , 可得 $\triangle RQF, \triangle SMG, \triangle TNH, \triangle WPE$ 是四个全等的等腰直角三角形 (如图2)

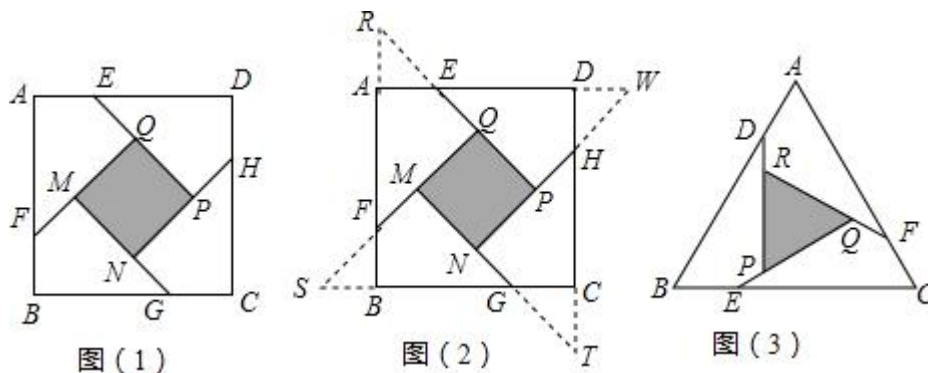
请回答:

(1) 若将上述四个等腰直角三角形拼成一个新的正方形 (无缝隙不重叠), 则这个新正方形的边长为_____;

(2) 求正方形 $MNPQ$ 的面积.

(3) 参考小明思考问题的方法, 解决问题:

如图3, 在等边 $\triangle ABC$ 各边上分别截取 $AD=BE=CF$, 再分别过点 D, E, F 作 BC, AC, AB 的垂线, 得到等边 $\triangle RPQ$. 若 $S_{\triangle RPQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 AD 的长为_____.



图(1)

图(2)

图(3)

7. 阅读下面材料: 小腾遇到这样一个问题: 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 BC 上, $\angle BAD=75^\circ$, $\angle CAD=30^\circ$, $AD=2$, $BD=2DC$, 求 AC 的长.

小腾发现, 过点 C 作 $CE \parallel AB$, 交 AD 的延长线于点 E , 通过构造 $\triangle ACE$, 经过推理和计算能够使问题得到解决 (如图2).

请回答： $\angle ACE$ 的度数为_____， AC 的长为_____.

参考小腾思考问题的方法，解决问题：

如图 3，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\angle CAD=30^\circ$ ， $\angle ADC=75^\circ$ ， AC 与 BD 交于点 E ， $AE=2$ ， $BE=2ED$ ，求 BC 的长.

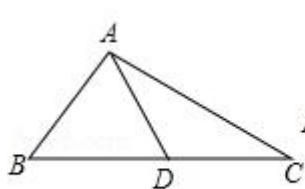


图1

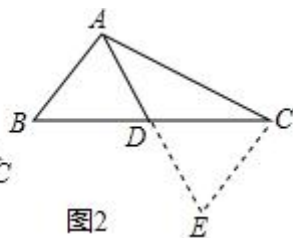


图2

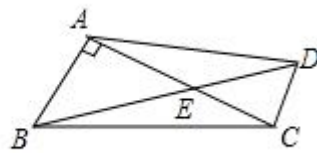


图3

2008~2019 北京中考数学分类汇编(探究性试题之几何篇)

参考答案与试题解析

一. 解答题 (共 7 小题)

1. 已知等边三角形纸片 ABC 的边长为 8, D 为 AB 边上的点, 过点 D 作 $DG \parallel BC$ 交 AC 于点 G . $DE \perp BC$ 于点 E , 过点 G 作 $GF \perp BC$ 于点 F , 把三角形纸片 ABC 分别沿 DG, DE, GF 按图 1 所示方式折叠, 点 A, B, C 分别落在点 A', B', C' 处. 若点 A', B', C' 在矩形 $DEFG$ 内或其边上, 且互不重合, 此时我们称 $\triangle A'B'C'$ (即图中阴影部分) 为“重叠三角形”.

(1) 若把三角形纸片 ABC 放在等边三角形网格中 (图中每个小三角形都是边长为 1 的等边三角形), 点 A, B, C, D 恰好落在网格图中的格点上. 如图 2 所示, 请直接写出此时重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积;

(2) 实验探究: 设 AD 的长为 m , 若重叠三角形 $A'B'C'$ 存在. 试用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积, 并写出 m 的取值范围. (直接写出结果)

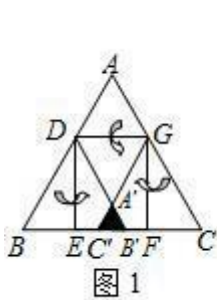


图 1

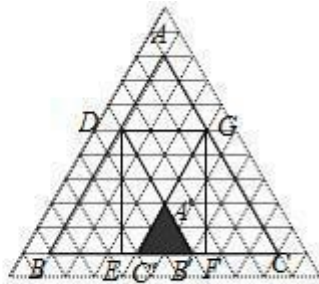


图 2

【解答】解: (1) \because 每个小三角形的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

\therefore 重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{3}$;

(2) 重叠的等边三角形 $A'B'C'$ 的边长 $|8 - m - m| = |8 - 2m|$,

根据 $S = \frac{1}{2}absinC$ 得:

面积是: $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |8 - 2m|^2 = \sqrt{3} (4 - m)^2$,

用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{3} (4 - m)^2$,

m 的取值范围为 $\frac{8}{3} \leq m < 4$.

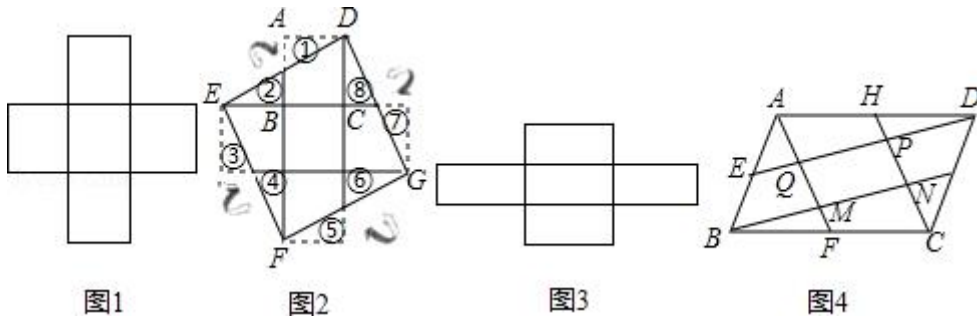
2. 阅读下列材料:

小明遇到一个问题: 5 个同样大小的正方形纸片排列形式如图 1 所示, 将它们分割后拼接

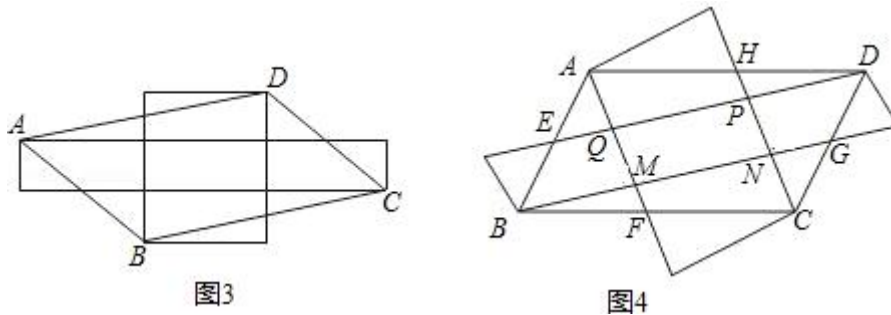
成一个新的正方形. 他的做法是: 按图 2 所示的方法分割后, 将三角形纸片①绕 AB 的中点 O 旋转至三角形纸片②处, 依此方法继续操作, 即可拼接成一个新的正方形 $DEFG$. 请你参考小明的做法解决下列问题:

(1) 现有 5 个形状、大小相同的矩形纸片, 排列形式如图 3 所示. 请将其分割后拼接成一个平行四边形. 要求: 在图 3 中画出并指明拼接成的平行四边形 (画出一个符合条件的平行四边形即可);

(2) 如图 4, 在面积为 2 的平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 G 、 H 分别是边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点, 分别连接 AF 、 BG 、 CH 、 DE 得到一个新的平行四边形 $MNPQ$, 请在图 4 中探究平行四边形 $MNPQ$ 面积的大小 (画图并直接写出结果).



【解答】解:



(1) 拼接成的平行四边形是平行四边形 $ABCD$ (如图 3).

(2) 正确画出图形 (如图 4) 平行四边形 $MNPQ$ 的面积为 $\frac{2}{5}$.

3. 阅读下列材料:

小贝遇到一个有趣的问题: 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=8\text{cm}$, $AB=6\text{cm}$. 现有一动点 P 按下列方式在矩形内运动: 它从 A 点出发, 沿着 AB 边夹角为 45° 的方向作直线运动, 每次碰到矩形的一边, 就会改变运动方向, 沿着与这条边夹角为 45° 的方向作直线运动, 并且它一直按照这种方式不停地运动, 即当 P 点碰到 BC 边, 沿着 BC 边夹角为 45° 的方向作直线运动, 当 P 点碰到 CD 边, 再沿着与 CD 边夹角为 45° 的方向作直线运动, \dots , 如图 1 所示,

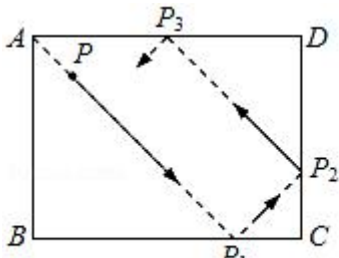


图 1

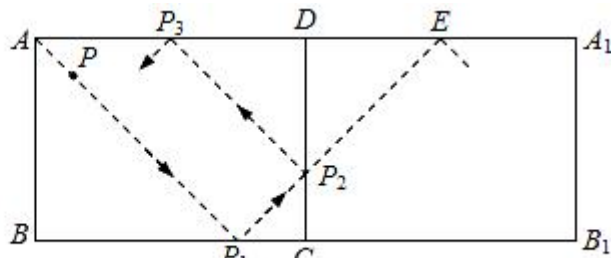


图 2

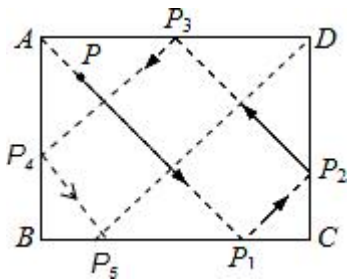
问 P 点第一次与 D 点重合前与边相碰几次, P 点第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是多少. 小贝的思考是这样开始的: 如图 2, 将矩形 $ABCD$ 沿直线 CD 折叠, 得到矩形 A_1B_1CD , 由轴对称的知识, 发现 $P_2P_3 = P_2E$, $P_1A = P_1E$.

请你参考小贝的思路解决下列问题:

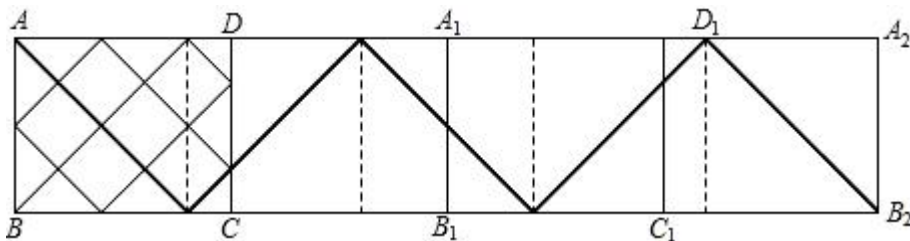
(1) P 点第一次与 D 点重合前与边相碰 5 次; P 点从 A 点出发到第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是 $24\sqrt{2}$ cm;

(2) 进一步探究: 改变矩形 $ABCD$ 中 AD 、 AB 的长, 且满足 $AD > AB$, 动点 P 从 A 点出发, 按照阅读材料中动点的运动方式, 并满足前后连续两次与边相碰的位置在矩形 $ABCD$ 相邻的两边上. 若 P 点第一次与 B 点重合前与边相碰 7 次, 则 $AB:AD$ 的值为 4:5.

【解答】解: (1) 5;



(2) $24\sqrt{2}$; 解题思路示意图:

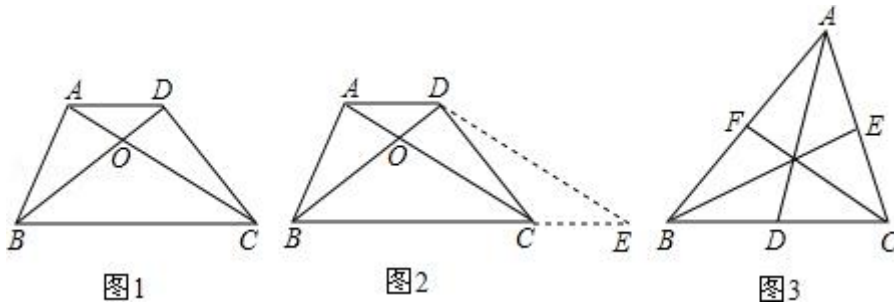


(2) $AB:AD=4:5$.

4. 阅读下面材料:

小伟遇到这样一个问题, 如图 1, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC , BD 相交于点 O . 若梯形 $ABCD$ 的面积为 1, 试求以 AC , BD , $AD+BC$ 的长度为三边长的三角形的面

积.



小伟是这样思考的：要想解决这个问题，首先应想办法移动这些分散的线段，构造一个三角形，再计算其面积即可。他先后尝试了翻折，旋转，平移的方法，发现通过平移可以解决这个问题。他的方法是过点 D 作 AC 的平行线交 BC 的延长线于点 E ，得到的 $\triangle BDE$ 即是以 AC ， BD ， $AD+BC$ 的长度为三边长的三角形（如图 2）。

参考小伟同学的思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3， $\triangle ABC$ 的三条中线分别为 AD ， BE ， CF 。

(1) 在图 3 中利用图形变换画出并指明以 AD ， BE ， CF 的长度为三边长的一个三角形（保留画图痕迹）；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 1，则以 AD ， BE ， CF 的长度为三边长的三角形的面积等于 $\frac{3}{4}$ 。

【解答】解： $\triangle BDE$ 的面积等于 1。

(1) 如图。以 AD 、 BE 、 CF 的长度为三边长的一个三角形是 $\triangle CFP$ 。

(2) 平移 AF 到 PE ，可得 $AF \parallel PE$ ， $AF = PE$ ，

\therefore 四边形 $AFEP$ 为平行四边形，

$\therefore AE$ 与 PF 互相平分，即 M 为 PF 的中点，

又 $\because AP \parallel FN$ ， F 为 AB 的中点，

$\therefore N$ 为 PC 的中点，

$\therefore E$ 为 $\triangle PFC$ 各边中线的交点，

$\therefore \triangle PEC$ 的面积为 $\triangle PFC$ 面积的 $\frac{1}{3}$

连接 DE ，可知 DE 与 PE 在一条直线上

$\therefore \triangle EDC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$

所以 $\triangle PFC$ 的面积是 $1 \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$

∴以 AD 、 BE 、 CF 的长度为三边长的三角形的面积等于 $\frac{3}{4}$.

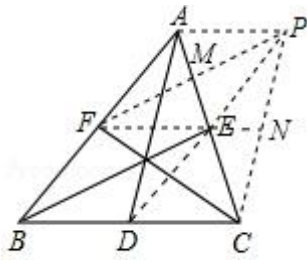


图3

5. 操作与探究:

(1) 对数轴上的点 P 进行如下操作: 先把点 P 表示的数乘以 $\frac{1}{3}$, 再把所得数对应的点向右平移 1 个单位, 得到点 P 的对应点 P' .

点 A, B 在数轴上, 对线段 AB 上的每个点进行上述操作后得到线段 $A'B'$, 其中点 A, B 的对应点分别为 A', B' . 如图 1, 若点 A 表示的数是 -3 , 则点 A' 表示的数是 0; 若点 B' 表示的数是 2 , 则点 B 表示的数是 3; 已知线段 AB 上的点 E 经过上述操作后得到的对应点 E' 与点 E 重合, 则点 E 表示的数是 $\frac{3}{2}$.

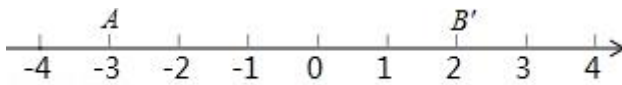


图1

(2) 如图 2, 在平面直角坐标系 xOy 中, 对正方形 $ABCD$ 及其内部的每个点进行如下操作: 把每个点的横、纵坐标都乘以同一个实数 a , 将得到的点先向右平移 m 个单位, 再向上平移 n 个单位 ($m > 0, n > 0$), 得到正方形 $A'B'C'D'$ 及其内部的点, 其中点 A, B 的对应点分别为 A', B' . 已知正方形 $ABCD$ 内部的一个点 F 经过上述操作后得到的对应点 F' 与点 F 重合, 求点 F 的坐标.

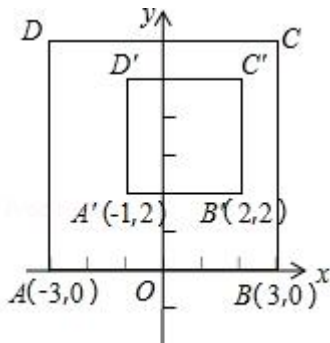


图2

【解答】解: (1) 点 A' : $-3 \times \frac{1}{3} + 1 = -1 + 1 = 0$,

设点 B 表示的数为 a , 则 $\frac{1}{3}a+1=2$,

解得 $a=3$,

设点 E 表示的数为 b , 则 $\frac{1}{3}b+1=b$,

解得 $b=\frac{3}{2}$;

故答案为: $0, 3, \frac{3}{2}$;

(2) 根据题意得,
$$\begin{cases} -3a+m=-1 \\ 3a+m=2 \\ 0 \cdot a+n=2 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ m=\frac{1}{2} \\ n=2 \end{cases}$$

设点 F 的坐标为 (x, y) ,

\therefore 对应点 F' 与点 F 重合,

$\therefore \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=x, \frac{1}{2}y+2=y$,

解得 $x=1, y=4$,

所以, 点 F 的坐标为 $(1, 4)$.

6. 阅读下面材料:

小明遇到这样一个问题: 如图 1, 在边长为 a ($a>2$) 的正方形 $ABCD$ 各边上分别截取 $AE=BF=CG=DH=1$, 当 $\angle AFQ=\angle BGM=\angle CHN=\angle DEP=45^\circ$ 时, 求正方形 $MNPQ$ 的面积.

小明发现, 分别延长 QE, MF, NG, PH 交 FA, GB, HC, ED 的延长线于点 R, S, T, W , 可得 $\triangle RQF, \triangle SMG, \triangle TNH, \triangle WPE$ 是四个全等的等腰直角三角形 (如图 2)

请回答:

(1) 若将上述四个等腰直角三角形拼成一个新的正方形 (无缝隙不重叠), 则这个新正方形的边长为 a ;

(2) 求正方形 $MNPQ$ 的面积.

(3) 参考小明思考问题的方法, 解决问题:

如图 3, 在等边 $\triangle ABC$ 各边上分别截取 $AD=BE=CF$, 再分别过点 D, E, F 作 BC, AC ,

AB 的垂线, 得到等边 $\triangle RPQ$. 若 $S_{\triangle RPQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 AD 的长为 $\frac{2}{3}$.

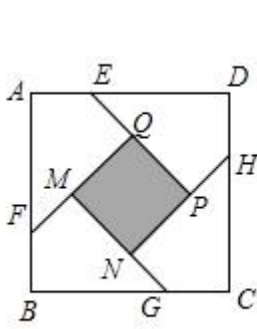


图 (1)

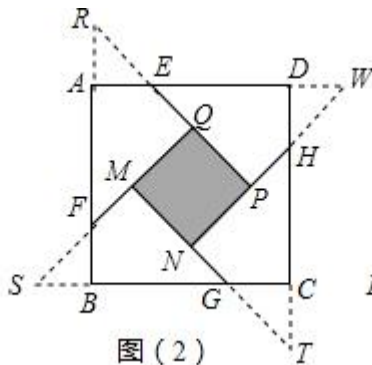


图 (2)

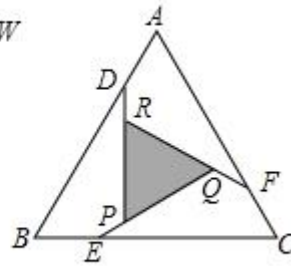


图 (3)

【解答】解: (1) 四个等腰直角三角形的斜边长为 a , 则斜边上的高为 $\frac{1}{2}a$,

每个等腰直角三角形的面积为: $\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$,

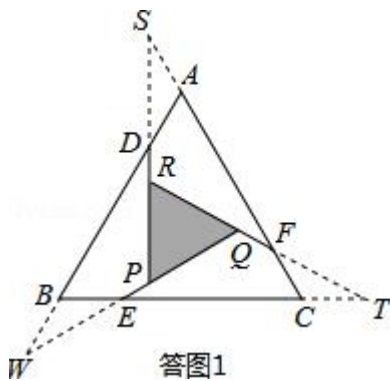
则拼成的新正方形面积为: $4 \times \frac{1}{4}a^2 = a^2$, 即与原正方形 $ABCD$ 面积相等,

\therefore 这个新正方形的边长为 a ;

(2) \because 四个等腰直角三角形的面积和为 a^2 , 正方形 $ABCD$ 的面积为 a^2 ,

$\therefore S_{\text{正方形 } MNPQ} = S_{\triangle ARE} + S_{\triangle DWH} + S_{\triangle GCT} + S_{\triangle SBF} = 4S_{\triangle ARE} = 4 \times \frac{1}{2} \times 1^2 = 2$;

(3) 如答图 1 所示, 分别延长 RD , QF , PE , 交 FA , EC , DB 的延长线于点 S , T , W .

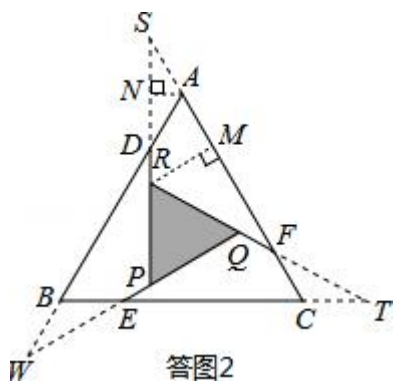


答图1

由题意易得: $\triangle RSF$, $\triangle QET$, $\triangle PDW$ 均为底角是 30° 的等腰三角形, 其底边长均等于 $\triangle ABC$ 的边长.

不妨设等边三角形边长为 a , 则 $SF = AC = a$.

如答图 2 所示, 过点 R 作 $RM \perp SF$ 于点 M , 则 $MF = \frac{1}{2}SF = \frac{1}{2}a$,



答图2

在 $\text{Rt}\triangle RMF$ 中, $RM = MF \cdot \tan 30^\circ = \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$,

$$\therefore S_{\triangle RSF} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

过点 A 作 $AN \perp SD$ 于点 N , 设 $AD = AS = x$,

则 $AN = AD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}x$, $SD = 2ND = 2AD \cos 30^\circ = \sqrt{3}x$,

$$\therefore S_{\triangle ADS} = \frac{1}{2}SD \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

\because 三个等腰三角形 $\triangle RSF$, $\triangle QET$, $\triangle PDW$ 的面积和 $= 3S_{\triangle RSF} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

$$\therefore S_{\triangle RPQ} = S_{\triangle ADS} + S_{\triangle CFT} + S_{\triangle BEW} = 3S_{\triangle ADS},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2, \text{ 得 } x^2 = \frac{4}{9},$$

解得 $x = \frac{2}{3}$ 或 $x = -\frac{2}{3}$ (不合题意, 舍去)

$$\therefore x = \frac{2}{3}, \text{ 即 } AD \text{ 的长为 } \frac{2}{3}.$$

故答案为: $a; \frac{2}{3}$.

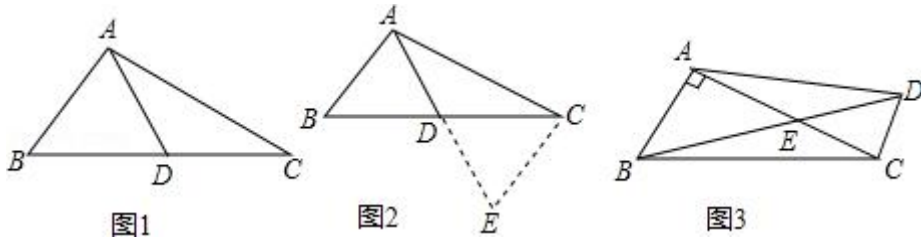
7. 阅读下面材料: 小腾遇到这样一个问题: 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 BC 上, $\angle BAD = 75^\circ$, $\angle CAD = 30^\circ$, $AD = 2$, $BD = 2DC$, 求 AC 的长.

小腾发现, 过点 C 作 $CE \parallel AB$, 交 AD 的延长线于点 E , 通过构造 $\triangle ACE$, 经过推理和计算能够使问题得到解决 (如图 2).

请回答: $\angle ACE$ 的度数为 75° , AC 的长为 3 .

参考小腾思考问题的方法, 解决问题:

如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ADC = 75^\circ$, AC 与 BD 交于点 E , $AE = 2$, $BE = 2ED$, 求 BC 的长.



【解答】解： $\angle ABC + \angle ACB = \angle ECD + \angle ACB = \angle ACE = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$ ，
 $\angle E = 75^\circ$ ， $BD = 2DC$ ，

$$\therefore AD = 2DE,$$

$$AE = AD + DE = 3,$$

$$\therefore AC = AE = 3,$$

$\angle ACE = 75^\circ$ ， AC 的长为 3.

过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F .

$$\because \angle BAC = 90^\circ = \angle DFA,$$

$$\therefore AB \parallel DF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FDE,$$

$$\therefore \frac{AB}{DF} = \frac{AE}{EF} = \frac{BE}{DE} = 2,$$

$$\therefore EF = 1, AB = 2DF.$$

在 $\triangle ACD$ 中， $\angle CAD = 30^\circ$ ， $\angle ADC = 75^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACD = 75^\circ, AC = AD.$$

$$\because DF \perp AC,$$

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ,$$

在 $\triangle AFD$ 中， $AF = 2 + 1 = 3$ ， $\angle FAD = 30^\circ$ ，

$$\therefore DF = AF \tan 30^\circ = \sqrt{3}, AD = 2DF = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore AC = AD = 2\sqrt{3}, AB = 2DF = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{6}.$$

