2008～2019 北京中考数学分类(新定义)

一．解答题（共 9 小题）

1．在△*ABC* 中，*D*，*E* 分别是△*ABC* 两边的中点，如果$\widehat{DE}$上的所有点都在△*ABC* 的内部或边上，则称$\widehat{DE}$为△*ABC* 的中内弧．例如，图 1 中$\widehat{DE}$是△*ABC* 的一条中内弧．

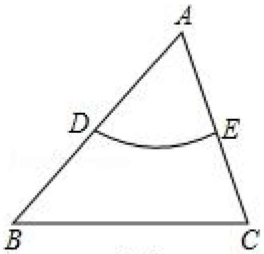


图1

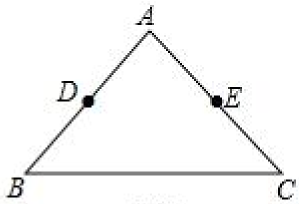


图2

（1）如图 2，在 Rt△*ABC* 中，*AB*＝*AC*＝$2\sqrt{2}$，*D*，*E* 分别是 *AB*，*AC* 的中点，画出△*ABC* 的最长的中内弧$\widehat{DE}$，并直接写出此时$\widehat{DE}$的长；

（2）在平面直角坐标系中，已知点 *A*（0，2），*B*（0，0），*C*（4*t*，0）（*t*＞0），在△*ABC* 中，*D*，*E* 分别是 *AB*，*AC* 的中点．

①若 $t=\frac{1}{2}$，求△*ABC* 的中内弧$\widehat{DE}$所在圆的圆心 *P* 的纵坐标的取值范围；

②若在△*ABC* 中存在一条中内弧$\widehat{DE}$，使得$\widehat{DE}$所在圆的圆心 *P* 在△*ABC* 的内部或边上，直接写出 *t* 的取值范围．

2．对于平面直角坐标系 *xOy* 中的图形 *M*，*N*，给出如下定义：*P* 为图形 *M* 上任意一点，*Q* 为图形 *N* 上任意一点，如果 *P*，*Q* 两点间的距离有最小值，那么称这个最小值为图形 *M*，*N* 间的“闭距离“，记作 *d*（*M*，*N*）．

已知点 *A*（﹣2，6），*B*（﹣2，﹣2），*C*（6，﹣2）．

（1）求 *d*（点 *O*，△*ABC*）；

（2）记函数 *y*＝*kx*（﹣1≤*x*≤1，*k*≠0）的图象为图形 *G*．若 *d*（*G*，△*ABC*）＝1，直接写出 *k* 的取值范围；

（3）⊙*T* 的圆心为 *T*（*t*，0），半径为 1．若 *d*（⊙*T*，△*ABC*）＝1，直接写出 *t* 的取值范围．

3．在平面直角坐标系 *xOy* 中的点 *P* 和图形 *M*，给出如下的定义：若在图形 *M* 上存在一点 *Q*，使得 *P*、*Q* 两点间的距离小于或等于 1，则称 *P* 为图形 *M* 的关联点．

（1）当⊙*O* 的半径为 2 时，

①在点 P_1（$\frac{1}{2}$，0），P_2（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），P_3（$\frac{5}{2}$，0）中，⊙O 的关联点是_______.

②点 P 在直线 $y=-x$ 上，若 P 为⊙O 的关联点，求点 P 的横坐标的取值范围.

（2）⊙C 的圆心在 x 轴上，半径为 2，直线 $y=-x+1$ 与 x 轴、y 轴交于点 A、B．若线段 AB 上的所有点都是⊙C 的关联点，直接写出圆心 C 的横坐标的取值范围.

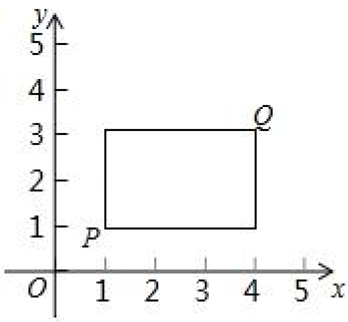
4．在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 的坐标为（x_1，y_1），点 Q 的坐标为（x_2，y_2），且 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，若 P，Q 为某个矩形的两个顶点，且该矩形的边均与某条坐标轴垂直，则称该矩形为点 P，Q 的“相关矩形”，如图为点 P，Q 的“相关矩形”示意图.

（1）已知点 A 的坐标为（1，0），

①若点 B 的坐标为（3，1），求点 A，B 的“相关矩形”的面积；

②点 C 在直线 $x=3$ 上，若点 A，C 的“相关矩形”为正方形，求直线 AC 的表达式；

（2）⊙O 的半径为$\sqrt{2}$，点 M 的坐标为（m，3），若在⊙O 上存在一点 N，使得点 M，N 的“相关矩形”为正方形，求 m 的取值范围.



5．在平面直角坐标系 xOy 中，⊙C 的半径为 r，P 是与圆心 C 不重合的点，点 P 关于⊙C 的反称点的定义如下：若在射线 CP 上存在一点 P'，满足 $CP+CP'=2r$，则称 P' 为点 P 关于⊙C 的反称点，如图为点 P 及其关于⊙C 的反称点 P' 的示意图.

特别地，当点 P' 与圆心 C 重合时，规定 $CP'=0$.

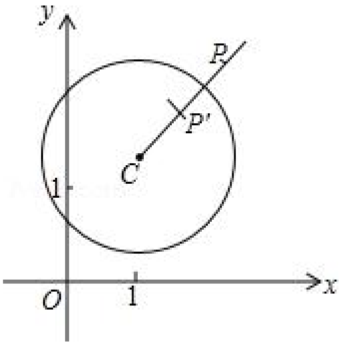
（1）当⊙O 的半径为 1 时.

①分别判断点 M（2，1），N（$\frac{3}{2}$，0），T（1，$\sqrt{3}$）关于⊙O 的反称点是否存在？若存在，求其坐标；

②点 P 在直线 $y=-x+2$ 上，若点 P 关于⊙O 的反称点 P' 存在，且点 P' 不在 x 轴上，求点 P 的横坐标的取值范围；

（2）⊙C 的圆心在 x 轴上，半径为 1，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，若线段 AB 上存在点 P，使得点 P 关于⊙C 的反称点 P' 在⊙C 的内部，求圆心 C 的

横坐标的取值范围．

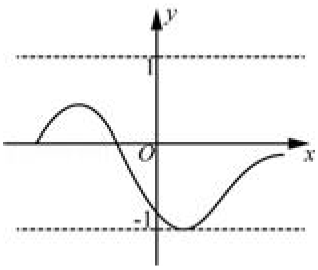


6．对某一个函数给出如下定义：若存在实数 $M>0$，对于任意的函数值 y，都满足 $-M\leqslant y\leqslant M$，则称这个函数是有界函数，在所有满足条件的 M 中，其最小值称为这个函数的边界值．例如，如图中的函数是有界函数，其边界值是 1．

（1）分别判断函数 $y=\frac{1}{x}$（$x>0$）和 $y=x+1$（$-4<x\leqslant 2$）是不是有界函数？若是有界函数，求其边界值；

（2）若函数 $y=-x+1$（$a\leqslant x\leqslant b$，$b>a$）的边界值是 2，且这个函数的最大值也是 2，求 b 的取值范围；

（3）将函数 $y=x^2$（$-1\leqslant x\leqslant m$，$m\geqslant 0$）的图象向下平移 m 个单位，得到的函数的边界值是 t，当 m 在什么范围时，满足 $\frac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1$？



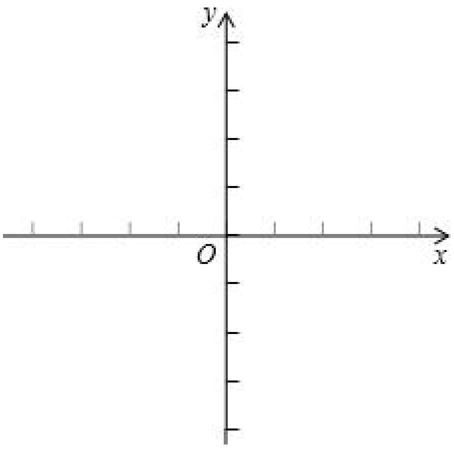
7．对于平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和⊙C，给出如下的定义：若⊙C 上存在两个点 A、B，使得 $\angle APB=60°$，则称 P 为⊙C 的关联点．已知点 D（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），E（0，-2），F（$2\sqrt{3}$，0）．

（1）当⊙O 的半径为 1 时，

①在点 D、E、F 中，⊙O 的关联点是_______．

②过点 F 作直线 l 交 y 轴正半轴于点 G，使 $\angle GFO=30°$，若直线 l 上的点 P（m，n）是⊙O 的关联点，求 m 的取值范围；

（2）若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点，求这个圆的半径 r 的取值范围．



8．在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意两点 P_1（x_1，y_1）与 P_2（x_2，y_2）的“非常距离”，给出如下定义：

若$|x_1-x_2|\geqslant|y_1-y_2|$，则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为$|x_1-x_2|$；

若$|x_1-x_2|<|y_1-y_2|$，则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为$|y_1-y_2|$.

例如：点 P_1（1，2），点 P_2（3，5），因为$|1-3|<|2-5|$，所以点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为$|2-5|=3$，也就是图 1 中线段 P_1Q 与线段 P_2Q 长度的较大值（点 Q 为垂直于 y 轴的直线 P_1Q 与垂直于 x 轴的直线 P_2Q 交点）.

（1）已知点 A（$-\dfrac{1}{2}$，0），B 为 y 轴上的一个动点，

①若点 A 与点 B 的“非常距离”为 2，写出一个满足条件的点 B 的坐标；

②直接写出点 A 与点 B 的“非常距离”的最小值；

（2）已知 C 是直线 $y=\dfrac{3}{4}x+3$ 上的一个动点，

①如图 2，点 D 的坐标是（0，1），求点 C 与点 D 的“非常距离”的最小值及相应的点 C 的坐标；

②如图 3，E 是以原点 O 为圆心，1 为半径的圆上的一个动点，求点 C 与点 E 的“非常距离”的最小值及相应的点 E 与点 C 的坐标.

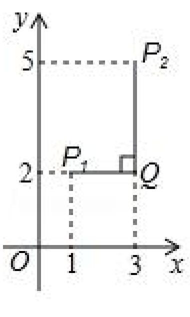


图1

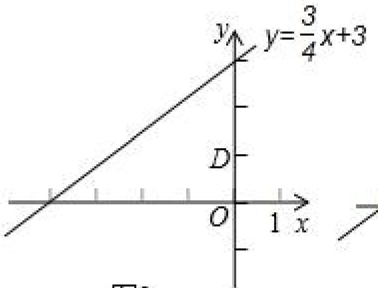


图2

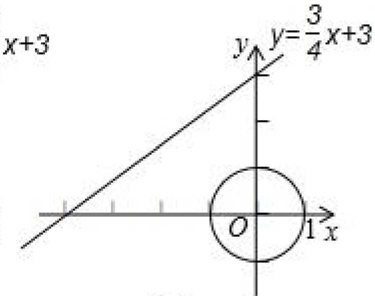


图3

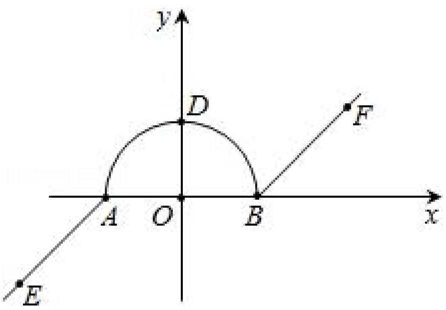
9．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，我们把由两条射线 AE，BF 和以 AB 为直径的半圆所

组成的图形叫作图形 C（注：不含 AB 线段）．已知 A（－1，0），B（1，0），$AE\parallel BF$，且半圆与 y 轴的交点 D 在射线 AE 的反向延长线上．

（1）求两条射线 AE，BF 所在直线的距离；

（2）当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有一个公共点时，写出 b 的取值范围；当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有两个公共点时，写出 b 的取值范围；

（3）已知▱ $AMPQ$（四个顶点 A，M，P，Q 按顺时针方向排列）的各顶点都在图形 C 上，且不都在两条射线上，求点 M 的横坐标 x 的取值范围．



2008～2019 北京中考数学分类(新定义)

参考答案与试题解析

一．解答题（共 9 小题）

1．在△ABC 中，D，E 分别是△ABC 两边的中点，如果$\overset{\frown}{DE}$上的所有点都在△ABC 的内部或边上，则称$\overset{\frown}{DE}$为△ABC 的中内弧．例如，图 1 中$\overset{\frown}{DE}$是△ABC 的一条中内弧．

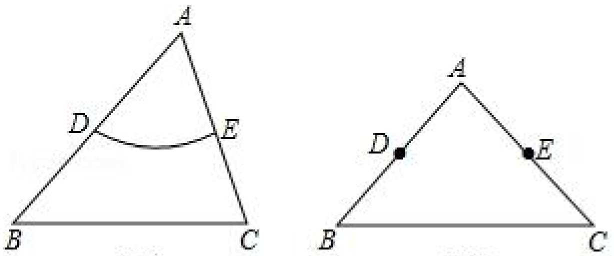


图1　　图2

（1）如图 2，在 Rt△ABC 中，$AB=AC=2\sqrt{2}$，D，E 分别是 AB，AC 的中点，画出△ABC 的最长的中内弧$\overset{\frown}{DE}$，并直接写出此时$\overset{\frown}{DE}$的长；

（2）在平面直角坐标系中，已知点 A（0，2），B（0，0），C（$4t$，0）（$t>0$），在△ABC 中，D，E 分别是 AB，AC 的中点．

①若 $t=\frac{1}{2}$，求△ABC 的中内弧$\overset{\frown}{DE}$所在圆的圆心 P 的纵坐标的取值范围；

②若在△ABC 中存在一条中内弧$\overset{\frown}{DE}$，使得$\overset{\frown}{DE}$所在圆的圆心 P 在△ABC 的内部或边上，直接写出 t 的取值范围．

【解答】解：（1）如图 2，以 DE 为直径的半圆弧$\overset{\frown}{DE}$，就是△ABC 的最长的中内弧$\overset{\frown}{DE}$，

连接 DE，∵$\angle A=90°$，$AB=AC=2\sqrt{2}$，D，E 分别是 AB，AC 的中点，

∴$BC=\frac{AC}{\sin B}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}=4$，$DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 4=2$，

∴弧$\overset{\frown}{DE}=\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$；

（2）如图 3，由垂径定理可知，圆心一定在线段 DE 的垂直平分线上，连接 DE，作 DE 垂直平分线 FP，作 $EG\perp AC$ 交 FP 于 G，

①当 $t=\frac{1}{2}$时，C（2，0），∴D（0，1），E（1，1），F（$\frac{1}{2}$，1），

设 P（$\frac{1}{2}$，m）由三角形中内弧定义可知，圆心在线段 DE 上方射线 FP 上均可，∴$m\geqslant 1$，

∵$OA=OC$，$\angle AOC=90°$

$\therefore \angle ACO=45°$，

$\because DE /\!/ OC$

$\therefore \angle AED=\angle ACO=45°$

作 $EG\perp AC$ 交直线 FP 于 G，$FG=EF=\frac{1}{2}$

根据三角形中内弧的定义可知，圆心在点 G 的下方（含点 G）直线 FP 上时也符合要求；

$\therefore m\leqslant\frac{1}{2}$

综上所述，$m\leqslant\frac{1}{2}$或 $m\geqslant1$．

②如图 4，设圆心 P 在 AC 上，

$\because P$ 在 DE 中垂线上，

$\therefore P$ 为 AE 中点，作 $PM\perp OC$ 于 M，则 $PM=\frac{3}{2}$，

$\therefore P(t，\frac{3}{2})$，

$\because DE /\!/ BC$

$\therefore \angle ADE=\angle AOB=90°$

$\therefore AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{1^2+(2t)^2}=\sqrt{4t^2+1}$，

$\because PD=PE$，

$\therefore \angle AED=\angle PDE$

$\because \angle AED+\angle DAE=\angle PDE+\angle ADP=90°$，

$\therefore \angle DAE=\angle ADP$

$\therefore AP=PD=PE=\frac{1}{2}AE$

由三角形中内弧定义知，$PD\leqslant PM$

$\therefore \frac{1}{2}AE\leqslant\frac{3}{2}$，$AE\leqslant3$，即$\sqrt{4t^2+1}\leqslant3$，解得：$t\leqslant\sqrt{2}$，

$\because t>0$

$\therefore 0<t\leqslant\sqrt{2}$.

如图 5，设圆心 P 在 BC 上，则 $P(t，0)$

$PD=PE=\sqrt{OD^2+OP^2}=\sqrt{t^2+1}$，

$PC=3t$，$CE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{4t^2+1}$

由三角形中内弧定义知，$\angle PEC<90^\circ$，

$\therefore PE^2+CE^2\geqslant PC^2$

即 $(\sqrt{t^2+1})^2+(\sqrt{4t^2+1})^2\geqslant(3t)^2$，$\because t>0$

$\therefore 0<t\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

综上所述，t 的取值范围为：$0<t\leqslant\sqrt{2}$.

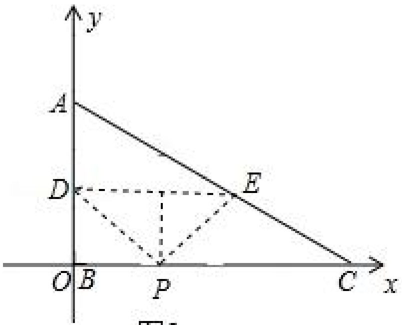


图5

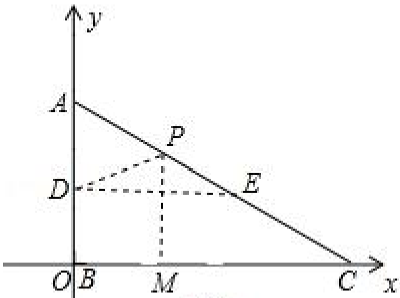
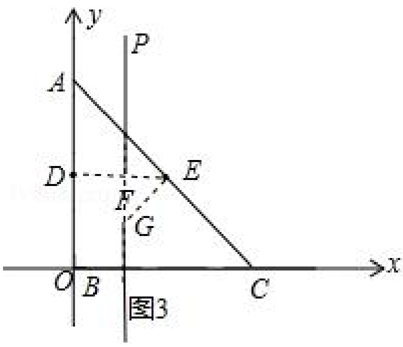


图4



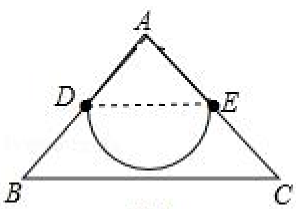


图2

2．对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M，N，给出如下定义：P 为图形 M 上任意一点，Q 为图形 N 上任意一点，如果 P，Q 两点间的距离有最小值，那么称这个最小值为图形 M，N 间的“闭距离“，记作 d（M，N）.

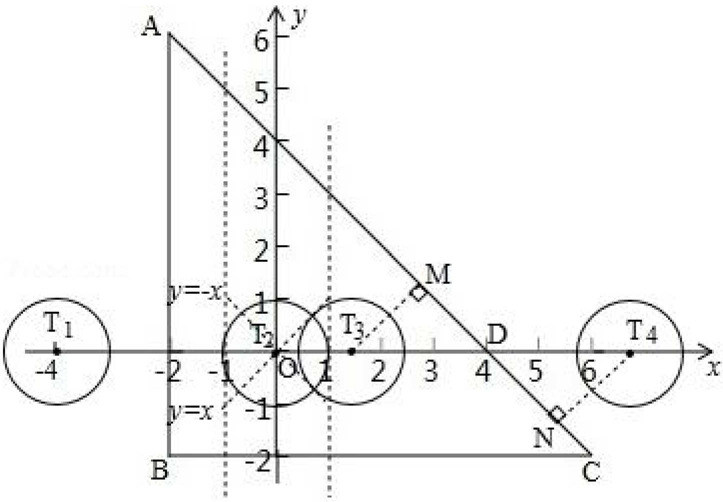
已知点 A（－2，6），B（－2，－2），C（6，－2）.

（1）求 d（点 O，$\triangle ABC$）；

（2）记函数 $y=kx$（－1≤x≤1，$k\neq 0$）的图象为图形 G．若 d（G，$\triangle ABC$）＝1，直接写出 k 的取值范围；

（3）⊙T 的圆心为 T（t，0），半径为 1．若 d（⊙T，$\triangle ABC$）＝1，直接写出 t 的取值范围.

【解答】解：（1）如图所示，点 O 到△ABC 的距离的最小值为 2，



∴d（点 O，△ABC）＝2；

（2）$y=kx$（$k\neq 0$）经过原点，在－1≤x≤1 范围内，函数图象为线段，

当 $y=kx$（－1≤x≤1，$k\neq 0$）经过（1，－1）时，k=－1，此时 d（G，△ABC）＝1；

当 $y=kx$（－1≤x≤1，$k\neq 0$）经过（－1，－1）时，k=1，此时 d（G，△ABC）＝1；

∴－1≤k≤1，

∵$k\neq 0$，

∴－1≤k≤1 且 $k\neq 0$；

（3）⊙T 与△ABC 的位置关系分三种情况：

①当⊙T 在△ABC 的左侧时，由 d（⊙T，△ABC）＝1 知此时 t=－4；

②当⊙T 在△ABC 内部时，

当点 T 与原点重合时，d（⊙T，△ABC）＝1，知此时 t=0；

当点 T 位于 T_3 位置时，由 d（⊙T，△ABC）＝1 知 $T_3M=2$，

∵$AB=BC=8$、$\angle ABC=90°$，

∴$\angle C=\angle T_3DM=45°$，

则 $T_3D=\frac{T_3M}{\cos 45°}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$，

∴$t=4-2\sqrt{2}$，

故此时 $0\leqslant t\leqslant 4-2\sqrt{2}$；

③当⊙T 在△ABC 右边时，由 d（⊙T，△ABC）＝1 知 $T_4N=2$，

∵$\angle T_4DC=\angle C=45°$，

∴$T_4D=\frac{T_4N}{\cos 45°}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$，

∴$t=4+2\sqrt{2}$；

综上，$t=-4$ 或 $0\leqslant t\leqslant 4-2\sqrt{2}$或 $t=4+2\sqrt{2}$．

3．在平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和图形 M，给出如下的定义：若在图形 M 上存在一点 Q，使得 P、Q 两点间的距离小于或等于 1，则称 P 为图形 M 的关联点．

（1）当⊙O 的半径为 2 时，

①在点 P_1（$\frac{1}{2}$，0），P_2（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），P_3（$\frac{5}{2}$，0）中，⊙O 的关联点是__P_2，P_3__．

②点 P 在直线 $y=-x$ 上，若 P 为⊙O 的关联点，求点 P 的横坐标的取值范围．

（2）⊙C 的圆心在 x 轴上，半径为 2，直线 $y=-x+1$ 与 x 轴、y 轴交于点 A、B．若线段 AB 上的所有点都是⊙C 的关联点，直接写出圆心 C 的横坐标的取值范围．

【解答】解：（1）①∵点 P_1（$\frac{1}{2}$，0），P_2（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），P_3（$\frac{5}{2}$，0），

∴$OP_1=\frac{1}{2}$，$OP_2=1$，$OP_3=\frac{5}{2}$，

∴P_1 与⊙O 的最小距离为$\frac{3}{2}$，P_2 与⊙O 的最小距离为 1，OP_3 与⊙O 的最小距离为$\frac{1}{2}$，

∴⊙O，⊙O 的关联点是 P_2，P_3；

故答案为：P_2，P_3；

②根据定义分析，可得当最小 $y=-x$ 上的点 P 到原点的距离在 1 到 3 之间时符合题意，

∴设 P（x，$-x$），当 $OP=1$ 时，

由距离公式得，$OP=\sqrt{(x-0)^2+(-x-0)^2}=1$，

∴$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当 OP＝3 时，$OP=\sqrt{(x-0)^2+(-x-0)^2}=3$，

解得：$x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$；

∴点 P 的横坐标的取值范围为：$-\frac{3\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$，或$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$；

（2）∵直线 $y=-x+1$ 与 x 轴、y 轴交于点 A、B，

∴A（1，0），B（0，1），

如图 1，

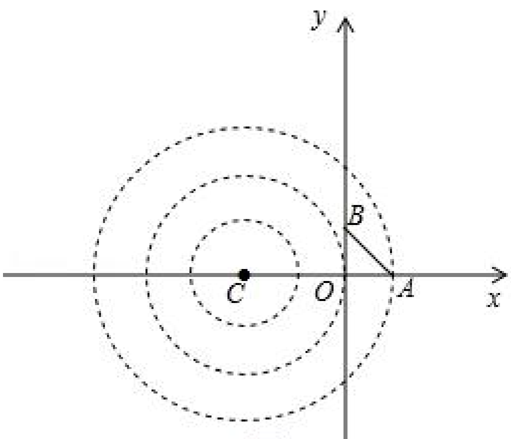


图1

当圆过点 A 时，此时，CA＝3，

∴C（﹣2，0），

如图 2，

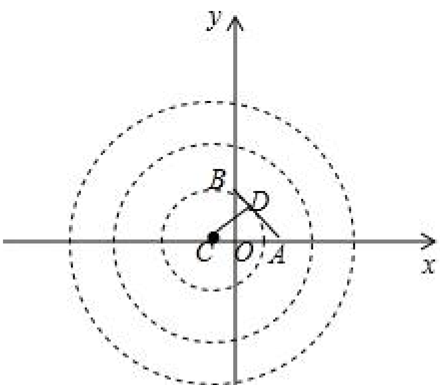


图2

当直线 AB 与小圆相切时，切点为 D，

∴CD＝1，

∵直线 AB 的解析式为 $y=-x+1$，

∴直线 AB 与 x 轴的夹角＝45°，

∴$AC=\sqrt{2}$,

∴C（$1-\sqrt{2}$，0），

∴圆心 C 的横坐标的取值范围为：$-2\leqslant x_C\leqslant 1-\sqrt{2}$;

如图 3，

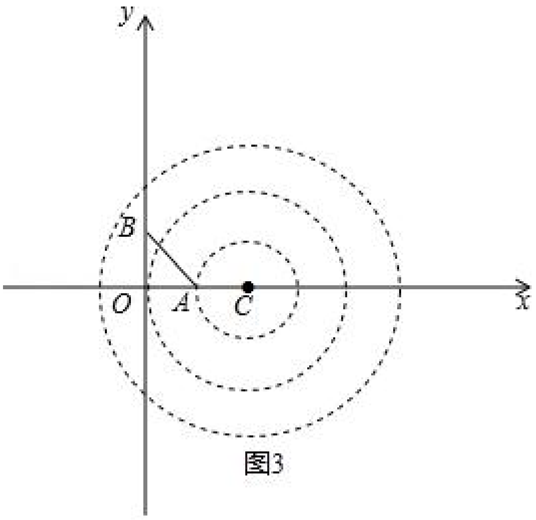


图3

当圆过点 O，则 $AC=1$，∴C（2，0），

如图 4，

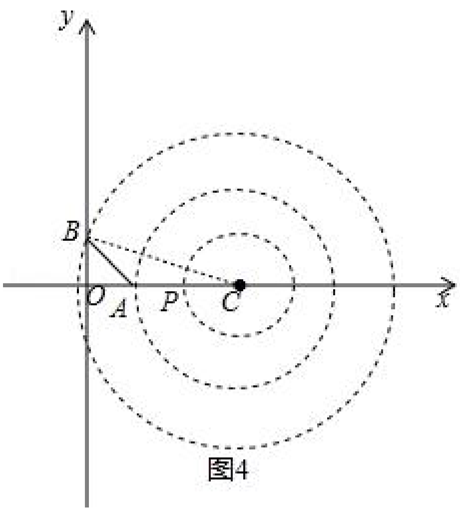


图4

当圆过点 B，连接 BC，此时，$BC=3$，

∴$OC=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$,

∴C（$2\sqrt{2}$，0）.

∴圆心 C 的横坐标的取值范围为：$2\leqslant x_C\leqslant 2\sqrt{2}$;

综上所述；圆心 C 的横坐标的取值范围为：$-2\leqslant x_C\leqslant 1-\sqrt{2}$或 $2\leqslant x_C\leqslant 2\sqrt{2}$.

4．在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 的坐标为（x_1，y_1），点 Q 的坐标为（x_2，y_2），且 $x_1\neq$

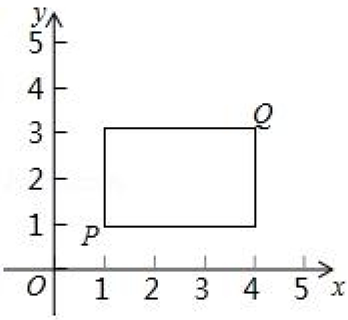
x_2，$y_1 \neq y_2$，若 P，Q 为某个矩形的两个顶点，且该矩形的边均与某条坐标轴垂直，则称该矩形为点 P，Q 的“相关矩形”，如图为点 P，Q 的“相关矩形”示意图．

（1）已知点 A 的坐标为（1，0），

①若点 B 的坐标为（3，1），求点 A，B 的“相关矩形”的面积；

②点 C 在直线 $x=3$ 上，若点 A，C 的“相关矩形”为正方形，求直线 AC 的表达式；

（2）⊙O 的半径为$\sqrt{2}$，点 M 的坐标为（m，3），若在⊙O 上存在一点 N，使得点 M，N 的“相关矩形”为正方形，求 m 的取值范围．



【解答】解：（1）①∵A（1，0），B（3，1）

由定义可知：点 A，B 的“相关矩形”的底与高分别为 2 和 1，

∴点 A，B 的“相关矩形”的面积为 $2\times1=2$；

②由定义可知：AC 是点 A，C 的“相关矩形”的对角线，

又∵点 A，C 的“相关矩形”为正方形

∴直线 AC 与 x 轴的夹角为 45°，

设直线 AC 的解析为：$y=x+m$ 或 $y=-x+n$

把（1，0）分别 $y=x+m$，

∴$m=-1$，

∴直线 AC 的解析为：$y=x-1$，

把（1，0）代入 $y=-x+n$，

∴$n=1$，

∴$y=-x+1$，

综上所述，若点 A，C 的“相关矩形”为正方形，直线 AC 的表达式为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$；

（2）设直线 MN 的解析式为 $y=kx+b$，

∵点 M，N 的“相关矩形”为正方形，

∴由定义可知：直线 MN 与 x 轴的夹角为 $45°$，

∴$k=\pm 1$，

∵点 N 在⊙O 上，

∴当直线 MN 与⊙O 有交点时，点 M，N 的"相关矩形"为正方形，

当 $k=1$ 时，

作⊙O 的切线 AD 和 BC，且与直线 MN 平行，

其中 A、C 为⊙O 的切点，直线 AD 与 y 轴交于点 D，直线 BC 与 y 轴交于点 B，

连接 OA，OC，

把 M（m，3）代入 $y=x+b$，

∴$b=3-m$，

∴直线 MN 的解析式为：$y=x+3-m$

∵$\angle ADO=45°$，$\angle OAD=90°$，

∴$OD=\sqrt{2}OA=2$，

∴D（0，2）

同理可得：B（0，-2），

∴令 $x=0$ 代入 $y=x+3-m$，

∴$y=3-m$，

∴$-2\leqslant 3-m\leqslant 2$，

∴$1\leqslant m\leqslant 5$，

当 $k=-1$ 时，把 M（m，3）代入 $y=-x+b$，

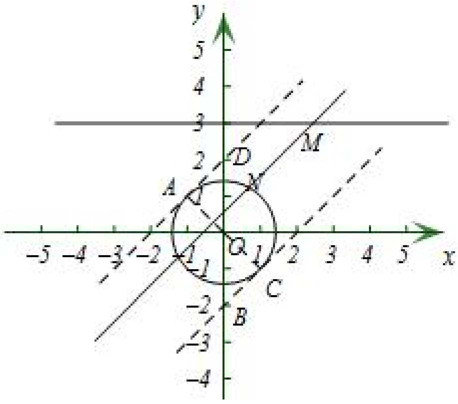
∴$b=3+m$，

∴直线 MN 的解析式为：$y=-x+3+m$，

同理可得：$-2\leqslant 3+m\leqslant 2$，

∴$-5\leqslant m\leqslant -1$；

综上所述，当点 M，N 的"相关矩形"为正方形时，m 的取值范围是：$1\leqslant m\leqslant 5$ 或 $-5\leqslant m\leqslant -1$



5．在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot C$ 的半径为 r，P 是与圆心 C 不重合的点，点 P 关于 $\odot C$ 的反称点的定义如下：若在射线 CP 上存在一点 P'，满足 $CP+CP'=2r$，则称 P' 为点 P 关于 $\odot C$ 的反称点，如图为点 P 及其关于 $\odot C$ 的反称点 P' 的示意图．

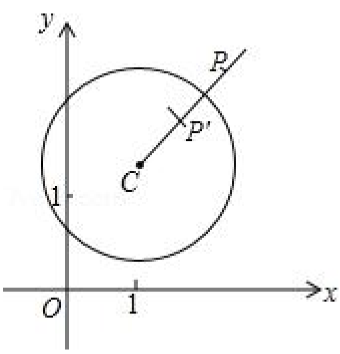
特别地，当点 P' 与圆心 C 重合时，规定 $CP'=0$．

（1）当 $\odot O$ 的半径为 1 时．

①分别判断点 M（2，1），N（$\frac{3}{2}$，0），T（1，$\sqrt{3}$）关于 $\odot O$ 的反称点是否存在？若存在，求其坐标；

②点 P 在直线 $y=-x+2$ 上，若点 P 关于 $\odot O$ 的反称点 P' 存在，且点 P' 不在 x 轴上，求点 P 的横坐标的取值范围；

（2）$\odot C$ 的圆心在 x 轴上，半径为 1，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，若线段 AB 上存在点 P，使得点 P 关于 $\odot C$ 的反称点 P' 在 $\odot C$ 的内部，求圆心 C 的横坐标的取值范围．



【解答】解：（1）当 $\odot O$ 的半径为 1 时．

①点 M（2，1）关于 $\odot O$ 的反称点不存在；

N（$\frac{3}{2}$，0）关于 $\odot O$ 的反称点存在，反称点 N'（$\frac{1}{2}$，0）；

T（1，$\sqrt{3}$）关于 $\odot O$ 的反称点存在，反称点 T'（0，0）；

②∵$OP\leqslant 2r=2$，$OP^2\leqslant 4$，设 P（x，$-x+2$），

∴$OP^2=x^2+(-x+2)^2=2x^2-4x+4\leqslant 4$，

∴$2x^2-4x\leqslant 0$，

$x(x-2)\leqslant 0$，

∴$0\leqslant x\leqslant 2$.

当 $x=2$ 时，P（2，0），P'（0，0）不符合题意；

当 $x=0$ 时，P（0，2），P'（0，0）不符合题意；

∴$0<x<2$；

（2）∵直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，

∴A（6，0），B（0，$2\sqrt{3}$），

∴$\frac{OA}{OB}=\sqrt{3}$，

∴$\angle OBA=60°$，$\angle OAB=30°$．

设 C（x，0）.

①当 C 在 OA 上时，作 $CH\perp AB$ 于 H，则 $CH\leqslant CP\leqslant 2r=2$，

所以 $AC\leqslant 4$，

C 点横坐标 $x\geqslant 2$（当 $x=2$ 时，C 点坐标（2，0），H 点的反称点 H'（2，0）在圆的内部）；

②当 C 在 A 点右侧时，AC 最大值为 2，

所以 C 点横坐标 $x\leqslant 8$.

综上所述，圆心 C 的横坐标的取值范围是 $2\leqslant x\leqslant 8$.

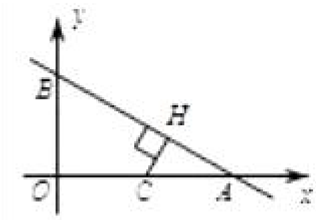


图1

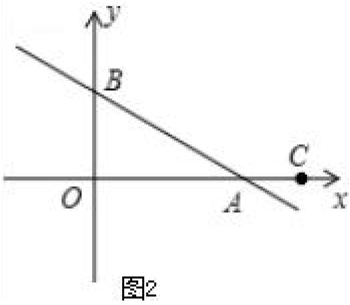


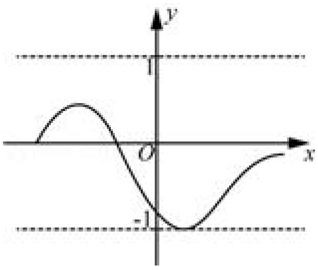
图2

6．对某一个函数给出如下定义：若存在实数 $M>0$，对于任意的函数值 y，都满足 $-M\leqslant y\leqslant M$，则称这个函数是有界函数，在所有满足条件的 M 中，其最小值称为这个函数的边界值．例如，如图中的函数是有界函数，其边界值是 1．

（1）分别判断函数 $y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）和 $y=x+1$（$-4<x\leqslant 2$）是不是有界函数？若是有界函数，求其边界值；

（2）若函数 $y=-x+1$（$a\leqslant x\leqslant b$，$b>a$）的边界值是 2，且这个函数的最大值也是 2，求 b 的取值范围；

（3）将函数 $y=x^2$（$-1\leqslant x\leqslant m$，$m\geqslant 0$）的图象向下平移 m 个单位，得到的函数的边界值是 t，当 m 在什么范围时，满足 $\dfrac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1$？



【解答】解：（1）根据有界函数的定义知，函数 $y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）不是有界函数．

$y=x+1$（$-4\leqslant x\leqslant 2$）是有界函数．边界值为：$2+1=3$；

（2）∵函数 $y=-x+1$ 的图象是 y 随 x 的增大而减小，

∴当 $x=a$ 时，$y=-a+1=2$，则 $a=-1$

当 $x=b$ 时，$y=-b+1$．则$\begin{cases}-2\leqslant -b+1<2\\ b>a\\ a=-1\end{cases}$，

∴ $-1<b\leqslant 3$；

（3）若 $m>1$，函数向下平移 m 个单位后，$x=0$ 时，函数值小于 -1，此时函数的边界 $t>1$，与题意不符，故 $m\leqslant 1$．

当 $x=-1$ 时，$y=1$ 即过点（-1，1）

当 $x=0$ 时，$y_{最小}=0$，即过点（0，0），

都向下平移 m 个单位，则

（-1，$1-m$）、（0，$-m$）

$\frac{3}{4}\leqslant 1-m\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant -m\leqslant -\frac{3}{4}$，

∴$0\leqslant m\leqslant \frac{1}{4}$或$\frac{3}{4}\leqslant m\leqslant 1$．

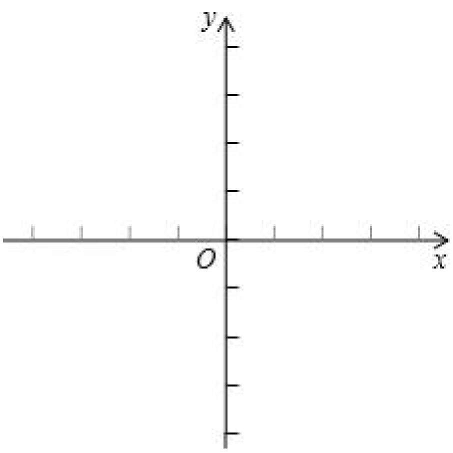
7．对于平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和⊙C，给出如下的定义：若⊙C 上存在两个点 A、B，使得∠$APB=60°$，则称 P 为⊙C 的关联点．已知点 D（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），E（0，-2），F（$2\sqrt{3}$，0）．

（1）当⊙O 的半径为 1 时，

①在点 D、E、F 中，⊙O 的关联点是 <u>D，E</u>．

②过点 F 作直线 l 交 y 轴正半轴于点 G，使∠$GFO=30°$，若直线 l 上的点 P（m，n）是⊙O 的关联点，求 m 的取值范围；

（2）若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点，求这个圆的半径 r 的取值范围．



【解答】解：（1）①如图 1 所示，过点 E 作⊙O 的切线设切点为 R，

∵$\odot O$的半径为1，∴$RO=1$，

∵$EO=2$，

∴$\angle OER=30°$，

根据切线长定理得出$\odot O$的左侧还有一个切点，使得组成的角等于30°，

∴E点是$\odot O$的关联点，

∵D（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），E（0，－2），F（$2\sqrt{3}$，0），

∴$OF>EO$，$DO<EO$，

∴D点一定是$\odot O$的关联点，而在$\odot O$上不可能找到两点与点F的连线的夹角等于60°，

故在点D、E、F中，$\odot O$的关联点是D，E；

故答案为：D，E；

②如图2，由题意可知，若P要刚好是$\odot C$的关联点，

需要点P到$\odot C$的两条切线PA和PB之间所夹的角为60°，

由图2可知$\angle APB=60°$，则$\angle CPB=30°$，

连接BC，则$PC=\frac{BC}{\sin\angle CPB}=2BC=2r$，

∴若P点为$\odot C$的关联点，则需点P到圆心的距离d满足$0\leqslant d\leqslant 2r$；

由上述证明可知，考虑临界点位置的P点，

如图3，点P_1到原点的距离$OP_1=2\times 1=2$，

过点O作直线l的垂线OH，垂足为H，$\tan\angle OGF=\frac{FO}{OG}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

∴$\angle OGF=60°$，

∴$OH=OG\sin 60°=\sqrt{3}$；

$\sin\angle OP_1H=\frac{OH}{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$\angle OP_1H=60°$，

可得点P_1与点G重合，

过点P_2作$P_2M\perp x$轴于点M，

可得$\angle P_2OM=30°$，

∴$OM=OP_2\cos 30°=\sqrt{3}$，

从而若点P为$\odot O$的关联点，则P点必在线段P_1P_2上，

$\therefore 0 \leqslant m \leqslant \sqrt{3}$;

（2）若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点，欲使这个圆的半径最小，则这个圆的圆心应在线段 EF 的中点；

考虑临界情况，如图 4，

即恰好 E、F 点为$\odot K$ 的关联时，则 $KF=2KN=\frac{1}{2}EF=2$，

此时，$r=1$，

故若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点，这个圆的半径 r 的取值范围为 $r\geqslant 1$．

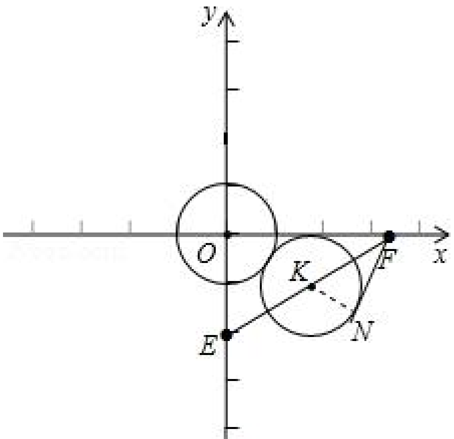


图4

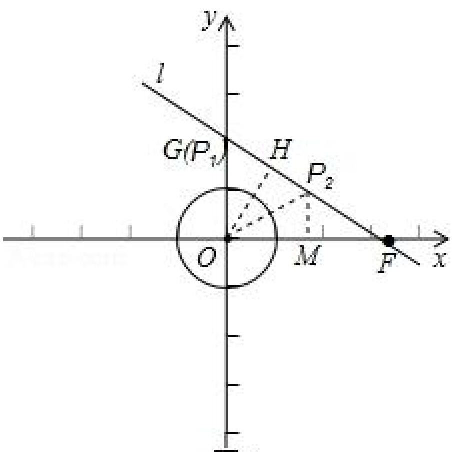


图3

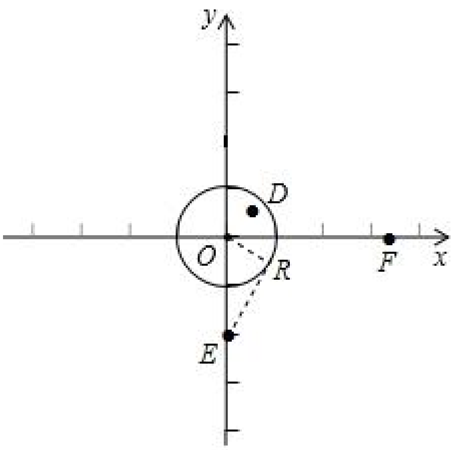


图1

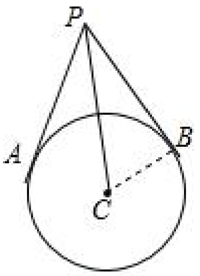


图2

8．在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意两点 P_1（x_1，y_1）与 P_2（x_2，y_2）的“非常距离”，给出如下定义：

若 $|x_1-x_2|\geqslant|y_1-y_2|$，则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|x_1-x_2|$；

若 $|x_1-x_2|<|y_1-y_2|$，则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|y_1-y_2|$．

例如：点 P_1（1，2），点 P_2（3，5），因为 $|1-3|<|2-5|$，所以点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|2-5|=3$，也就是图 1 中线段 P_1Q 与线段 P_2Q 长度的较大值（点 Q 为垂直于 y 轴的直线 P_1Q 与垂直于 x 轴的直线 P_2Q 交点）．

（1）已知点 A（$-\frac{1}{2}$，0），B 为 y 轴上的一个动点，

①若点 A 与点 B 的“非常距离”为 2，写出一个满足条件的点 B 的坐标；

②直接写出点 A 与点 B 的“非常距离”的最小值；

（2）已知 C 是直线 $y=\frac{3}{4}x+3$ 上的一个动点，

①如图 2，点 D 的坐标是（0，1），求点 C 与点 D 的“非常距离”的最小值及相应的点 C 的坐标；

②如图 3，E 是以原点 O 为圆心，1 为半径的圆上的一个动点，求点 C 与点 E 的“非常距离”的最小值及相应的点 E 与点 C 的坐标．

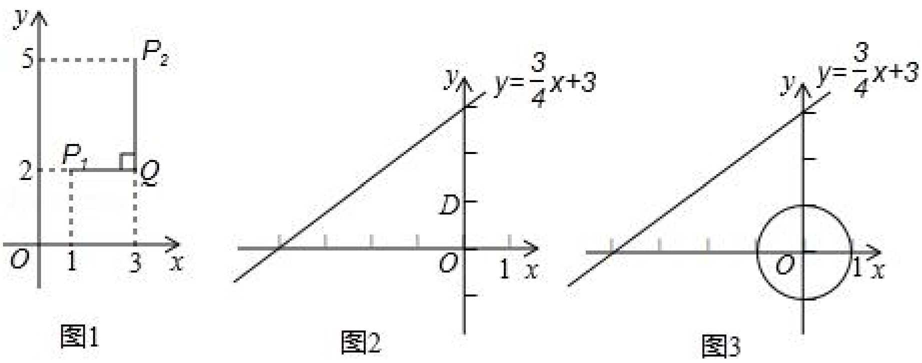


图1　　图2　　图3

【解答】解：（1）①∵B 为 y 轴上的一个动点，

∴设点 B 的坐标为（0，y）.

∵$|-\frac{1}{2}-0|=\frac{1}{2}\neq 2$，

∴$|0-y|=2$，

解得，$y=2$ 或 $y=-2$；

∴点 B 的坐标是（0，2）或（0，－2）；

②点 A 与点 B 的“非常距离”的最小值为$\frac{1}{2}$

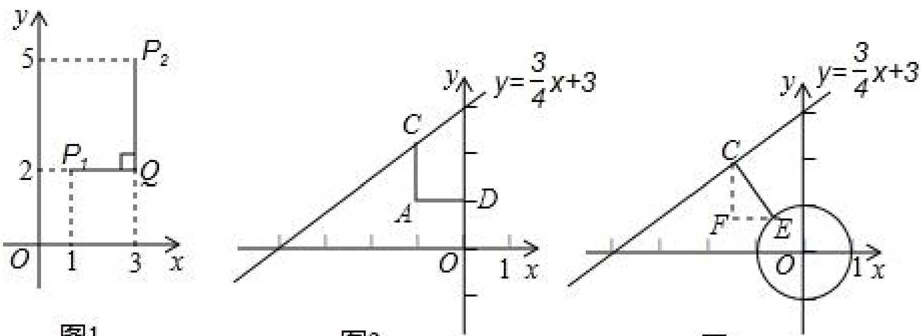


图1　　图2　　图3

（2）①如图 2，取点 C 与点 D 的“非常距离”的最小值时，需要根据运算定义“若$|x_1-x_2|\geqslant|y_1-y_2|$，则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为$|x_1-x_2|$”解答，此时$|x_1-x_2|=|y_1-y_2|$.即 $AC=AD$，

∵C 是直线 $y=\frac{3}{4}x+3$ 上的一个动点，点 D 的坐标是（0，1），

∴设点 C 的坐标为（x_0，$\frac{3}{4}x_0+3$），

∴$-x_0=\frac{3}{4}x_0+2$，

此时，$x_0=-\frac{8}{7}$，

∴点 C 与点 D 的“非常距离”的最小值为：$|x_0|=\frac{8}{7}$，

此时 C（$-\frac{8}{7}$，$\frac{15}{7}$）；

②当点 E 在过原点且与直线 $y=\frac{3}{4}x+3$ 垂直的直线上时，点 C 与点 E 的“非常距离”最小，设 E（x，y）（点 E 位于第二象限）．则

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}\\x^2+y^2=1\end{cases},$$

解得，$\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$，

故 E（$-\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$）．

$-\frac{3}{5}-x_0=\frac{3}{4}x_0+3-\frac{4}{5}$，

解得，$x_0=-\frac{8}{5}$，

则点 C 的坐标为（$-\frac{8}{5}$，$\frac{9}{5}$），

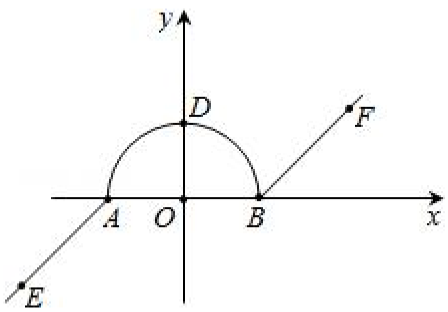
最小值为 1．

9．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，我们把由两条射线 AE，BF 和以 AB 为直径的半圆所组成的图形叫作图形 C（注：不含 AB 线段）．已知 A（-1，0），B（1，0），$AE/\!/BF$，且半圆与 y 轴的交点 D 在射线 AE 的反向延长线上．

（1）求两条射线 AE，BF 所在直线的距离；

（2）当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有一个公共点时，写出 b 的取值范围；当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有两个公共点时，写出 b 的取值范围；

（3）已知▱ $AMPQ$（四个顶点 A，M，P，Q 按顺时针方向排列）的各顶点都在图形 C 上，且不都在两条射线上，求点 M 的横坐标 x 的取值范围．



【解答】解：（1）如图 1，分别连接 AD、DB，则点 D 在直线 AE 上，

∵点 D 在以 AB 为直径的半圆上，

∴$\angle ADB=90°$，

∴$BD\perp AD$，

在 Rt△DOB 中，由勾股定理得，$BD=\sqrt{2}$，

∵$AE\parallel BF$，

∴两条射线 AE、BF 所在直线的距离为$\sqrt{2}$.

（2）当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有一个公共点时，b 的取值范围是 $b=\sqrt{2}$ 或 $-1<b<1$；

当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有两个公共点时，b 的取值范围是 $1<b<\sqrt{2}$

（3）假设存在满足题意的平行四边形 $AMPQ$，根据点 M 的位置，分以下四种情况讨论：

①当点 M 在射线 AE 上时，如图 2

∵$AMPQ$ 四点按顺时针方向排列，

∴直线 PQ 必在直线 AM 的上方，

∴PQ 两点都在弧 AD 上，且不与点 A、D 重合，

∴$0<PQ<\sqrt{2}$.

∵$AM\parallel PQ$ 且 $AM=PQ$，

∴$0<AM<\sqrt{2}$

∴$-2<x<-1$，

②当点 M 在弧 AD 上时，如图 3

∵点 A、M、P、Q 四点按顺时针方向排列，

∴直线 PQ 必在直线 AM 的下方，

此时，不存在满足题意的平行四边形.

③当点 M 在弧 BD 上时，

设弧 DB 的中点为 R，则 $OR\parallel BF$，

当点 M 在弧 DB 上时，如图 4，

过点 M 作 OR 的垂线交弧 DB 于点 Q，垂足为点 S，可得 S 是 MQ 的中点．

∴四边形 $AMPQ$ 为满足题意的平行四边形，

∴$0\leqslant x<\frac{\sqrt{2}}{2}$．

当点 M 在弧 RB 上时，如图 5，

直线 PQ 必在直线 AM 的下方，

此时不存在满足题意的平行四边形．

④当点 M 在射线 BF 上时，如图 6，

直线 PQ 必在直线 AM 的下方，

此时，不存在满足题意的平行四边形．

综上，点 M 的横坐标 x 的取值范围是 $-2<x<-1$ 或 $0\leqslant x<\frac{\sqrt{2}}{2}$．

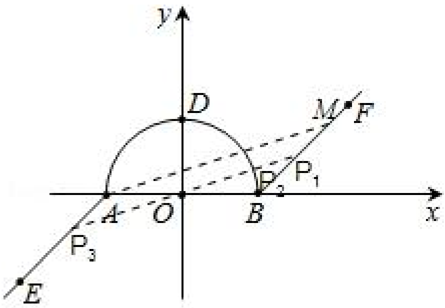


图6

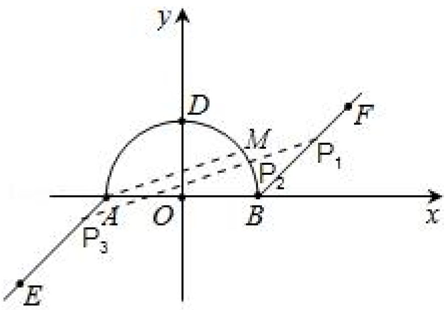


图5

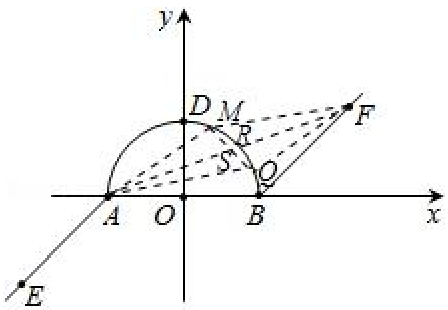


图4

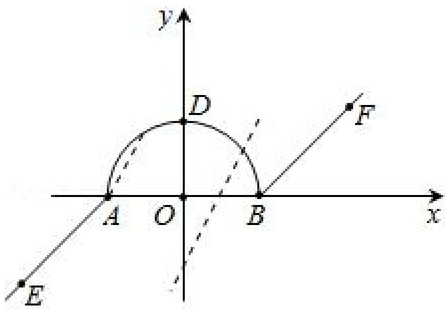


图3

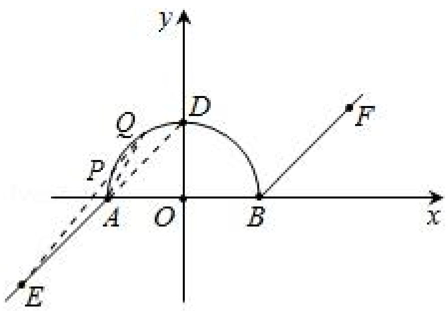


图2

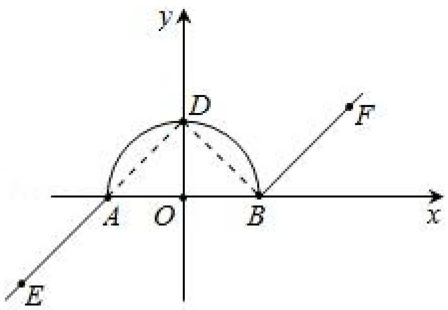


图1