

全国高中数学联赛模拟试题（九）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、已知 n, s 是整数. 若不论 n 是什么整数, 方程 $x^2 - 8nx + 7^s = 0$ 没有整数解, 则所有这样的数 s 的集合是

- (A) 奇数集 (B) 所有形如 $6k+1$ 的数集
(C) 偶数集 (D) 所有形如 $4k+3$ 的数集

2、某个货场有 1997 辆车排队等待装货, 要求第一辆车必须装 9 箱货物, 每相邻的 4 辆车装货总数为 34 箱. 为满足上述要求, 至少应该有货物的箱数是

- (A) 16966 (B) 16975 (C) 16984 (D) 17009

3、非常数数列 $\{a_i\}$ 满足 $a_{i+1}^2 - a_i a_{i+1} + a_i^2 = 0$, 且 $a_{i+1} \neq a_{i-1}$, $i=0, 1, 2, \dots, n$. 对于给定的自然数

n , $a_1 = a_{n+1} = 1$, 则 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ 等于

- (A) 2 (B) -1 (C) 1 (D) 0

4、已知 α, β 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为实数) 的两根, 且 α 是虚数, $\frac{\alpha^2}{\beta}$ 是实数, 则 $\sum_{k=1}^{5985} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$

的值是

- (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) $\sqrt{3}i$

5、已知 $a+b+c=abc$, $A = \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{bc} + \frac{(1-a^2)(1-c^2)}{ac} + \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{ab}$, 则 A 的值是

- (A) 3 (B) -3 (C) 4 (D) -4

6、对 $x_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i=1, 2, \dots, n$, 有 $\sum_{i=1}^n x_i = \frac{n(n+1)}{2}$, $x_1 x_2 \cdots x_n = n!$, 使 x_1, x_2, \dots, x_n 一定是 $1, 2, \dots, n$

的一个排列的最大数 n 是

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、设点 P 是凸多边形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 内一点, 点 P 到直线 $A_1 A_2$ 的距离为 h_1 , 到直线 $A_2 A_3$ 的距离

为 h_2, \dots , 到直线 $A_{n-1} A_n$ 的距离为 h_{n-1} , 到直线 $A_n A_1$ 的距离为 h_n . 若存在点 P 使 $\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + \cdots + \frac{a_n}{h_n}$

($a_i = A_i A_{i+1}$, $i=1, 2, \dots, n-1$, $a_n = A_n A_1$) 取得最小值, 则此凸多边形一定符合条件_____.

2、已知 a 为自然数, 存在一个以 a 为首项系数的二次整数系数的多项式, 它有两个小于 1 的不同正根. 那么, a 的最小值是_____.

3、已知 $F(a, \theta) = \frac{a^2 + 2a \sin \theta + 2}{a^2 + 2a \cos \theta + 2}$, $a, \theta \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. 那么, 对于任意的 a, θ , $F(a, \theta)$ 的最

大值和最小值分别是_____.

4、已知 $t > 0$ ，关于 x 的方程为 $|x| + \sqrt{t - x^2} = \sqrt{2}$ ，则这个方程有相异实根的个数情况是_____.

5、已知集合 $\{1, 2, 3, \dots, 3n-1, 3n\}$ ，可以分为 n 个互不相交的三元组 $\{x, y, z\}$ ，其中 $x+y=3z$ ，则满足上述要求的两个最小的正整数 n 是_____.

6、任给一个自然数 k ，一定存在整数 n ，使得 x^{n+x+1} 被 x^k+x+1 整除，则这样的有序实数对 (n, k) 是（对于给定的 k ）_____.

三、(20分)

过正方体的某条对角线的截面面积为 S ，试求 $\frac{S_{\text{最大}}}{S_{\text{最小}}}$ 之值.

四、(20分)

数列 $\{a_n\}$ 定义如下： $a_1=3$ ， $a_n=3^{a_{n-1}}$ ($n \geq 2$). 试求 a_n ($n \geq 2$) 的末位数.

五、(20分)

已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ ，且 $a+b+c=1$.

证明： $\frac{13}{27} \leq a^2+b^2+c^2+4abc < 1$.

第二试

一、(50分)

已知 $\triangle ABC$ 中, 内心为 I , 外接圆为 $\odot O$, 点 B 关于 $\odot O$ 的对径点为 K , 在 AB 的延长线上取点 N , CB 的延长线上取 M , 使得 $MC=NA=s$, s 为 $\triangle ABC$ 的半周长. 证明: $IK \perp MN$.

二、(50分)

M 是平面上所有点 (x,y) 的集合, 其中 x, y 均是整数, 且 $1 \leq x \leq 12, 1 \leq y \leq 13$. 证明: 不少于49个点的 M 的每一个子集, 必包含一个矩形的4个顶点, 且此矩形的边平行于坐标轴.

三、(50分)

实系数多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 满足 $b < 0, ab=9c$. 试判别此多项式是否有三个不同的实根, 说明理由.

参考答案

第一试

一、选择题:

1、C; 2、B; 3、D; 4、C; 5、C; 6、C

二、填空题:

1、该凸多边形存在内切圆; 2、5; 3、 $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$;

4、9; 5、5, 8; 6、 (k, k) 或 $(3m+2, 2)$ ($m \in \mathbf{N}_+$).

三、 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

四、7.

五、证略.

第二试

一、证略;

二、证略.

三、有.