

第 24 届“希望杯”全国数学邀请赛

初二 第二试

2013 年 4 月 15 日 上午 8:30 至 10:30

一、 选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。）以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将正确答案的英文字母写在每题后面的圆括号内。

1、红丝带是关注艾滋病防治问题的国际性标志，人们将红丝带剪成小段，并用别针将折叠好的红丝带加紧在胸前，如图 1 所示，红丝带重叠部分形成的图形是（ ）

- (A) 正方形 (B) 矩形 (C) 菱形 (D) 梯形

2、设 a 、 b 、 c 是不为零的实数，那么 $x = \frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} - \frac{c}{|c|}$ 的值有（ ）

- (A) 3 种 (B) 4 种 (C) 5 种 (D) 6 种

3、 $\triangle ABC$ 的边长分别是 $a = m^2 - 1$ ， $b = m^2 + 1$ ， $c = 2m (m > 0)$ ，则 $\triangle ABC$ 是（ ）

- (A) 等边三角形 (B) 钝角三角形 (C) 直角三角形
(D) 锐角三角形

4、古人用天干和地支记序，其中天干有 10 个；甲乙丙丁戊己庚辛壬癸，地支有 12 个；子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥，将天干的 10 个汉字和地支的 12 个汉字对应排列成如下两行；

甲乙丙丁戊己庚辛壬癸甲乙丙丁戊己庚辛壬癸甲乙丙丁……

子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥……

从左向右数，第 1 列是甲子，第 2 列是乙丑，第 3 列是丙寅……，我国的农历纪年就是按这个顺序得来的，如公历 2007 年是农历丁亥年，那么从今年往后，农历纪年为甲亥年的那一年在公历中（ ）

- (A) 是 2019 年， (B) 是 2031 年， (C) 是 2043 年，
(D) 没有对应的年号

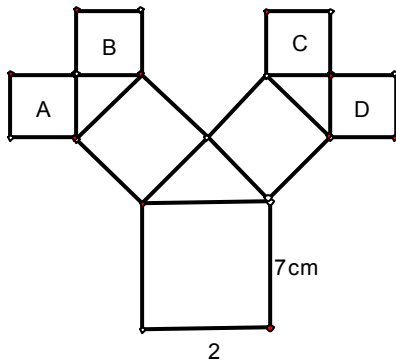
5、实数 a 、 b 、 m 、 n 满足 $a < b$ ， $-1 < n < m$ ，若 $M = \frac{a+mb}{1+m}$ ， $N = \frac{a+nb}{1+n}$ ，

则 M 与 N 的大小关系是（ ）

- (A) $M > N$ (B) $M = N$ (C) $M < N$ (D) 无法确定的。

6、若干个正方形和等腰直角三角形拼接成如图 2 所示的图形，若最大的正方形的边长是 7cm，则正方形 A、B、C、D 的面积和是（ ）

- (A) $14cm^2$ (B) $42cm^2$ (C) $49cm^2$ (D) $64cm^2$



7、已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2a+3x > 0 \\ 3a-2x \geq 0 \end{cases}$ 恰有 3 个整数解，则 a 的取值范围是 ()

- (A) $\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$ (B) $\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3} < a \leq \frac{3}{2}$ (D) $\frac{4}{3} \leq a < \frac{3}{2}$

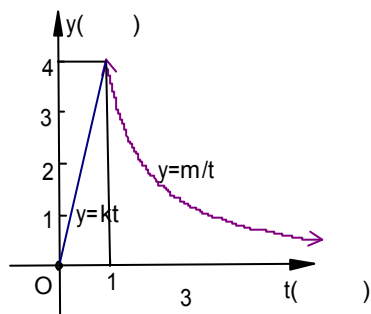
8、The number of intersection point of the graphs of function

$y = \frac{|k|}{x}$ and function $y = kx (k \neq 0)$ is ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 0 or 2.

9、某医药研究所开发一种新药，成年人按规定的剂量服用，服药后每毫升血液中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系近似满足如图 3 所示曲线，当每毫升血液中的含药量不少于 0.25 毫克时治疗有效，则服药一次治疗疾病有效的时间为 ()

- (A) 16 小时 (B) $15\frac{7}{8}$ 小时 (C) $15\frac{15}{16}$ 小时 (D) 17 小时



10、某公司组织员工一公园划船，报名人数不足 50 人，在安排乘船时发现，每只船坐 6 人，就剩下 18 人无船可乘；每只船坐 10 人，那么其余的船坐满后内参有一只船不空也不满，参

加划船的员工共有 ()

- (A) 48人 (B) 45人 (C) 44人 (D) 42人

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11、已知 $a \cdot b \cdot c$ 为 $\triangle ABC$ 三边的长, 则化简 $|a-b+c| + \sqrt{(a-b+c)^2}$ 的结果是_____

12、自从扫描隧道显微镜发明后, 世界上便诞生了一门新科学, 这就是“纳米技术”, 已知 1 毫米微米, 1 微米纳米, 那么 2007 纳米的长度用科学记数法表示为_____米。

13、若不等式组 $\begin{cases} 2x-a < 1 \\ x-2b > 3 \end{cases}$ 中的未知数 x 的取值范围是 $-1 < x < 1$, 那么 $(a+1)(b-1)$ 的值等于_____

14、已知 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2007}$ 是彼此互不相等的负数, 且

$$M = (a_1 + a_2 + \dots + a_{2006})(a_2 + a_3 + \dots + a_{2007}),$$

$$N = (a_1 + a_2 + \dots + a_{2007})(a_2 + a_3 + \dots + a_{2006})$$
 那么 M 与 N 的大小关系是 M _____ N

15、 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 叫做二阶行列式, 它的算法是: $ad - bc$, 将四个数 2、3、4、5 排成不同的二

阶行列式, 则不同的计算结果有_____个, 其中, 数值最大的是_____。

16、如图 4, 一只小猫沿着斜立在墙角的木板往上爬, 木板底端距离墙角 0.7 米, 当小猫从木板底端爬到顶端时, 木板底端向左滑动了 1.3 米, 木板顶端向下滑动了 0.9 米, 则小猫在木板上爬动了_____米。

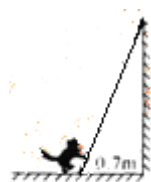


图 4

17、Xiao Ming says to Xiao Hua that my age add your age. add your age when L was your age is 48. The age of Xiao Hua is _____ now.

(英汉词典: age 年龄; add 加上; when 当……时)

18、长方体的长、宽、高分别为正整数 $a \cdot b \cdot c$ ，且满足 $a + b + c + ab + bc + ac + abc = 2006$ ，那么这个长方体的体积为_____。

19、已知 a 为实数，且 $a + 2\sqrt{6}$ 与 $\frac{1}{a} - 2\sqrt{6}$ 都是整数，则 a 的值是_____。

20、为确保信息安全，信息传输需加密，发送方由明文 \rightarrow 密文（加密）。现规定英文 26 个字母的加密规则是：26 个字母按顺序分别对应整数 0 到 25，例子如，英文 $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ，写出它们的明文（对应整数 0, 1, 2, 3），然后将这 4 个字母对应的整数（分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 ）按

$x_1 + 2x_2 \cdot 3x_3 \cdot x_1 + 2x_1 \cdot 3x_1$ 计算，得到密文，即 $a \cdot b \cdot c \cdot d$ 四个字母对应的密文分别是 2. 3. 8. 9.

现在接收方收到的密文为 35. 42. 23. 12. 则解密得到的英文单词为_____。

三、解答题（本大题共 3 小题，共 40 分）要求：写出推算过程

21、（本题满分 10 分）

如图 5，一个大的六角星形（粗实线）的顶点是周围六个全等的小六角星形（细线型）的中心，相邻的两个小六角星形各有一个公共顶点，如果小六角星形的顶点 C 到中心 A 的距离为 a ，求：

- (1) 大六角星形的顶点 A 到其中心 O 的距离
 - (2) 大六角星形的面积
 - (3) 大六角星形的面积与六个小六角星形的面积之和的比值
- （注：本题中的六角星形有 12 个相同的等边三角形拼接而成的）

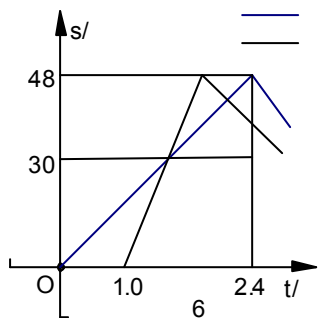


图 5

22、（本题满分 15 分）

甲、乙两车分别从 A 地将一批物品运往 B 地，再返回 A 地，图 6 表示两车离 A 地的距离 s （千米）随时间 t （小时）变化的图象，已知乙车到达 B 地后以 30 千米/小时的速度返回。请根据图象中的数据回答：

- (1) 甲车出发多长时间后被乙车追上？
- (2) 甲车与乙车在距离 A 地多远处迎面相遇？
- (3) 甲车从 A 地返回的速度多大时，才能比乙车先回到 A 地？



23、(本题满分 15 分)

平面上有若干个点，其中任意三点都不在同一直线上，将这些点分成三组，并按下面的规则用线段连接：①在同一组的任意两点间都没有线段连接；②不在同一组的任意两点间一定有线段连接。

- (1) 若平面上恰好有 9 个点，且平均分成三组，那么平面上有多少条线段？
- (2) 若平面上恰好有 9 个点，且点数分成 2, 3, 4 三组，那么平面上有多少条线段？
- (3) 若平面上共有 192 条线段，那么平面上至少有多少个点？

答案：

一、选择题 (每小题 4 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	C	D	A	C	B	D	C	A

二、填空题 (每小题 4 分，第 15 小题，每个空 2 分；第 19 小题，答对一个答案 2 分)

题号	11	12	13	14	15
答案	2c	2.007×10^{-4}	-6	>	6;14
题号	16	17	18	19	20
答案	2.5	16	888	$5 - 2\sqrt{6}$ 或 $-5 - 2\sqrt{6}$	hope

三、解答题

21 (1) 连接 CO，易知 $\triangle AOC$ 是直角三角形， $\angle ACO = 90^\circ, \angle AOC = 30^\circ$

所以 $AO = 2AC = 2a$

(2) 如图 1，大六角星形的面积是等边 $\triangle AMN$ 面积的 12 倍

因为 $AM^2 = \left(\frac{AM}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{2}\right)^2$ 解得 $AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

所以大六角星形的面积是 $S = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}a \times a = 4\sqrt{3}a^2$



图 1

(3) 小六角星形的顶点 C 到其中心 A 的距离为 a ，大六角星形的顶点 A 到其中心 O 的距离为 $2a$ ，所以大六角星形的面积是一个小六角星形的面积的 4 倍，所以，大六角星形的面积：六小六角星形的面积和=2: 3

22. (1) 由图知，可设甲车由 A 地前往 B 地的函数解析式为 $s = kt$

将 (2.4, 48) 代入，解得 $k = 20$ 所以 $s = 20t$

由图可知，在距 A 地 30 千米处，乙车追上甲车，所以当 $s = 30$ 千米时，

$t = \frac{s}{20} = \frac{30}{20} = 1.5$ (小时)。即甲车出发 1.5 小时后被乙车追上

(2) 由图知，可设乙车由 A 地前往 B 地函数的解析式为 $s = pt + m$

将 (1.0, 0) 和 (1.5, 30) 代入，得 $\begin{cases} 0 = p + m \\ 30 = 1.5p + m \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} p = 60 \\ m = -60 \end{cases}$

所以 $s = 60t - 60$

当乙车到达 B 地时， $s = 48$ 千米。代入 $s = 60t - 60$ ，得 $t = 1.8$ 小时

又设乙车由 B 地返回 A 地的函数的解析式为 $s = -30t + n$

将 (1.8, 48) 代入，得 $48 = -30 \times 1.8 + n$ ，解得 $n = 102$

所以 $s = -30t + 102$

当甲车与乙车迎面相遇时，有 $-30t + 102 = 20t$

解得 $t = 2.04$ 小时 代入 $s = 20t$ ，得 $s = 40.8$ 千米

即甲车与乙车在距离 A 地 40.8 千米处迎面相遇

(3) 当乙车返回到 A 地时，有 $-30t + 102 = 0$ 解得 $t = 3.4$ 小时

甲车要比乙车先回到 A 地，速度应大于 $\frac{48}{3.4 - 2.4} = 48$ (千米/小时)

23. (1) 平面上恰好有 9 个点，且平均分成三组，每组 3 个点，其中每个点可以与另外两组的 6 个点连接，共有线段 $\frac{6 \times 9}{2} = 27$ (条)

(2) 若平面上恰好有 9 个点，且点数分成 2, 3, 4 三组，则平面上共有线段

$\frac{1}{2}[2 \times (3+4) + 3 \times (2+4) + 4 \times (2+3)] = 26$ (条)

(3) 设第一组有 a 个点，第二组有 b 个点，第三组有 c 个点，则平面上共有线段

$\frac{1}{2}[a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)] = ab + bc + ac$ (条)

若保持第三组点数不变，将第一组中的一个点划归到第二组，则平面上线段的条数为

$(a-1)(b+1) + (b+1)c + (a-1)c = ab + bc + ca + a - b - 1$

与原来线段的条数的差是 $a-b-1$ ，即

当 $a > b$ 时， $a-b-1 \geq 0$ ，此时平面上的线段条数不减少

当 $a \leq b$ 时， $a-b-1 < 0$ 此时平面上的线段条数一定减少

由此可见，当平面上由点数较多的一组中划出一个点到点数较少的一组中时，平面上的线段条数不减少，所以当三组中点数一样多（或基本平均）时，平面上线段的条数最多

设三组中都有 x 个点，则线段条数为 $3x^2 = 192$ 解得 $x = 8$

所以 平面上至少有 24 个点