2018全国高考模拟卷十

本试卷分为两卷,第Ⅰ卷为选择题,第Ⅱ卷为非选择题,满分150分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题　共50分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 复数z满足$z(2+i)=1+3i$,则复数z在复平面内对应的点位于　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

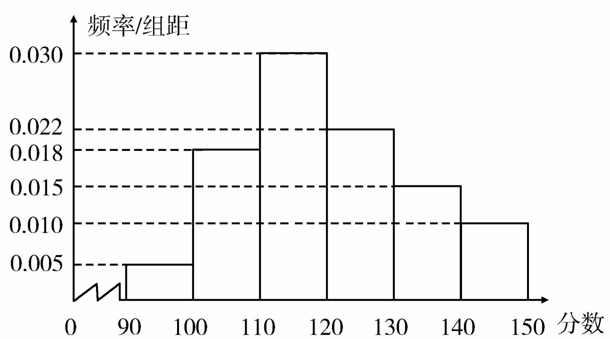
C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知集合$A=\left\{x\left|\frac{x+2}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}$,$B=\{x|x-1\geqslant 0\}$,则$A\cap B$为　(　　)

A. $[1,2]$　　B. $[1,2)$

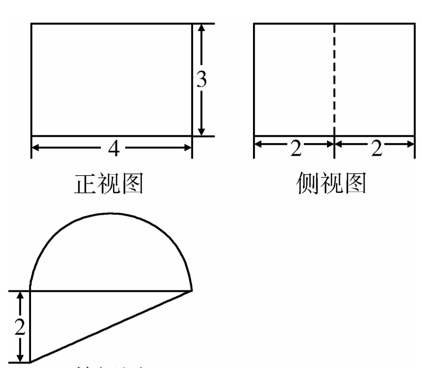
C. $[-2,\infty)$　　D. $(-2,2]$

3. 某校100名学生的数学测试成绩分布直方图如下图所示,分数不低于a即为优秀,如果优秀的人数为20人,则a的估计值是　(　　)



A. 130　　B. 140　　C. 133　　D. 137

4. 已知一几何体的三视图如下图所示,俯视图由一个直角三角形与一个半圆组成,则该几何体的体积为　(　　)



正视图　侧视图

俯视图

A. $6\pi+12$

B. $6\pi+24$

C. $12\pi+12$

D. $24\pi+12$

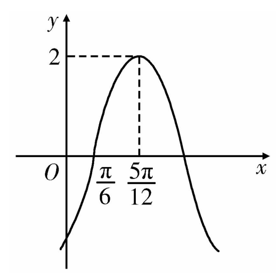
5. 变量x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\geqslant 2\\2x+y\leqslant 4\\4x-y\geqslant -1\end{cases}$则目标函数$z=3|x|+|y-3|$的取值范围是　(　　)

A. $[\frac{3}{2},9]$　B. $[-\frac{3}{2},6]$　C. $[-2,3]$　D. $[1,6]$

6. 已知直线$l\not\subset$平面α,直线$m\subset$平面α,下面四个结论:①若$l\perp\alpha$,则$l\perp m$;②若$l\parallel\alpha$,则$l\parallel m$;③若$l\perp m$则$l\perp\alpha$;④若$l\parallel m$,则$l\parallel\alpha$,其中正确的是　(　　)

A. ①②④　B. ③④　C. ②③　D. ①④

7. 函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如下图所示,则函数$f(x)$的解析式为　(　　)



A. $f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$

B. $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

C. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{12})$

D. $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

8. 已知$f(x)=2^x-1$,$g(x)=1-x^2$,规定:当$|f(x)|\geqslant g(x)$时,$h(x)=|f(x)|$;当$|f(x)|<g(x)$时,$h(x)=-g(x)$,则$h(x)$　(　　)

A. 有最小值-1,最大值1

B. 有最大值1,无最小值

C. 有最小值-1,无最大值

D. 有最大值-1,无最小值

9. 已知关于x的方程$x^3+ax^2+bx+c=0$的三个实根分别为一个椭圆,一个抛物线,一个双曲线的离心率,则$\frac{b}{a}$的取值范围为　(　　)

A. $(-1,0)$　　B. $(-1,-\frac{1}{2})$

C. $(-2,-\frac{1}{2})$　　D. $(-2,+\infty)$

10. 已知函数$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x^3$,若函数$y=f(x)+f(k-x^2)$有两个零点,则实数$k$的取值范围是　(　　)

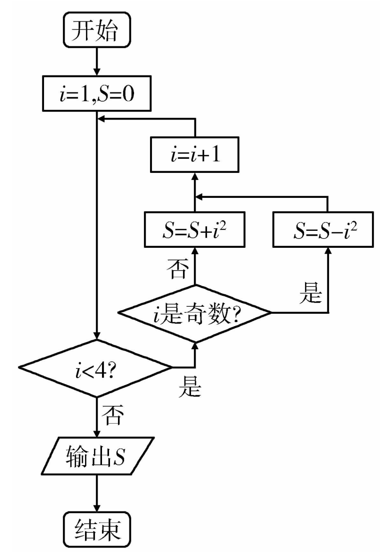
A. $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{4},0\right)$

C. $\left(-\frac{1}{4},2\right)$　　D. $\left[-\frac{1}{4},2\right]$

第Ⅱ卷(非选择题　共100分)

二、填空题(本大题共5小题,每小题5分,共25分)

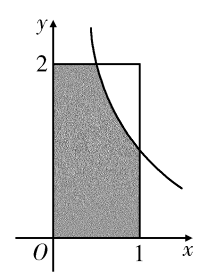
11. 执行如图所示的程序框图,输出的S值为________.



12. 在$(\sqrt{x}+\frac{a}{x})^6(a>0)$的展开式中常数项的系数是60,则$a$的值为________.

13. 已知直线$ax-2by=2(a>0,b>0)$过圆$x^2+y^2-4x+2y+1=0$的圆心,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为________.

14. 如图,设D是图中边长分别为1和2的矩形区域,E是D内位于函数$y=\frac{1}{x}(x>0)$图象下方的阴影部分区域,则阴影部分E的面积为________.



15. 设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x+\frac{5}{4},x<1\\2^x,x\geqslant 1\end{cases}$,则满足$f(f(t))=2^{f(t)}$的$t$的取值范围是________.

三、解答题(本大题共6小题,共75分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本小题满分12分)

已知向量$\boldsymbol{a}=(\cos(\frac{\pi}{2}+x),\sin(\frac{\pi}{2}+x))$,$\boldsymbol{b}=(-\sin x,\sqrt{3}\sin x)$,$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(Ⅰ)求函数$f(x)$的最小正周期及$f(x)$的最大值.

(Ⅱ)在锐角三角形ABC中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,若$f(\frac{A}{2})=1$,$a=2\sqrt{3}$,求三角形ABC面积的最大值.

17. (本小题满分12分)

集成电路E由3个不同的电子元件组成,现由于元件老化,三个电子元件能正常工作的概率分别降为$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{2}{3}$,且每个电子元件能否正常工作相互独立,若三个电子元件中至少有2个正常工作,则E能正常工作,否则就需要维修,且维修集成电路E所需费用为100元.

(Ⅰ)求集成电路E需要维修的概率;

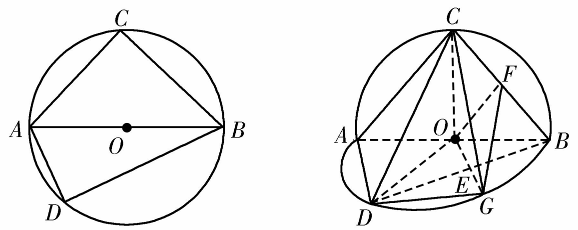
(Ⅱ)若某电子设备共由2个集成电路E组成,设X为该电子设备需要维修集成电路所需的费用,求X的分布列和期望.

18.（本小题满分 12 分）

圆 O 上两点 C,D 在直径 AB 的两侧（如图甲），沿直径 AB 将圆 O 折起形成一个二面角（如图乙），若 $\angle DOB$ 的平分线交弧 $\overset{\frown}{BD}$ 于点 G，交弦 BD 于点 E，F 为线段 BC 的中点.

（Ⅰ）证明：平面 OGF // 平面 CAD；

（Ⅱ）若二面角 $C-AB-D$ 为直二面角，且 $AB=2$，$\angle CAB=45°$，$\angle DAB=60°$，求直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值.



图甲　　图乙

19.（本小题满分 12 分）

已知在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，其前 n 项和为 S_n，且 $a_n=\dfrac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\geqslant 2)$.

（Ⅰ）证明 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列，并求数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 P_n；

（Ⅱ）若 $b_n=\dfrac{S_n}{2n+1}+\dfrac{2^n}{S_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{b}{x}-2\ln x$，对任意实数 $x>0$，都有 $f(x)=-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 成立.

（Ⅰ）对任意实数 $x\geqslant 1$，函数 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）求证：$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}>2\ln\dfrac{2n}{n+1}-\dfrac{3}{4}$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

21.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\dfrac{9}{4}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）直线 l_1 过点 P，且与椭圆只有一个公共点，直线 l_2 与 l_1 的倾斜角互补，且与椭圆交于异于点 P 的两点 M，N，与直线 $x=1$ 交于点 K（K 介于 M，N 两点之间）.

（i）求：$|PM|\cdot|KN|=|PN|\cdot|KM|$；

（ii）是否存在直线 l_2，使得直线 l_1、l_2、PM、PN 的斜率按某种排序能构成等比数列？若能，求出 l_2 的方程；若不能，请说明理由.

2018全国高考模拟卷十

1. A 【点拨】把已知等式变形,利用复数代数形式的乘除运算化简求得 z 的坐标得答案.

【解析】$z(2+i)=1+3i\Rightarrow z=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5+5i}{5}$ $=1+i$.∴ 为第一象限.

2. B 【点拨】解不等式化简集合 A、B,根据交集的定义写出 $A\cap B$.

【解析】$\frac{x+2}{x-2}\leqslant 0\Rightarrow(x+2)(x-2)\leqslant 0(x\neq 2)$

∴ $-2\leqslant x<2$,∴ $A\cap B=[1,2)$∴ 选 B.

3. C 【点拨】由频率分布直方图分析可得每一个分数段上的频率,再由频率与频数的关系,以及获得优秀的频数可得 a 的值.

【解析】由题意可知:90－100 分的频率为

0.005×10＝0.05,频数为 5 人;

则 100－110 分的频率为 0.018×10＝0.18,频数为 18 人;

110－120 分的频率为 0.03×10＝0.3,频数为 30 人;

120－130 分的频率为 0.022×10＝0.22,频数为 22 人;

130－140 分的频率为 0.015×10＝0.15,频数为 15 人;

140－150 分的频率为 0.010×10＝0.1,频数为 10 人;

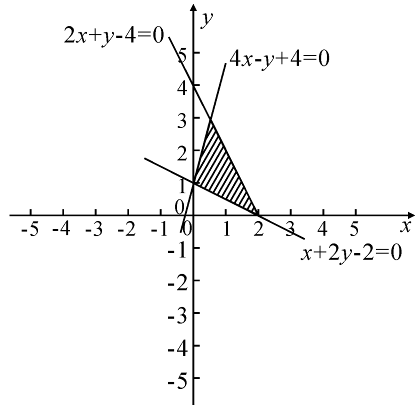
而优秀的人数为 20 人,140－150 分有 10 人,130－140 分有 15 人,取后 10 人,

∴ 分数不低于 133 即为优秀.

4. A 【点拨】由三视图可知几何体为半圆柱与直三棱柱的组合体,利用体积公式,即可得出结论.

【解析】由三视图可知几何体为半圆柱与直三棱柱的组合体,$V=\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2\cdot 3+\frac{1}{2}\times 2\times 4\times 3=6\pi+12$,故选 A.

5. A 【点拨】确定不等式表示的区域,化简目标函数,利用图象即可求得结论.



【解析】不等式表示的区域如图所示,三个交点坐标分别为 $(0,1)$,$(\frac{1}{2},3)$,$(2,0)$

目标函数 $z=3|x|+|y-3|=3x-y+3$,即 $y=3x+3-z$,

∴ 目标函数过$(2,0)$时,取得最大值为 9,过$\left(\frac{1}{2},3\right)$时,取得最小值为$\frac{3}{2}$.

∴ 目标函数 $z=3|x|+|y-3|$的取值范围是$\left[\frac{3}{2},9\right]$.

6. D 【点拨】在①中,由线面垂直的性质定理得 $l\perp m$;在②中,l 与 m 平行或异面;在③中,l 与 α 不一定垂直;在④中,由线面平行的判定定理得 $l/\!/\alpha$.

【解析】由直线 $l\not\subset$平面 α,直线 $m\subset$平面 α,知:在①中,若 $l\perp\alpha$,则由线面垂直的性质定理得

$l\perp m$,故①正确;

在②中,若 $l/\!/\alpha$,则 l 与 m 平行或异面,故②错误;

在③中,若 $l\perp m$,则 l 与 α 不一定垂直,故③错误;

在④中,若 $l/\!/m$,则由线面平行的判定定理得 $l/\!/\alpha$,故④正确.

故选 D.

7. B 【点拨】由题意求出 A,T,利用周期公式求出 ω,利用当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时取得最大值 2,求出 φ,即可得到函数的解析式.

【解析】由题意可知 $A=2$,$T=4(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=\pi$,$\omega=2$,

因为:当 $x=\frac{5\pi}{12}$时取得最大值 2,

所以:$2=2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)$,

所以:$2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in Z$,解得:$\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$,$k\in Z$,

因为:$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,

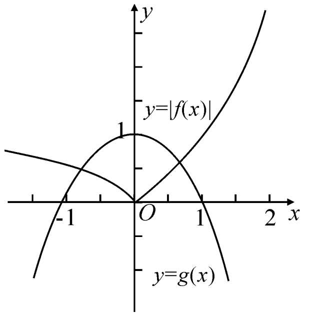
所以:可得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$,可得函数 $f(x)$的解析式:

$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

8. C 【点拨】本题主要考查学生对分段函数的解析式求法以及图象的做法的掌握;根据已知函数,画出现$|f(x)|$和 $g(x)$的函数图象;

再根据 $h(x)=\begin{cases}|f(x)|, & |f(x)|\geqslant g(x),\\ -g(x), & |f(x)|<g(x),\end{cases}$结合图象即可得到答案.

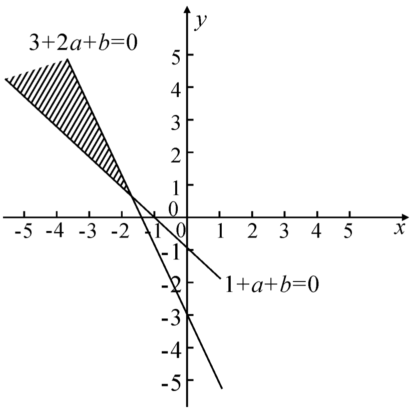
【解析】在同一坐标系中先画出 $|f(x)|$ 与 $g(x)$ 的图象,如图所示,



而 $h(x)=\begin{cases}|f(x)|, & |f(x)|\geqslant g(x),\\ -g(x), & |f(x)|<g(x),\end{cases}$ 故 $h(x)$ 有最小值 -1,无最大值. 故选 C.

9. C 【点拨】令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,把 $x=1,y=0$ 代入函数解析式求得 $a+b+c$ 的值,进而可得 $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)+a(x+1)(x-1)+b(x-1)$ 的形式,设 $g(x)=x^2+(a+1)x+1+a+b$ 椭圆和双曲线的离心率的范围确定两根的范围确定 $g(0)>0,g(1)<0$,最后利用线性规划求得 $\frac{b}{a}$ 的取值范围.

【解析】



令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$\because$ 抛物线的离心率为 1,

$\therefore$ 1 是方程 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ 的一个实根

$\therefore a+b+c=-1$

$\therefore c=-1-a-b$ 代入 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

可得

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3+ax^2+bx-1-a-b\\&=(x-1)(x^2+x+1)+a(x+1)(x-1)+b(x-1)\\&=(x-1)[x^2+(a+1)x+1+a+b]\end{aligned}$$

设 $g(x)=x^2+(a+1)x+1+a+b$,则 $g(x)=0$ 的两根满足 $0<x_1<1,x_2>1$

$\therefore g(0)=1+a+b>0,g(1)=3+2a+b<0$ 作出可行区域,如图所示 $\frac{b}{a}$ 的几何意义是区域内的点与原点连线的斜率,

$\therefore -2<\frac{b}{a}<-\frac{1}{2}$.

10. B 【点拨】先判断 $f(x)$ 为奇函数,且 $f(x)$ 在($x>0$ 且 $x<1$)单调递增,$f(x)+f(k-x^2)=0$ 有两根,即 $x=x^2-k$ 有两根,求 k 即可.

【解析】$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x^3$ $\quad f(x)=-f(-x)$,

当 $x>0$ 时 $f(x)$ 单调递增

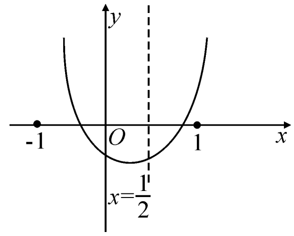
$f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$,$f(x)+f(k-x^2)=0$ 有根,

$\therefore f(x)=-f(k-x^2)$

即 $f(x)=f(x^2-k)$

$\because f(x)$ 为奇函数且在 $(-1,1)$ 单调递增.

$\therefore x=x^2-k$ 有两根,即 $x^2-x-k=0$ 有两根. 根据图象,$x^2-x-k=0$ 在 $(-1,1)$ 有根,令 $g(x)=x^2-x-k$



$\therefore \begin{cases}g\left(\frac{1}{2}\right)<0\\ g(1)>0\end{cases}$ 即 $-\frac{1}{4}<k<0$

11. -6 【点拨】运行程序即可.

【解析】$i=1\quad S=0$

$S=0-1=-1\quad i=2$

$S=-1+2^2=3\quad i=3$

$S=3-9=-6\quad i=4$

$\therefore$ 输出结果为了 -6.

12. 2 【点拨】利用通项公式即可得出.

【解析】$T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r=a^rC_6^rx^{3-\frac{3r}{2}}$,

令 $3-\frac{3r}{2}=0$,解得 $r=2$.

$\therefore a^2C_6^2=60,a>0$,解得 $a=2$.

故答案为:2.

13. 4 【点拨】求出圆的标准方程,求出圆心,根据直线和圆心的关系,求出 a,b 的关系,利用基本不等式进行求解即可.

【解析】圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 即

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$,表示以 $C(2,-1)$ 为圆心,半径等于 2 的圆.

由于直线 $ax-2by=2(a>0,b>0)$ 过圆心,故有 $2a+2b=2$,即 $a+b=1$.

$\because a+b=1,\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1$

$=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}$

$\therefore \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geqslant 4$,

当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$ 时,即 $a=b$ 时取"=".

14. $1+\ln 2$ 【点拨】阴影部分 E 由两部分组成,矩形部分用长乘以宽计算,曲边梯形的面积,利用定积分计算.

【解析】由题意阴影部分 E 有两部分组成,因为函数 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$,当 $y=2$ 时,$x=\frac{1}{2}$,

故阴影部分的面积 $S=2\times\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=1+\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=1-\ln\frac{1}{2}=1+\ln 2$.

15. $\{t|t\geqslant -\frac{1}{3}\}$ 【点拨】$f(t)\geqslant 1$,当 $t\geqslant 1$ 时,$f(t)=2^t\geqslant 1$,当 $t<1$ 时 $f(t)=3t+\frac{5}{2}\geqslant 1$ 从而求出 t 的范围.

【解析】$f(t)=a$,则有 $f(a)=2^a$,

又$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为单调增函数

$\therefore f(t)=a\geqslant 1$

$f(t)\geqslant 1$,当 $t\geqslant 1$ 时,$f(t)=2^t\geqslant 1$ 即 $t\geqslant 0$ $\quad\therefore t\geqslant 1$.

当 $t<1$ 时,$f(t)=\frac{3}{4}t+\frac{5}{4}\geqslant 1$ 即 $t\geqslant -\frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{1}{3}\leqslant t<1\quad\therefore t\in[-\frac{1}{3},+\infty)$.

16.【点拨】(Ⅰ)根据向量点乘求出 $f(x)$ 的解析式,$T=\frac{2\pi}{\omega}$ 求出

T，当 $f(x)$ 取最大值时角的集合为 $\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

(Ⅱ)先将 $f\left(\frac{A}{2}\right)$ 化简，求出 $A=\frac{\pi}{3}$ 用余弦定理表示 $\cos A$，结合面积公式，用均值不等式即求出面积最大值.

【解析】(Ⅰ)易得 $\boldsymbol{a}=(-\sin x,\cos x)$，则 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,(k\in \mathrm{Z})$ 时，即 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathrm{Z})$，

$f(x)$ 取最大值是 $\frac{3}{2}$.

(Ⅱ)$\because f(\frac{A}{2})=\sin(A-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=1$，

$\therefore \sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore 12=b^2+c^2-bc$，

$\therefore b^2+c^2=12+bc\geqslant 2bc$，

$\therefore bc\leqslant 12$.(当且仅当 $b=c$ 时等号成立)

$\therefore S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant 3\sqrt{3}$.

$\therefore$ 当三角形 ABC 为等边三角形时面积取最大值是 $3\sqrt{3}$.

17.**【点拨】**(Ⅰ)集成电路 E 需要维修包含两种情况：①3 个元件均不能正常工作；②3 个元件中有 2 个不正常工作.

(Ⅱ)其服从 $B\left(2,\frac{5}{12}\right)$，列出分布列计算期望即可.

【解析】(Ⅰ)三个电子元件能正常工作分别记为事件 A,B,C 则 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$，$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$，$\mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}$. 依题意，集成电路 E 需要维修有两种情形：

①3 个元件都不能正常工作，概率为 $P_1=P(\overline{ABC})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$.

②3 个元件中的 2 个不能正常工作，概率为 $P_2=P(\overline{A}\,B\,\overline{C})+P(A\,\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{AB}C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

所以，集成电路 E 需要维修的概率为 $P_1+P_2=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

(Ⅱ)设 ξ 为维修集成电路的个数，则 ξ 服从 $B(2,\frac{5}{12})$，

而 $X=100\xi$，$P(X=100\xi)=P(\xi=k)=C_2^k\cdot(\frac{5}{12})^k\cdot(\frac{7}{12})^{2-k}$，$k=0,1,2$.

X 的分布列为：

X	0	100	200
P	$\frac{49}{144}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{25}{144}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{49}{144}+100\times\frac{35}{72}+200\times\frac{25}{144}=\frac{250}{3}$.

18.**【点拨】**(Ⅰ)证明 OGF 面内的两条相交直线 OG 和 OF 分别平行面 ACD 即可.

(Ⅱ)以 O 点建空间坐标系，利用空间向量求线面角.

【证明】(Ⅰ)$\because OF$ 为 $\triangle ABC$ 的一条中位线，

$\therefore OF/\!/AC$，

又 $OF\not\subset$ 平面 ACD，$AC\subset$ 平面 ACD，$\therefore OF/\!/$ 平面 ACD.

又$\because OG$ 为 $\angle DOB$ 的平分线，

$\therefore OG\perp BD$，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore AD\perp BD$，

$\therefore OG/\!/AD$，又 $OG\not\subset$ 平面 ACD，$AD\subset$ 平面 ACD，

$\therefore OG/\!/$ 平面 ACD，

又$\because OG,OF$ 为平面 OGF 内的两条相交直线，

$\therefore$ 平面 $OGF/\!/$ 平面 CAD.

(Ⅱ)$\because O$ 为 AB 的中点，$\therefore CO\perp AB$，

$\because$ 平面 $CAB\perp$ 平面 DAB，平面 $CAB\cap$ 平面 $DAB=AB$，$OC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore CO\perp$ 平面 DAB，又 Rt $\triangle DAB$ 中，$AB=2$，$\angle DAB=60°$，

$\therefore AD=1$，又 $OG/\!/AD$，$OG=1$，$OA=1$，

$\therefore$ 四边形 $ADGO$ 为菱形，$\angle AOG=120°$，

设 DG 中点为 M，则 $\angle AOM=90°$，即 $OM\perp OB$，

$\therefore$ 直线 OM,OB,OC 两两垂直，

以 O 为原点，以 OM,OB,OC 为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ $D(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$，$G(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$F(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

$\therefore \overrightarrow{FG}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{BD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$.

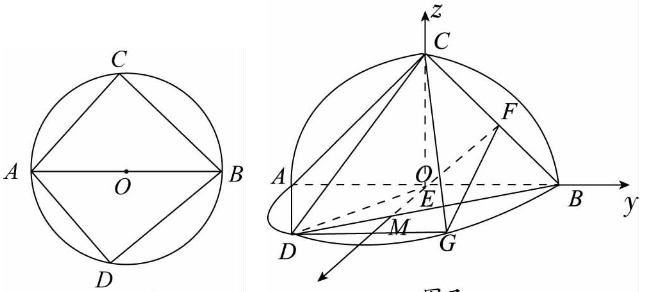
设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{0}$，

$\therefore \begin{cases}-y+z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=0\end{cases}$，令 $y=1$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$.

$\therefore \overrightarrow{FG}\cdot\boldsymbol{n}=1$，$|\overrightarrow{FG}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{5}$.

$\therefore \cos<\overrightarrow{FG},\boldsymbol{n}>=\frac{\overrightarrow{FG}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{FG}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



图甲　　图乙

19.**【点拨】**(Ⅰ)将 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 代入化简即 $\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$，再列出 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$，再求和即可.

(Ⅱ)将 S_n 代入 b_n 中，求出 b_n，利用分组求和结合错位相减求 b_n 前 n 项和.

【解析】(Ⅰ)当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$ 化简得 $S_{n-1}-S_n=S_nS_{n-1}$ 即 $\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$，又 $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$，所以数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 为以 1 为首项，2 为公差的等差数列，

$\frac{1}{S_n}=2n-1$，则 $P_n=\frac{(1+2n-1)\cdot n}{2}=n^2$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$\frac{1}{S_n}=2n-1$ 所以 $S_n=\frac{1}{2n-1}$，$b_n=\frac{S_n}{2n+1}+\frac{2^n}{S_n}$

$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+(2n-1)\times 2^n$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})+(2n-1)\times 2^n$

所以 $A_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$

$B_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-3)\times 2^{n-1}+(2n-1)\times 2^n$，　①

$2B_n=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+\cdots+(2n-3)\times 2^n+(2n-1)\times 2^{n+1}$，　②

①－②得，$-B_n=1\times 2+2\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+2\times 2^{n-1}+2\times 2^n-(2n-1)\times 2^{n+1}=(3-2n)\times 2^{n+1}-6$

$\therefore T_n=A_n+B_n=\frac{n}{2n+1}+(2n-3)\times 2^{n+1}+6$.

20.【点拨】（Ⅰ）求等讨论单调性，分 $a\leqslant 0$ 和 $a>0$. 讨论单调性，结合零点分布求解.

（Ⅱ）结合（Ⅰ）中的 $x-\frac{1}{x}\geqslant 2\ln x(x\geqslant 1)$ 成立，令 $x=\frac{n^2}{n^2-1}$ $(n>0$ 且 $n\in N_+)$ 迭加即可证明不等式.

【解析】（Ⅰ）$\because f(x)=-f(\frac{1}{x})\therefore (a-b)(x+\frac{1}{x})=0$，即得 $a=b$

$f(x)=a(x-\frac{1}{x})-2\ln x$，$f'(x)=a(1+\frac{1}{x^2})-\frac{2}{x}=\frac{ax^2-2x+a}{x^2}$

当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $x\geqslant 1$，所以 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递减，

此时 $f(2)<f(1)=0$ 与 $f(x)\geqslant 0$ 不符，（舍）

当 $a>0$ 时，令 $g(x)=ax^2-2x+a$，$\Delta=4-4a^2$

若 $\Delta\leqslant 0$ 即 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty]$ 上单调递增.

$f(x)\geqslant f(1)=0$ 成立

若 $\Delta>0$ 即 $0<a<1$ 时，设 $g(x)$ 的零点为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{2}{a}>0$，$x_1x_2=1$，所以有 $0<x_1<1<x_2$.

则当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $x\in(1,x_2)$ 上单调递减，

$f(x)<f(1)=0$ 与 $f(x)\geqslant 0$ 不符，（舍）

综上：实数 a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-\frac{1}{x})-2\ln x\geqslant 0$ 恒成立.

即 $x-\frac{1}{x}\geqslant 2\ln x(x\geqslant 1)$，

令 $x=\frac{n^2}{n^2-1}(n>1,n\in \mathrm{N}_+)$

则有 $\frac{n^2}{n^2-1}-\frac{n^2-1}{n^2}>2\ln\frac{n^2}{n^2-1}$，即 $\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>2\ln\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$.

所以$\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{n^2}>2\ln\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$

迭加有 $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>2\ln\frac{2n}{n+1}$

所以$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>2\ln\frac{2n}{n+1}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$

故$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>2\ln\frac{2n}{n+1}-\frac{3}{4}$成立.

21.【点拨】（Ⅰ）将向量翻译成坐标，将 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$代入方程即可确定方程.

（Ⅱ）(i)将 $l_1:y-\frac{3}{2}=k(x-1)$联立$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，令 $\Delta=0$ 即可求出 k，从而知 l_2 的斜率为$\frac{1}{2}$，设 l_2 方程为 $y=\frac{1}{2}x+t$ 代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，计算 $k_{PM}+k_{PN}=0$. 得$\angle MPK=\angle NPK$，利用正弦定理即可.

(ii)假设存在，根据假设，求出 k，看是否与题意相符.

【解析】（Ⅰ）设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$c>0$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-c-1,-\frac{3}{2})\cdot(c-1,-\frac{3}{2})=1-c^2+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$，

所以 $c=1$.

因为 $2a=|PF_1|+|PF_2|=4$，所以 $a=2$.

$\therefore b^2=3$

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）（ⅰ）设 l_1 方程 $y-\frac{3}{2}=k(x-1)$，与$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 联立，消 y 得

$(4k^2+3)x^2+(12k-8k^2)x+(3-2k)^2-12=0$

则题意知 $\Delta=0$，解得 $k=-\frac{1}{2}$.

因为直线 l_2 与 l_1 的倾斜角互补，所以 l_2 的斜率是$\frac{1}{2}$.

设直线 l_2 方程：$y=\frac{1}{2}x+t$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+t\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，整理得 $x^2+tx+t^2-3=0$，

由 $\Delta>0$，得 $t^2<4$，

$x_1+x_2=-t$，$x_1\cdot x_2=t^2-3$；

直线 PM、PN 的斜率之和 $k_{PM}+k_{PN}=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$

$=\frac{\left(\frac{1}{2}x_1+t-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(\frac{1}{2}x_2+t-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=\frac{x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)-(2t-3)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=0$.

所以 PM、PN 关于直线 $x=1$ 对称，即$\angle MPK=\angle NPK$，

在 ΔPMK 和 ΔPNK 中，由正弦定理得

$\frac{PM}{\sin\angle PKM}=\frac{MK}{\sin\angle MPK}$，$\frac{PN}{\sin\angle PKN}=\frac{NK}{\sin\angle NPK}$，

又因为$\angle MPK=\angle NPK$，$\angle PKM+\angle PKN=180°$

所以$\frac{PM}{PN}=\frac{MK}{NK}$

故$|PM|\cdot|KN|=|PN|\cdot|KM|$成立.

（ⅱ）由（ⅰ）知，$k_{PM}+k_{PN}=0$，$k_{l_1}=-\frac{1}{2}$，$k_{l_2}=\frac{1}{2}$.

假设存在直线 l_2，满足题意，不妨设 $k_{PM}=-k$，$k_{PN}=k$，$(k>0)$

若 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$-k$，k 按某种排序构成等比数列，设公比为 q，

则 $q=-1$ 或 $q^2=-1$ 或 $q^3=-1$.

所以 $q=-1$，

则 $k=\frac{1}{2}$，此时直线 PN 与 l_2 平行或重合，与题意不符，故不存在直线 l_2，满足题意.