2018全国高考模拟卷八

本试卷分为两卷，第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题，满分150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2-\mathrm{i}$，则复数 z 在复平面内对应的点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 设集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\mid |x-2|\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-1,0]$　　B. $[0,3)$　　C. $(3,4]$　　D. $(-1,3)$

3. 已知变量 x,y 呈现线性相关关系，回归方程为 $\hat{y}=1-2x$，则变量 x,y 是（　　）

A. 线性正相关关系

B. 由回归方程无法判断其正负相关关系

C. 线性负相关关系

D. 不存在线性相关关系

4. 若直线 l 过三角形 ABC 内心（三角形内心为三角形内切圆的圆心），则"直线 l 平分三角形 ABC 周长"是"直线 l 平分三角形 ABC 面积"的（　　）条件

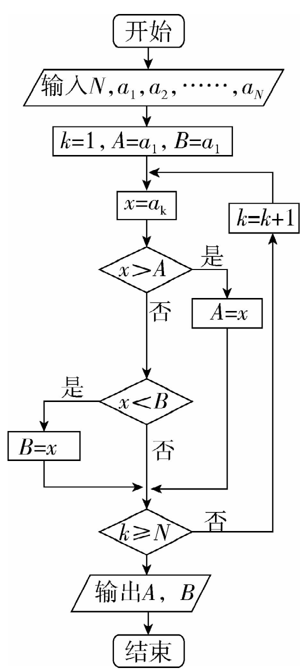
A. 充分不必要

B. 必要不充分

C. 充要

D. 既不充分也不必要

5. 如果执行如右图所示的程序框图，输入正整数 $N(N\geqslant 2)$ 和实数 $a_1,a_2,\cdots,a_N$，输出 A,B，则（　　）



A. $A+B$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的和

B. A 和 B 分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中最大的数和最小的数

C. $\dfrac{A+B}{2}$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的算术平均数

D. A 和 B 分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中最小的数和最大的数

6. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，若不等式 $f(a)\geqslant f(x)$ 对任意 $x\in[1,2]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

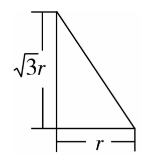
A. $(-\infty,1]$　　B. $[-1,1]$

C. $(-\infty,2]$　　D. $[-2,2]$

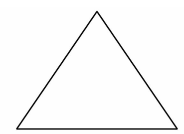
7. 若一个空间几何体的三视图如下图所示，且已知该几何体的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$，则其表面积为（　　）

A. $\dfrac{3}{2}\pi+\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}\pi$

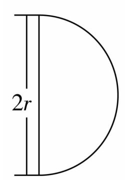
C. $\dfrac{3}{4}\pi+2\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}\pi+\sqrt{3}$



正（主）视图



侧（左）视图



俯视图

8. 已知实数 x,y 满足 $|x|\leqslant y+1$，且 $-1\leqslant y\leqslant 1$，则 $z=2x+y$ 的最大值为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 6

9. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 和函数 $g(x)=\cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4}\right]$ 上的图像交于 A,B,C 三点，则 ΔABC 的面积是（　　）

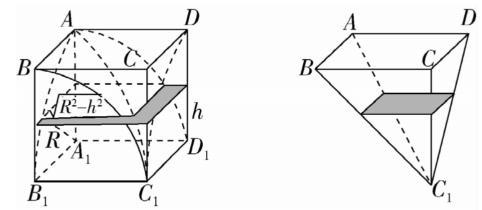
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若公差 $d>0$，$(S_8-S_5)(S_9-S_5)<0$，则（　　）

A. $|a_7|>|a_8|$　　B. $|a_7|<|a_8|$

C. $|a_7|=|a_8|$　　D. $a_7=0$

11. 我国古代数学家祖暅是著名数学家祖冲之之子，祖暅原理叙述道："夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异。"意思是：夹在两个平行平面之间的两个几何体被平行于这两个平行平面的任意平面所截，如果截得的两个截面面积总相等，那么这两个几何体的体积相等。其最著名之处是解决了"牟合方盖"中的体积问题，其核心过程为：如下图正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，求图中四分之一圆柱体 $BB_1C_1-AA_1D_1$ 和四分之一圆柱体 $AA_1B_1-DD_1C_1$ 公共部分的体积 V，若图中正方体的棱长为2，则 $V=$（　　）



（在高度 h 处的截面：用平行于正方体上下底面的平面去截，记截得两圆柱体公共部分所得面积为 S_1，截得正方体所得面积为 S_2，截得锥体所得面积为 S_3，$S_1=R^2-h^2$，$S_2=R^2\Rightarrow S_2-S_1=S_3$）

A. $\dfrac{16}{3}$　　B. $\dfrac{8}{3}$　　C. 8　　D. $\dfrac{8\pi}{3}$

12. 设 A、B 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点，P,Q 是双曲线 C 上关于 x 轴对称的不同两点，设直线 AP,BQ 的斜率分别为 m,n，则 $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2|mn|}+\ln|m|+\ln|n|$ 取得最小值时，双曲线 C 的离心率为（　　）

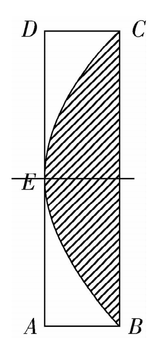
A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 二项式 $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的展开式中第四项的系数为________.

14. 如右图所示矩形 $ABCD$ 边长 $AB=1$，$AD=4$，抛物线顶点为边 AD 的中点 E，且 B,C 两点在抛物线上，则从矩形内任取一点落在抛物线与边 BC 围成的封闭区域（包含边界上的点）内的概率是________.



15. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足：$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，若 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，其中 $x>0,y>0$ 且 $x+y=2$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 最小值是________.

16. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，且满足：$b^2-a^2=ac$，$c=2$，则 a 的取值范围是________.

三、解答题（本大题共6小题，共70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+1$.

（Ⅰ）设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $c_n=\tan b_n\cdot\tan b_{n+1}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分12分）

2016年11月20日－22日在江西省南昌市举行了首届南昌国际马拉松赛事，赛后某机构用"10分制"调查了很多人（包括普通市民，运动员，政府官员，组织者，志愿者等）对此项赛事的满意度. 现从调查人群中随机抽取16名，以下茎叶图记录了他们的满意度分数（以小数点前的一位数字为茎，小数点后的一位数字为叶）：

	满意度
7	3　0
8	6　6　6　6　7　7　8　8　9　9
9	7　6　5　5

（Ⅰ）指出这组数据的众数和中位数；

（Ⅱ）若满意度不低于9.5分，则称该被调查者的满意度为"极满意". 求从这16人中随机选取3人，至多有1人是"极满意"的概率；

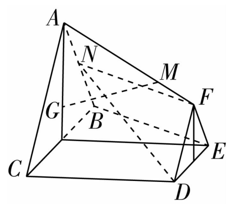
（Ⅲ）以这16人的样本数据来估计整个被调查群体的总体数据，若从该被调查群体（人数很多）任选3人，记 ξ 表示抽到"极满意"的人数，求 ξ 的分布列及数学期望.

19.（本小题满分 12 分）

如图,在棱台 $ABC-FED$ 中,$\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 分别是棱长为 1 与 2 的正三角形,平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$,四边形 $BCDE$ 为直角梯形,$BC\perp CD$,$CD=1$,点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,N 为 AB 中点,$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AF}(\lambda\in\mathbf{R},\lambda>0)$,

（Ⅰ）当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时,求证:$GM//$ 平面 DFN;

（Ⅱ）若直线 MN 与 CD 所成角为 $\frac{\pi}{3}$,试求二面角 $M-BC-D$ 的余弦值.

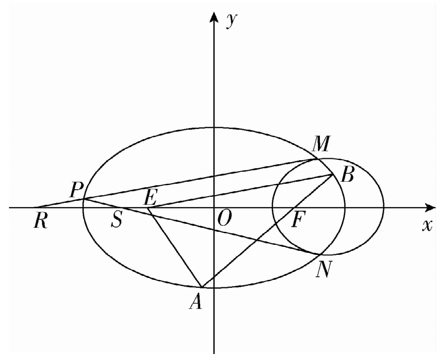


20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$ 的左右焦点分别为 E,F,过点 F 作直线交椭圆 C 于 A,B 两点,若 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 且 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）已知圆 O 为原点,圆 $D:(x-3)^2+y^2=r^2(r>0)$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点,点 P 为椭圆 C 上一动点,若直线 PM,PN 与 x 轴分别交于点 R,S,求证:$|OR|\cdot|OS|$ 为常数.



21.（本小题满分 12 分）

若 $\forall x\in D$,总有 $f(x)<F(x)<g(x)$,则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的一个"严格分界函数".

（Ⅰ）求证:$y=e^x$ 是 $y=1+x$ 和 $y=1+x+\frac{x^2}{2}$ 在 $(-1,0)$ 上的一个"严格分界函数";

（Ⅱ）函数 $h(x)=2e^x+\frac{1}{1+x}-2$,若存在最大整数 M 使得 $h(x)>\frac{M}{10}$ 在 $x\in(-1,0)$ 恒成立,求 M 的值.

（$e=2.718\cdots$ 是自然对数的底数,$\sqrt{2}\approx1.414$. $2^{\frac{1}{3}}\approx1.260$）

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）. 以坐标原点为极点,以 x 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系.

（Ⅰ）写出曲线 C 的极坐标方程;

（Ⅱ）设点 M 的极坐标为 $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$,过点 M 的直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点,若 $|MA|=2|MB|$,求 AB 的弦长.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5:不等式选讲

设 $f(x)=|x-1|+|x+1|,(x\in\mathrm{R})$

（Ⅰ）求证:$f(x)\geqslant2$;

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\geqslant\frac{|2b+1|-|1-b|}{|b|}$ 对任意非零实数 b 恒成立,求 x 的取值范围.

2018全国高考模拟卷八

1. D 【点拨】利用复数的运算法则、几何意义即可得出.

【解析】复数 z 满足 $(1+i)z=2-i$，$\therefore (1-i)(1+i)z=(1-i)(2-i)$，$\therefore 2z=1-3i$，$\therefore z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$.

则复数 z 在复平面内对应的点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ 在第四象限.

故选：D.

2. B 【点拨】解不等式求出集合 A、B，再根据交集的定义写出 $A\cap B$ 即可.

【解析】集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$，

$B=\{x||x-2|\leqslant 2\}=\{x|-2\leqslant x-2\leqslant 2\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，

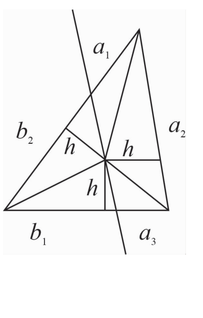
则 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<3\}=[0,3)$.

故选：B.

3. C 【点拨】根据变量 x，y 的线性回归方程的系数 $\hat{b}<0$，判断变量 x，y 是线性负相关关系.

【解析】根据变量 x，y 的线性回归方程是 $\hat{y}=1-2x$，回归系数 $\hat{b}=-2<0$，

所以变量 x，y 是线性负相关关系. 故选：C.



4. C 【点拨】画出满足条件的图象，进而由割补法结合三角形面积公式，可得答案.

【解析】如图所示：

"直线 l 平分三角形 ABC 周长"

$\Leftrightarrow$"$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2$"

$\Leftrightarrow$"$a_1\cdot h+a_2\cdot h+a_3\cdot h=b_1\cdot h+b_2\cdot h$（其中 h 为三角形内切圆半径）"

$\Leftrightarrow$“直线 l 平分三角形 ABC 面积”，

故“直线 l 平分三角形 ABC 周长”是“直线 l 平分三角形 ABC 面积”的充要条件，故选：C.

5. B 【点拨】分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序知：

该程序的作用是求出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大的数和最小的数.

【解析】分析程序中各变量、各语句的作用，

再根据流程图所示的顺序，可知：

该程序的作用是：求出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大的数和最小的数；

其中 A 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大的数，

B 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最小的数.

故选：B.

6. B 【点拨】偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，则不等式 $f(a)\geqslant f(x)$ 对任意 $x\in[1,2]$ 恒成立，即不等式 $f(|a|)\geqslant f(|x|)$ 对任意 $x\in[1,2]$ 恒成立，即可得到答案.

【解析】由题意，偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，

则不等式 $f(a)\geqslant f(x)$ 对任意 $x\in[1,2]$ 恒成立，即不等式 $f(|a|)\geqslant f(|x|)$ 对任意 $x\in[1,2]$ 恒成立，

$\therefore |a|\leqslant|x|$ 对任意 $x\in[1,2]$ 恒成立，

$\therefore |a|\leqslant1$，则 $-1\leqslant a\leqslant1$

故选 B.

7. A 【点拨】由已知中的三视图，可得该几何体是一个以俯视图为底面的半圆锥，进而可得答案.

【解析】由已知中的三视图，可得该几何体是一个以俯视图为底面的半圆锥，

底面面积 $S=\dfrac{1}{2}\pi r^2$，

高 $h=\sqrt{3}r$，

故体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi r^3=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$，

解得：$r=1$，

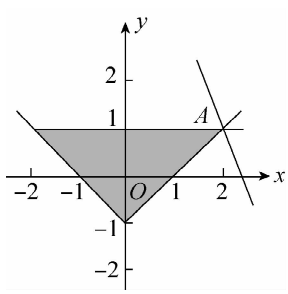
故圆锥的母线长 $l=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

故半圆锥的表面积 $S=\dfrac{1}{2}\pi r(r+l)+\dfrac{1}{2}\times2rh=\dfrac{3}{2}\pi+\sqrt{3}$.

故选：A

8. C 【点拨】作出不等式组对应的平面区域，利用 z 的几何意义，进行平移即可得到结论.

【解析】作出不等式组 $|x|\leqslant y+1$，且 $-1\leqslant y\leqslant1$ 对应的平面区域如图



由 $z=2x+y$，得 $y=-2x+z$，

平移直线 $y=-2x+z$，由图象可知当直线 $y=-2x+z$ 经过点 A 时，

直线 $y=-2x+z$ 的截距最大，此时 z 最大，

由 $\begin{cases}y=1\\y=x-1\end{cases}$，解得 $A(2,1)$，此时 $z=2\times2+1=5$，

故选：C.

9. C 【点拨】由题意结合正弦函数、余弦函数的图象，求得 A、B、C 三点的坐标，即可求得 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】函数 $f(x)=\sin(\pi x+\dfrac{\pi}{4})$ 和函数 $g(x)=\cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $[-\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4}]$ 上的图象交于 A,B,C 三点，

令 $\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$x\in[-\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4}]$，

解得 $x=-1,0,1$，

可得 $A(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$、$B\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$C\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

则 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\cdot[1-(-1)]$

$=\sqrt{2}$.

故选：C.

10. B 【点拨】根据题意，由 $(S_8-S_5)(S_9-S_5)<0$ 分析可得 $(a_6+a_7+a_8)(a_6+a_7+a_8+a_9)<0$，结合等差数列的性质可得 $(a_6+a_7+a_8)(a_6+a_7+a_8+a_9)<0\Leftrightarrow a_7\times(a_7+a_8)<0$，又由 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$，分析可得 $a_7<0,a_8>0$，且 $|a_7|<|a_8|$；即可得答案.

【解析】根据题意，等差数列 $\{a_n\}$ 中，有 $(S_8-S_5)(S_9-S_5)<0$，

即 $(a_6+a_7+a_8)(a_6+a_7+a_8+a_9)<0$，

又由 $\{a_n\}$ 为等差数列，则有 $(a_6+a_7+a_8)=3a_7$，$(a_6+a_7+a_8+a_9)=2(a_7+a_8)$，

$(a_6+a_7+a_8)(a_6+a_7+a_8+a_9)<0\Leftrightarrow a_7\times(a_7+a_8)<0$，

a_7 与 (a_7+a_8) 异号，

又由公差 $d>0$，必有 $a_7<0,a_8>0$，且 $|a_7|<|a_8|$；

故选：B.

11. A 【点拨】在高度 h 处的截面：用平行于正方体上下底面的平面去截，记截得两圆柱体公共部分所得面积为 S_1，截得正方体所得面积为 S_2，截得锥体所得面积为 S_3，$S_1=R^2-h^2$，$S_2=R^2\Rightarrow S_2-S_1=S_3$，求出 $S_3=h^2$，再由定积分求出锥体体积，由正方体的体积减去锥体体积即可.

【解析】在高度 h 处的截面：用平行于正方体上下底面的平面去截，

记截得两圆柱体公共部分所得面积为 S_1，截得正方体所得面积为 S_2，截得锥体所得面积为 S_3，

可得 $S_1=R^2-h^2$，$S_2=R^2\Rightarrow S_2-S_1=S_3$，

由 $S_3=h^2$，可得 $\int_0^2h^2\mathrm{d}h=\dfrac{1}{3}h^3\big|_0^2=\dfrac{8}{3}$.

则 $V=8-\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{3}$.

故选：A.

12. D 【点拨】设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(x_0,-y_0)$，$y_0^2=b^2\left(\dfrac{{x_0}^2}{a^2}-1\right)$. $A(-a,0)$，$B(a,0)$，利用斜率计算公式得到：$mn=-\dfrac{b^2}{a^2}$，

则 $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2|mn|}+\ln|m|+\ln|n|=\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a^2}{2b^2}+\ln\dfrac{b^2}{a^2}=f\left(\dfrac{a}{b}\right)$，令 $\dfrac{a}{b}=t>0$，则 $f(t)=\dfrac{2}{t}+t+\dfrac{1}{2}t^2-2\ln t$. 利用导数研究其单调性，求得最小值点，再由离心率公式即可得出.

【解析】设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(x_0,-y_0)$，$y_0^2=b^2\left(\dfrac{{x_0}^2}{a^2}-1\right)$，

即有 $\dfrac{{y_0}^2}{{x_0}^2-a^2}=\dfrac{b^2}{a^2}$，

由双曲线的方程可得 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，

则 $m=\dfrac{y_0}{x_0+a}$，$n=\dfrac{y_0}{a-x_0}$，　$\therefore mn=\dfrac{{y_0}^2}{a^2-{x_0}^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，

$\therefore\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2|mn|}+\ln|m|+\ln|n|=\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a^2}{2b^2}+\ln\dfrac{b^2}{a^2}$

$=f\left(\dfrac{a}{b}\right)$，

令 $\dfrac{a}{b}=t>0$，则 $f(t)=\dfrac{2}{t}+t+\dfrac{1}{2}t^2-2\ln t$.

$f'(t)=-\dfrac{2}{t^2}+1+t-\dfrac{2}{t}=\dfrac{(t+1)(t^2-2)}{t^2}$，

可知：当 $t=\sqrt{2}$ 时，函数 $f(t)$ 取得最小值

$f(\sqrt{2})=\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\times2-2\ln\sqrt{2}=2\sqrt{2}+1-\ln2$.

$\therefore\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}$.

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

故选：D.

13. 20 【点拨】根据二项式$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$展开式的通项公式，求出第四项的系数即可.

【解析】二项式$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$展开式中,第四项为

$T_{3+1}=C_6^3\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{6-3}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$,

∴ 展开式中第四项的系数为:

$C_6^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2^3=20$.

故答案为:20.

14. $\frac{2}{3}$ 【点拨】利用定积分求出阴影部分面积,求出矩形面积,即可得出结论.

【解析】以 E 为坐标原点,AD 的垂直平分线为 x 轴,AD 所在直线为 y 轴,建立坐标系,可得抛物线方程为 $y^2=4x$,

取 $y=2\sqrt{x}$,则阴影部分的面积为 $2\int_0^1 2\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$,

∵ 矩形的面积为 4,

∴ 所求概率为$\frac{\frac{8}{3}}{4}=\frac{2}{3}$,

故答案为$\frac{2}{3}$.

15. $\sqrt{3}$ 【点拨】由平面向量的数量积计算 $\boldsymbol{c}^2$,利用基本不等式求出 $\boldsymbol{c}^2$ 的最小值,即可得出$|\boldsymbol{c}|$的最小值.

【解析】∵ $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$,

当$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$时,

$\boldsymbol{c}^2=x^2\boldsymbol{a}^2+2xy\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+y^2\boldsymbol{b}^2$

$=x^2+xy+y^2$

$=(x+y)^2-xy$;

又 $x>0$,$y>0$ 且 $x+y=2$,

∴ $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=1$,当且仅当 $x=y=1$ 时取"="，

∴ $\boldsymbol{c}^2\geqslant(x+y)^2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=2^2-1=3$,

∴ $|\boldsymbol{c}|$的最小值是$\sqrt{3}$.

故答案为:$\sqrt{3}$.

16. $\left(\frac{2}{3},2\right)$ 【点拨】由已知可得:$b^2=2a+a^2$,又由余弦定理可得:$b^2=a^2+4-4a\cos B$,整理可得:$a=\frac{4}{2+4\cos B}$,由范围 $B\in(0,\frac{\pi}{2})$,可求 $\cos B\in(0,1)$,进而可求 a 的范围.

【解析】∵ $b^2-a^2=ac$,$c=2$,可得:$b^2=2a+a^2$,

又∵ 由余弦定理可得:$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+4-4a\cos B$,

∴ $2a+a^2=a^2+4-4a\cos B$,整理可得:$a=\frac{4}{2+4\cos B}$,

∵ $B\in(0,\frac{\pi}{2})$, ∴ $\cos B\in(0,1)$,可得:$2+4\cos B\in(2,6)$,

∴ $a=\frac{4}{2+4\cos B}\in\left(\frac{2}{3},2\right)$.

故答案为:$\left(\frac{2}{3},2\right)$.

17.【点拨】(Ⅰ)将 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+1$ 变形为:$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+1$,再由条件得 $b_{n+1}=b_n+1$,根据条件求出 b_1,由等差数列的定义证明$\{b_n\}$是等差数列,由通项公式可得所求;

(Ⅱ)求得 $c_n=\tan b_n\cdot\tan b_{n+1}=\tan(n+3)\cdot\tan(n+4)$,由两角差的正切公式可得 $\tan[(n+4)-(n+3)]=\frac{\tan(n+4)-\tan(n+3)}{1+\tan(n+4)\tan(n+3)}$,可得 $\tan(n+3)\cdot\tan(n+4)=\frac{\tan(n+4)-\tan(n+3)}{\tan 1}-1$,再由数列的求和方法:裂项相消求和,即可得到所求和.

【解析】(Ⅰ)证明:由 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+1$ 得,

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+1$,

由 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 得,$b_{n+1}=b_n+1$,

即 $b_{n+1}-b_n=1$,

又 $b_1=a_2-a_1=5-1=4$,

所以$\{b_n\}$是首项为 4,公差为 1 的等差数列.

且 $b_n=b_1+(n-1)d=4+n-1=n+3$;

(Ⅱ)$c_n=\tan b_n\cdot\tan b_{n+1}=\tan(n+3)\cdot\tan(n+4)$,

由 $\tan[(n+4)-(n+3)]=\frac{\tan(n+4)-\tan(n+3)}{1+\tan(n+4)\tan(n+3)}$,

可得 $\tan(n+3)\cdot\tan(n+4)=\frac{\tan(n+4)-\tan(n+3)}{\tan 1}-1$,

即有数列$\{c_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{\tan 5-\tan 4}{\tan 1}+\frac{\tan 6-\tan 5}{\tan 1}+\cdots+\frac{\tan(n+4)-\tan(n+3)}{\tan 1}-n$

$=\frac{\tan(n+4)-\tan 4}{\tan 1}-n$.

18.【点拨】(Ⅰ)出现次数最多的数是 8.6,按从小到大排列,位于中间的两位数是 8.7,8.8,由此能求出众数和中位数

(Ⅱ)由茎叶图可知,满意度为"极满意"的人有 4 人. 设 A_i 表示所取 3 人中有 i 个人是"极满意",至多有 1 人是"极满意"记为事件 A,$P(A)=P(A_0)+P(A_1)$;

(Ⅲ)从 16 人的样本数据中任意选取 1 人,抽到"极满意"的人的概率为$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,故依题意可知,从该顾客群体中任选 1 人,抽到"极满意"的人的概率 $P=\frac{1}{4}$.

由题可知 $\xi\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$,即可求 ξ 的分布列及数学期望.

【解析】(Ⅰ)出现次数最多的数是 8.6,按从小到大排列,位于中间的两位数是 8.7,8.8,由此能得出众数和中位数. 众数:8.6;中位数:8.75

(Ⅱ)由茎叶图可知,满意度为"极满意"的人有 4 人.

设 A_i 表示所取 3 人中有 i 个人是"极满意",至多有 1 人是"极满意"记为事件 A,

$P(A)=P(A_0)+P(A_1)=\frac{C_{12}^3}{C_{16}^3}+\frac{C_4^1C_{12}^2}{C_{16}^3}=\frac{121}{140}$

(Ⅲ)从 16 人的样本数据中任意选取 1 人,抽到"极满意"的人的概率为$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,

故依题意可知,从该顾客群体中任选 1 人,抽到"极满意"的人的概率 $p=\frac{1}{4}$.

ξ 的可能取值为 0,1,2,3,

$P(\xi=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$;$P(\xi=1)=C_3^1\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$;

$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$;$p(\xi=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$E(\xi)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=0.75$.

另【解析】由题可知 $\xi\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$,所以 $E\xi=3\times\frac{1}{4}=0.75$

19.【点拨】(Ⅰ)连 AG 延长交 BC 于 P,推出$\frac{AG}{AP}=\frac{2}{3}$,证明 $GM\parallel PF$;然后证明 $NP\parallel AC$,推出 $NP\parallel DF$,然后证明 $GM\parallel$ 平

面 DFN.

(Ⅱ)连接 PE,以 P 为原点,PC 为 x 轴,PE 为 y 轴,PA 为 z 轴建立空间直角坐标系,求出相关点的坐标,求出平面 MBC 的法向量,平面 BCD 的法向量,利用空间向量的数量积求解二面角 $M-BC-D$ 的余弦值即可.

【解析】(Ⅰ)连 AG 延长交 BC 于 P,

因为点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,所以$\dfrac{AG}{AP}=\dfrac{2}{3}$

又$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}$,所以$\dfrac{AG}{AP}=\dfrac{AM}{AF}=\dfrac{2}{3}$,所以 $GM /\!/ PF$;

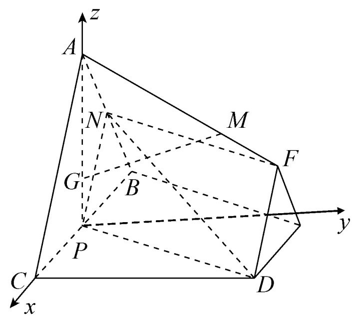
N 为 AB 中点,P 为 BC 中点,$NP /\!/ AC$,又 $AC /\!/ DF$,

所以 $NP /\!/ DF$,得 P、D、F、N 四点共面

$\therefore GM /\!/$ 平面 DFN

(Ⅱ)平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$,

$AP\perp BC$,$\therefore AP\perp$ 平面 $BCDE$,连接 PE,易得 $PE\perp BC$,以 P 为原点,PC 为 x 轴,PE 为 y 轴,PA 为 z 轴建立空间直角坐标系,则



$C(1,0,0)$,$D(1,1,0)$,$A(0,0,\sqrt{3})$,$F\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$B(-1,0,0)$,

$N\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

设 $M(x,y,z)$,$\because \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AF}$,

$\therefore M\left(\dfrac{\lambda}{2},\lambda,\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$,$\overrightarrow{NM}=\left(\dfrac{\lambda+1}{2},\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right)$,

$\overrightarrow{CD}=(0,1,0)$

因为 MN 与 CD 所成角为$\dfrac{\pi}{3}$,所以 $\cos 60°=\dfrac{|\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{NM}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=$

$\dfrac{\lambda}{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)^2+\lambda^2+\dfrac{3}{4}(1-\lambda)^2}}=\dfrac{1}{2}$,

得 $2\lambda^2+\lambda-1=0$,$\therefore \lambda=\dfrac{1}{2}$,$\therefore M\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$,

设平面 MBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$,取 $n=(0,3\sqrt{3},-2)$,

平面 BCD 的法向量$\boldsymbol{v}=(0,0,1)$,所以二面角 $M-BC-D$ 的余弦值 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\dfrac{2\sqrt{31}}{31}$

20.【点拨】(Ⅰ)设$|BF|=m$,推导出$(6-2m)^2+(3m)^2=(6-m)^2$,从而 $m=1$,进而 $AE\perp AF$. 由此能求出椭圆 C 的方程.

(Ⅱ)由条件可知 M、N 两点关于 x 轴对称,设 $M(x_1,y_1)$,$P(x_0,y_0)$,则 $N(x_1,-y_1)$,直线 PM 的方程为 $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$,令 $y=0$ 得点 R 的横坐标 $x_R=\dfrac{x_1y_0-x_0y_1}{y_0-y_1}$,同理可得点 S 的横坐标 $x_S=\dfrac{x_1y_0+x_0y_1}{y_0+y_1}$. 由此能证明$|OR|\cdot|OS|$为常数.

【解析】(Ⅰ)设$|BF|=m$,则$|AF|=2m$,$|BE|=6-m$,

$|AE|=6-2m$,$|AB|=3m$.

则有$(6-2m)^2+(3m)^2=(6-m)^2$,解得 $m=1$,

$\therefore |AF|=2$,$|BE|=5$,$|AE|=4$,$|AB|=3$,

$\therefore |AB|^2+|AE|^2=|BE|^2$,$\therefore AE\perp AF$.

于是,在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中,$|EF|^2=|AE|^2+|AF|^2=4^2+2^2=20$,

所以$|EF|=2\sqrt{5}$,所以 $b^2=9-(\sqrt{5})^2=4$,

椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(Ⅱ)证明:由条件可知 M、N 两点关于 x 轴对称,

设 $M(x_1,y_1)$,$P(x_0,y_0)$,则 $N(x_1,-y_1)$,

$\dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{4}=1$,$\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{4}=1$,

所以 $x_1^2=\dfrac{9}{4}(4-y_1^2)$,$x_0^2=\dfrac{9}{4}(4-y_0^2)$.

直线 PM 的方程为 $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$,

令 $y=0$ 得点 R 的横坐标 $x_R=\dfrac{x_1y_0-x_0y_1}{y_0-y_1}$,

同理可得点 S 的横坐标 $x_S=\dfrac{x_1y_0+x_0y_1}{y_0+y_1}$.

于是$|OR|\cdot|OS|=\left|\dfrac{x_1y_0-x_0y_1}{y_0-y_1}\cdot\dfrac{x_1y_0+x_0y_1}{y_0+y_1}\right|=\left|\dfrac{x_1^2y_0^2-x_0^2y_1^2}{y_0^2-y_1^2}\right|$

$=\left|\dfrac{1}{y_0^2-y_1^2}\cdot\left[\dfrac{9}{4}(4-y_1^2)y_0^2-\dfrac{9}{4}(4-y_0^2)y_1^2\right]\right|=\left|\dfrac{1}{y_0^2-y_1^2}\cdot 9(y_0^2-y_1^2)\right|=9$,

所以,$|OR|\cdot|OS|$为常数 9.

21.【点拨】(Ⅰ)令 $\phi(x)=e^x-1-x$,利用导数可得 $\phi(x)$在区间$(-1,0)$上为减函数,得到 $\phi(x)>\phi(0)=0$,即 $e^x>y=1+x$;令

$t(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$,由导数可得 $t(x)$在区间$(-1,0)$上为增函数,则 $t(x)<t(0)=0$,得 $e^x<1+x+\dfrac{x^2}{2}$,由此可得 $y=e^x$ 是 $y=1+x$ 和 $y=1+x+\dfrac{x^2}{2}$在$(-1,0)$上的一个“严格分界函数”;

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $h(x)=2e^x+\dfrac{1}{1+x}-2>2(1+x)+\dfrac{1}{1+x}-2\geqslant 2\sqrt{2}-2\approx 0.828$. $h(x)=2e^x+\dfrac{1}{1+x}-2<2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{1}{1+x}-2=x^2+2x+\dfrac{1}{1+x}$,令 $m(x)=x^2+2x+\dfrac{1}{1+x}=(x+1)^2+\dfrac{1}{1+x}-1$,求导可得 $m(x)$的最小值,再由导数求得 $h(x)$在 $x\in(-1,0)$上先减后增,可得 $h(x)$最小值的范围,由 $0.828<h(x)_{\min}<0.890$ 及 $h(x)>\dfrac{M}{10}$在 $x\in(-1,0)$恒成立可得 M 的值.

【解析】(Ⅰ)证明:令 $\phi(x)=e^x-1-x$,$\phi'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时,$\phi'(x)<0$,故 $\phi(x)$在区间$(-1,0)$上为减函数,

因此 $\phi(x)>\phi(0)=0$,故 $e^x>y=1+x$;

再令 $t(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$,当 $x<0$ 时,$t'(x)=e^x-1-x>0$,

故 $t(x)$在区间$(-1,0)$上为增函数,则 $t(x)<t(0)=0$,

$\therefore e^x<1+x+\dfrac{x^2}{2}$,故 $y=e^x$ 是 $y=1+x$ 和 $y=1+x+\dfrac{x^2}{2}$在$(-1,0)$上的一个“严格分界函数”;

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $h(x)=2e^x+\dfrac{1}{1+x}-2>2(1+x)+\dfrac{1}{1+x}-2\geqslant 2\sqrt{2}-2\approx 0.828$.

又 $h(x)=2e^x+\dfrac{1}{1+x}-2<2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{1}{1+x}-2=x^2+2x+\dfrac{1}{1+x}$,

令 $m(x)=x^2+2x+\dfrac{1}{1+x}=(x+1)^2+\dfrac{1}{1+x}-1$,$m'(x)=2(x$

$+1)-\dfrac{1}{(1+x)^2}$,

由 $m'(x)=0$, 解得 $x_0=-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, 可得 $m(x)$ 在 $\left(-1,-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$单调递减, 在 $\left(-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}},0\right)$单调递增,

则 $(m(x))_{\min}=m\left(-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}-1=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}-1\approx 0.890$.

又 $h'(x)=2e^x-\dfrac{1}{(1+x)^2}$,在 $x\in(-1,0)$ 上存在 x_0 使得 $h'(x_0)=0$,

故 $h(x)$ 在 $x\in(-1,0)$ 上先减后增,

则有 $h(x)_{\min}\leqslant h\left(-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)<m\left(-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\approx 0.890$,

则 $0.828<h(x)_{\min}<0.890$,

$\therefore h(x)_{\min}>\dfrac{M}{10}$,则 $M=8$.

22.**【点拨】**(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程先求出曲线 C 的直角坐标方程,由此能求出曲线 C 的极坐标方程.

(Ⅱ)先求出直线 l 的参数方程,与曲线 C 的直角坐标方程联立,得 $t^2+2(\cos\theta-\sin\theta)t-2=0$,由此能求出 AB 的弦长.

【解析】(Ⅰ)$\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=2+2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y=0$,

$\therefore$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\sin\theta=0$,

即曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(Ⅱ)设直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+t\cdot\cos\theta\\ y=1+t\cdot\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)①

曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2+y^2-4y=0$,②

①②联立,得 $t^2+2(\cos\theta-\sin\theta)t-2=0$,

$\therefore t_1t_2=-2$,且 $|MA|=2|NB|$,$\therefore t_1=-2t_2$,

则 $t_1=2,t_2=-1$ 或 $t_1=-2,t_2=1$,

$\therefore |AB$ 的弦长$|=|t_1-t_2|=3$.

23.**【点拨】**(Ⅰ)利用三角不等式证明:$f(x)\geqslant 2$;

(Ⅱ)$g(b)=\dfrac{|2b+1|-|1-b|}{|b|}\leqslant\dfrac{|2b+1-1+b|}{|b|}=3$,可得 $f(x)\geqslant 3$,即 $|x-1|+|x+1|\geqslant 3$,分类讨论,求 x 的取值范围.

【解析】(Ⅰ)证明:$f(x)=|x-1|+|x+1|=|1-x|+|x+1|\geqslant|1-x+x+1|=2$;

(Ⅱ)$g(b)=\dfrac{|2b+1|-|1-b|}{|b|}\leqslant\dfrac{|2b+1-1+b|}{|b|}=3$,

$\therefore f(x)\geqslant 3$,即 $|x-1|+|x+1|\geqslant 3$,

$x\leqslant -1$ 时,$-2x\geqslant 3$,

$\therefore x\leqslant -1.5$;

$-1<x\leqslant 1$ 时,$2\geqslant 3$ 不成立;

$x>1$ 时,$2x\geqslant 3$,$\therefore x\geqslant 1.5$

综上所述 $x\leqslant -1.5$ 或 $x\geqslant 1.5$.