2018全国高考模拟卷七

本试卷分为两卷，第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题，满分150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知i为虚数单位，$\bar{z}$是复数z的共轭复数，若$z=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$，则$\bar{z}^2=$　(　　)

A. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

C. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2. 已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant 1\right.\right\}$，$B=\{x\mid x^2-6x+8\leqslant 0\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$　(　　)

A. $\{x|x\leqslant 0\}$

B. $\{x|2\leqslant x\leqslant 4\}$

C. $\{x|0<x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 4\}$

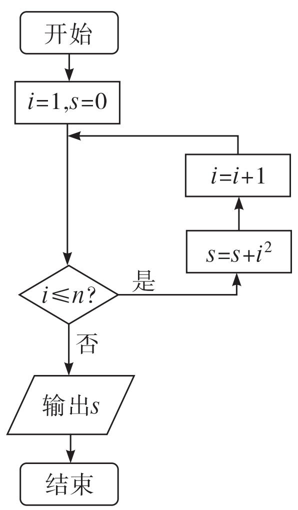
D. $\{x|0\leqslant x<2$ 或 $x>4\}$

3. 如果双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线为$y=\sqrt{5}x$，则双曲线的离心率为　(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{6}$

C. $\sqrt{5}$　　D. 4

4. 如图是求$1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$的值的程序框图，则正整数n为　(　　)



A. 50

B. 99

C. 100

D. 101

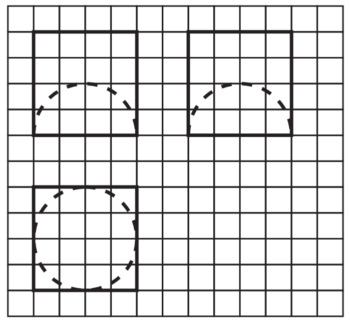
5. 已知等比数列$\{a_n\}$中，公比$q>1$，且$a_1+a_6=8$，$a_3a_4=12$，则$\frac{a_{2017}}{a_{2007}}=$　(　　)

A. 3　　B. 6　　C. 8　　D. 9

6. 已知x,y满足约束条件$\begin{cases}x-2\leqslant 0,\\ y-2\leqslant 0,\\ x+y-2\geqslant 0,\end{cases}$则$z=2x+y$的取值范围是　(　　)

A. $[2,4]$　　B. $[4,6]$　　C. $[2,6]$　　D. $(-\infty,2]$

7. 如图，图中每个小正方形的边长为1，某几何体的三视图如图所示.则这个几何体的表面积是　(　　)



A. $80+16\pi$

B. $96+4\pi$

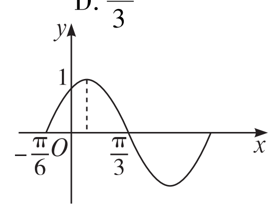
C. $80+8\pi$

D. $96+8\pi$

8. “石头、剪刀、布”，又称“猜丁壳”，是一种流传多年的猜拳游戏.起源于中国，然后传到日本、朝鲜等地，随着亚欧贸易的不断发展它传到了欧洲，到了近现代逐渐风靡世界.其游戏规则是：出拳之前双方齐喊口令，然后在话音刚落时同时出拳，握紧的拳头代表“石头”，食指和中指伸出代表“剪刀”，五指伸开代表“布”.“石头”胜“剪刀”，“剪刀”胜“布”，而“布”又胜过“石头”，若所出的拳相同，则为和局.小明和大黄两位同学进行“石头、剪刀、布”游戏比赛，假设他们两人每次都随机出石头、剪刀、布中的某一个，则猜拳2次，大黄全部战胜小明的概率为　(　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

9. 函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，如果$m,n\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，且$f(m)=f(n)$，则$f(m+n)$等于　(　　)



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

10. 已知三棱锥$M-ABC$的顶点都在同一个球O的表面上，且$MA=1$，$MB=\sqrt{2}$，$MC=\sqrt{3}$，当三棱锥$M-ABC$的三个侧面面积之和最大时，三棱锥$M-ABC$与球O的体积之比为　(　　)

A. $\frac{1}{6\pi}$　　B. $\frac{1}{3\pi}$　　C. $\frac{1}{2\pi}$　　D. $\frac{1}{\pi}$

11. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.若$4a_5+3a_6=16$，则$a_1+a_2+\cdots+a_9=$　(　　)

A. 16　　B. 28　　C. 32　　D. 48

12. 设函数$f(x)=\mathrm{e}^x(3x-1)-ax+a$，其中$a<1$，若有且只有一个整数$x_0$使得$f(x_0)\leqslant 0$，则$a$的取值范围是　(　　)

A. $\left(\frac{2}{\mathrm{e}},\frac{3}{4}\right)$　B. $\left[\frac{2}{\mathrm{e}},\frac{3}{4}\right)$　C. $\left(\frac{2}{\mathrm{e}},1\right)$　D. $\left[\frac{2}{\mathrm{e}},1\right)$

第Ⅱ卷(非选择题　共90分)

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13. 已知平面向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$，且$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，若$(m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则$m=$________.

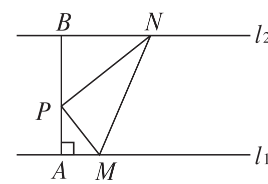
14. 已知$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，则$a_1+a_2+\cdots+a_7=$________.

15. 已知点P到y轴的距离比它到点$(2,0)$的距离小2，则点P的轨迹方程是____________.

16. 已知函数$y=f(x)$，当$x\geqslant 0$时，$f(x)=\mathrm{e}^x$，当$x<0$时，$f(-x)=af(x)(a>0)$.当任意实数$m\in\left(\frac{1}{3},1\right)$，函数$g(x)=f(x)-mx-m$均有唯一零点，则$a$的取值范围是________.

三、解答题(本大题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分12分)

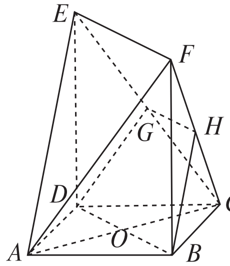


如图，P是两条平行直线l_1,l_2之间的一个定点，且点P到l_1,l_2的距离分别为$PA=1$，$PB=\sqrt{3}$.设$\triangle PMN$的另两个顶点M,N分别在l_1,l_2上运动，设$\angle MPN=\alpha$，$\angle PMN=\beta$，$\angle PNM=\gamma$，且满足$\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha(\cos\beta+\cos\gamma)$

(Ⅰ)求α；

(Ⅱ)求$\frac{1}{PM}+\frac{\sqrt{3}}{PN}$的最大值.

18. (本小题满分12分)



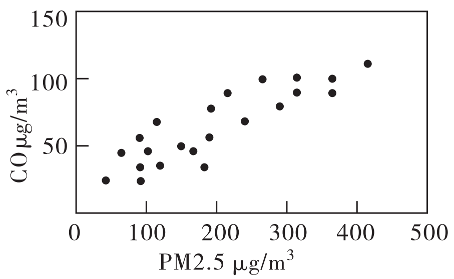
如图，在多面体$ABCDEF$中，底面$ABCD$是边长为1的正方形，四边形$BDEF$是矩形，且$BF=2$，$CF=\sqrt{5}$，G和H分别是CE和CF的中点.

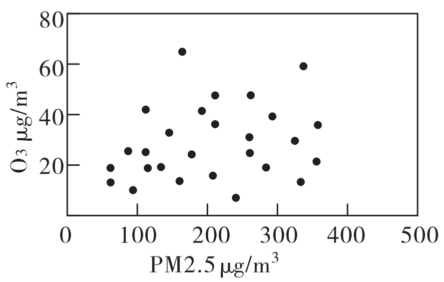
(Ⅰ)求证：平面$ABCD\perp$平面$BDEF$；

(Ⅱ)求二面角$B-GH-E$的余弦值.

19.（本小题满分 12 分）

专家研究表明，PM2.5 是霾的主要成分，在研究 PM2.5 形成原因时，某研究人员研究了 PM2.5 与燃烧排放的 CO_2、NO_2、CO、O_3、PM_{10} 等物质的相关关系. 下图是 PM2.5 与 CO 和 O_3 相关性的散点图.





（Ⅰ）根据上面散点图，请你就 CO、O_3 对 PM2.5 的影响关系做出初步评价；

（Ⅱ）以 100μg/m³ 为单位，在上述左图中取三个点，如下表所示：

PM2.5μg/m³(x)	1	2	4
COμg/m³(y)	0.5	1	1.5

求 $\hat{y}$ 关于 $\hat{y}$ 的回归方程，并估计当 CO 排放量是 200 μg/m³时，PM2.5 的值.

（用最小二乘法求回归方程的系数是 $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$a=\bar{y}-b\bar{x}$）；

（Ⅲ）我们知道雾霾对交通影响较大. H 市交通部门发现，在一个月内，当 CO 排放量分别是 60，120，180 时，某路口的交通流量（单位：万辆）依次是 800，600，200，而在一个月内，CO 排放量是 60，120，180 的概率依次是 $p,\dfrac{q}{2},q\left(\dfrac{1}{2}<p<1\right)$，求该路口一个月的交通流量期望值的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C 的中心在坐标原点，F 是椭圆在 y 轴正半轴上的一个焦点，其短轴长为 $2\sqrt{2}$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 F 分别作斜率为 k_1,k_2 的直线交椭圆 C 得到弦 AB，CD，它们的中点分别是 M，N. 当 $k_1k_2=1$ 时，求证：直线 MN 过定点.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+a}(x\geqslant 0)$

（Ⅰ）当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）证明：当 $x>0$ 是 $(e^x-1)\ln(x+1)+e^x>x^2+x+1$（e 为自然对数的底数）.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系和参数方程

在直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，已知曲线 C_1 $\begin{cases}x=-4+\cos t\\ y=3+\sin t\end{cases}$（$t$ 为参数），C_2：$\begin{cases}x=8\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

（Ⅰ）求 C_1，C_2 的普通方程，并说明它们分别表示什么曲线；

（Ⅱ）若 C_1 上的点 P 对应的参数 $t=\dfrac{\pi}{2}$，Q 为 C_2 上的动点，求线段 PQ 中点 M 到直线 C_3：$\rho(\cos\theta-2\sin\theta)=7$ 距离的最小值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知 m，n 都是实数，$m\neq 0$，$f(x)=|x-1|+|x-2|$.

（Ⅰ）若 $f(x)>2$，求实数 x 的取值范围；

（Ⅱ）若 $|m+n|+|m-n|\geqslant|m|f(x)$ 对满足条件的所有 m，n 都成立，求实数 x 的取值范围.

2018全国高考模拟卷七

1. B 【点拨】本题考查复数的代数运算.

【解析】$z=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$\bar{z}^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$

2. D 【点拨】本题考查集合的运算

【解析】全集 $U=\mathbf{R}, A=\{x\mid\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant1\}=\{x\mid x\geqslant0\}$

$B=\{x\mid x^2-6x+8\leqslant0\}=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant4\}$

$\complement_U B=\{x\mid x<2$ 或 $x>4\}$

$A\cap(\complement_U B)=\{x\mid 0\leqslant x<2$ 或 $x>4\}$

3. B 【点拨】本题考查根据双曲线方程求离心率.

【解析】双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线为

$y=\sqrt{5}x.$

$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{5}\quad b=\sqrt{5}a$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6a^2}}{a}=\sqrt{6}$

4. C 【点拨】本题考查程序框图和循环语句.

【解析】本题利用当型循环求 $1^2+2^2+\cdots+100^2$.

i 的最大值是 100 $\quad i\leqslant n$

$\therefore n=100.$

5. D 【点拨】本题考查等比数列基本量的计算.

【解析】等比数列$\{a_n\}$中,公比 $q>1, a_1+a_6=8, a_3a_4=12$.

$\therefore \begin{cases}a_1+a_6=8\\a_3a_4=a_1a_6=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2\\a_6=6\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=6\\a_6=2\end{cases}$

$\because q>1. \therefore \begin{cases}a_1=2\\a_6=6\end{cases}\quad q^{6-1}=\frac{a_6}{a_1}=3, q^5=3$

$\frac{a_{2017}}{a_{2007}}=q^{10}=3^2=9.$

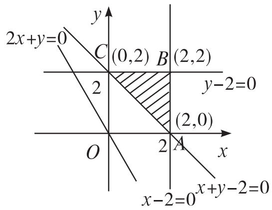
6. C 【点拨】本题考查直线线性规划相关计算.

【解析】画出可行域如图,直线 l_1:$2x+y=0$.

当 l 过 $B(2,2)$ 时，$z_{\max}=2\times2+2=6$

当 l 过 $C(0,2)$ 时，$z_{\min}=2\times0+2=2$.

$\therefore z=2x+y$ 的取值范围是 $[2,6]$.



7. B 【点拨】本题考查简单组合体的表面积及空间几何体的三视图.

【解析】由三视图知，该几何体是一个棱长为 4 个正方体挖去一个半径为 2 的半球，其表面积为 $S_{表}=6\times4^2+2\pi r^2-\pi r^2=6\times4^2+\pi\times2^2=96+4\pi$.

8. A 【点拨】本题考查古典概型及相互独立事件同时发生的概率.

【解析】在一局比赛中，小明大黄双方所有出拳方式如下表

大黄 / 小明	石头	剪子	布
石头	（石头、石头）	（石头、剪子）	（石头、布）
剪子	（剪子、石头）	（剪子、剪子）	（剪子、布）
布	（布、石头）	（布、剪子）	（布、布）

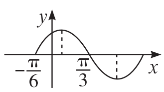
共 9 种，其中大黄取胜的出拳方式只有（石头、布）（剪子、石头）（布、剪子）3 种.

$\therefore$ 一局比赛中大黄取胜的概率为 $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$.

由于两局比赛结果相互独立.

$\therefore$ 两局比赛中大黄全部战胜小明的概率为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$.

9. C 【点拨】本题考查正弦型函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象性质及相关计算



【解析】$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示

$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\left(\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\pi$,

$\therefore \omega=2$,

$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)$

又 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$

$\therefore \dfrac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi, k\in\mathbf{Z}$

$\varphi=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{3}$

$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

由图象可以看出，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 时，图象的对称轴为 $x=\dfrac{\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{\pi}{12}$.

$m、n\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$，$f(m)=f(n)$

则 m,n 关于 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 对称.

$\therefore m+n=\dfrac{\pi}{6}$.

$f(m+n)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

10. A 【点拨】本题考察三棱锥和外接球的体积计算

【解析】三棱锥 $M-ABC$ 的顶点都在同一个球 O 的表面上，且 $MA=1,MB=\sqrt{2},MC=\sqrt{3}$，当且仅当 $MA、MB,MC$ 两两垂直时，三棱锥 $M-ABC$ 的三个侧面面积之和最大，此时，球心 O 恰好是底面 $\triangle ABC$ 的外心，球 O 的半径

$r=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$V_{M-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$V_{球O}=\dfrac{4}{3}\times\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$

$\dfrac{V_{M-ABC}}{V_{球O}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{6}\pi}=\dfrac{1}{6\pi}$

11. C 【点拨】本题考查递推数列的前 n 项和的求法，特别是构造类似于斐波那契数列的数列.

【解析】解法一

$\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\quad n\in\mathbf{N}^*$

可猜想 $\{a_n\}$ 类似于斐波那契数列 $\{b_n\}$.

$\{b_n\}$ 前 9 项分别为 1、1、2、3、5、8、13、21、34

$\{b_n\}$ 的前 9 项之和为 $s_9=1+1+2+3+5+8+13+21+34=88$.

$4b_5+3b_6=4\times5+3\times8=44$

而 $4a_5+3a_6=16$.

$\dfrac{4a_5+3a_6}{4b_5+3b_6}=\dfrac{16}{44}=\dfrac{4}{11}$

$\therefore a_n=\dfrac{4}{11}b_n$.

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_9=\dfrac{4}{11}(b_1+b_2+\cdots+b_9)=\dfrac{4}{11}\times88=32$.

解法二

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\quad n\in\mathbf{N}^*\quad 4a_5+3a_6=16$

$a_3=a_1+a_2$

$a_4=a_2+a_3=a_1+2a_2$

$a_5=a_3+a_4=2a_1+3a_2$

$a_6=a_4+a_5=3a_1+5a_2$

$a_7=a_5+a_6=5a_1+8a_2$

$a_8=a_6+a_7=8a_1+13a_2$

$a_9=a_7+a_8=13a_1+21a_2$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$

$=(1+1+1+2+3+5+8+13)a_1+(1+1+2+3+5+8+13+21)a_2=34a_1+54a_2$

$4a_5+3a_6=4(2a_1+3a_2)+3(3a_1+5a_2)$

$=17a_1+27a_2=16$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_9=34a_1+54a_2=2(17a_1+27a_2)=2\times16=32$

12. C 【点拨】设 $g(x)=e^x(3x-1),h(x)=ax-a$，对 $g(x)$ 求导，将问题转化为存在唯一的整数 x_0 使得 $g(x_0)$ 在直线 $h(x)=ax-a$ 的下方，求导数可得函数的极值，解 $g(-1)-h(-1)=-4e^{-1}+2a\geqslant0$，求得 a 的取值范围.

【解析】设 $g(x)=e^x(3x-1),h(x)=ax-a$,

则 $g'(x)=e^x(3x+2)$,

$\therefore x\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$x\in\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore x=-\dfrac{2}{3}$，取最小值 $-3e^{-\frac{2}{3}}$,

$\therefore g(0)=-1<-a=h(0)$,

$g(1)-h(1)=2e>0$,

直线 $h(x)=ax-a$ 恒过定点 $(1,0)$ 且斜率为 a,

$\therefore g(-1)-h(-1)=-4e^{-1}+2a>0$,

$\therefore a>\dfrac{2}{e}, a<1$,

$\therefore a$ 的取值范围 $\left(\dfrac{2}{e},1\right)$.

13. 1 【点拨】本题考查平面向量的数量积及向量垂直的充要条件.

□□□□a,b 夹角角 $\theta=120°$,$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=4$

$(m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}=0$

$\therefore(m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$

$m\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

$m|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$

$4m+2\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

$\therefore m=1$

14. -2 □□□□本题考查二项展开式各项系数和,可用赋特殊值法

□□□□$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$

$=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$

令 $x=1$ 则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=(1-2)^7=-1$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_7=(a_0+a_1+\cdots+a_7)-a_0=-1-1=-2.$

15. $y=0\quad(x<0)$ 和 $y^2=8x(x\geqslant0)$

□□□□本题考查根据条件求动点的轨迹方程

□□□□设 $P(x,y)$,则 P 到 y 轴的距离为 $|x|$.

P 到 $(2,0)$ 的距离为 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

P 点的轨迹方程满足 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-|x|=2$

$(x-2)^2+y^2=(|x|+2)^2$

$y^2=4x+4|x|$.

当 $x\geqslant0$ 时,方程为 $y^2=8x$.

当 $x<0$ 时,方程为 $y=0$.

16. $[3,+\infty)$ □□□□本题考查分段函数解析式的求法,利用数形结合思想解决方程的根与函数零点及参数范围的确定.

□□□□$y=f(x)$ 当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=\mathrm{e}^x$.

当 $x<0$ 时,$f(-x)=af(x)(a>0)$

即 $x<0$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{a}f(-x)=\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-x}$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & x\geqslant0\\ \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-x} & x<0\end{cases}$

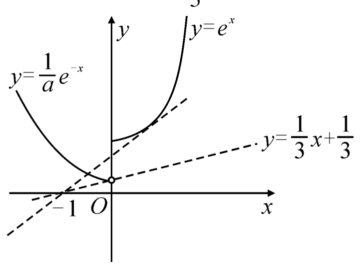
当 $m\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$时

$g(x)=f(x)-mx-m$ 有唯一零点.

即 $f(x)=mx+m$ 有唯一解.

即 $y=f(x)$ 的图象与 $y=mx+m$ 的图象只有一个交点.

分别画出 $y=f(x)$ 的图象和 $m=\dfrac{1}{3}$,$m=1$ 时 $y=mx+m$ 的图象



如图所示. 直线 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$与 y 轴交点为 $A\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

曲线 $y=\dfrac{1}{a}e^{-x}$与 y 轴的交点为 $B\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$

当且仅当 B 与 A 重合或 B 在 A 下方时

$g(x)=f(x)-mx-m$ 均有唯一零点

此时$\dfrac{1}{a}\leqslant\dfrac{1}{3}(a>0)$ 解得 $a\geqslant3$

$\therefore a$ 的取值范围为 $a\in[3,+\infty)$.

17. □□□□(Ⅰ)本题主要考查利用正弦定理余弦定理解三角形的问题.

(Ⅱ)本题主要考查把几何量表示成三角函数式进而求最值的问题.

□□□□(Ⅰ)设 $MN=p$,$PN=m$,$PM=n$,由正弦定理和余弦定理得 $m+n=p\left(\dfrac{p^2+n^2-m^2}{2pn}+\dfrac{p^2+m^2-n^2}{2pm}\right)$

化简整理得 $m^2+n^2=p^2$. 由勾股定理逆定理得 $\alpha=90°$.

(Ⅱ)设 $\angle PMA=\theta,0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle APM$ 中,$PM\cdot\sin\theta=PA$,即 $PM=\dfrac{1}{\sin\theta}$,

由(1)知 $\angle MPN=\dfrac{\pi}{2}$,故 $\angle BPN=\theta$,

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle BPN$ 中,$PN\cdot\cos\theta=PB$,则 $PN=\dfrac{\sqrt3}{\cos\theta}$,

所以$\dfrac{1}{PM}+\dfrac{\sqrt3}{PN}=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$,

所以当 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时,$\dfrac{1}{PM}+\dfrac{\sqrt3}{PN}$的最大值为$\sqrt2$.

18. □□□□(Ⅰ)本题考查根据已知条件证明平面与平面垂直的方法

(Ⅱ)本题考查根据已知条件计算二面角的余弦值,可用传统几何方法,也可用向量法.

□□□□(Ⅰ)由题意得,$BC=1$,$BF=2$,$CF=\sqrt5$,

$BC^2+BF^2=CF^2$,所以 $BF\perp BC$,

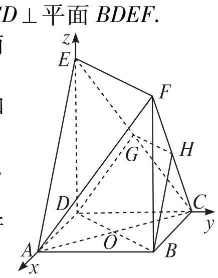
又四边形 $BDEF$ 是矩形,所以 $BF\perp BD$,$BD\cap BC=B$,

从而 $BF\perp$平面 $ABCD$.

又因为 $BF\subset$平面 $BDEF$,所以平面 $ABCD\perp$平面 $BDEF$.

(Ⅱ)由题意及(Ⅰ)知,DA,DC,DE 两两垂直,

分别以 DA,DC,DE 为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则可得 $D(0,0,0)$,$C(0,1,0)$,$B(1,1,0)$,$E(0,0,2)$,$F(1,1,2)$,

又 G 和 H 分别是 CE 和 CF 的中点,所以 $G\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$,$H\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$,

所以$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{DG}=\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{CE}=(0,-1,2)$,

$\overrightarrow{CF}=(1,0,2)$,

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 $BDGH$ 的一个法向量,则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DG}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}x+y=0\\ \dfrac{1}{2}y+z=0\end{cases}$,可取 $y=-2$,得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$是平面 CEF 的一个法向量,则

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}$,同理可得 $\boldsymbol{m}=(-2,2,1)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-4-4+1}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{4+4+1}}=-\dfrac{7}{9}$,

又二面角 $B-GH-E$ 为钝二面角.

所以二面角 $B-GH-E$ 的余弦值为 $-\dfrac{7}{9}$.

19. □□□□(Ⅰ)本题主要考查根据散点图判断两个变量的相关关系.

(Ⅱ)本题主要考查利用最小二乘法求 $\hat y$ 关于 $\hat x$ 的回归方程,并求值.

(Ⅲ)本题主要考查根据已知条件列出随机变量的分布列,并求随机变量的期望值的最值范围.

□□□□(Ⅰ)CO 对 PM2.5 有正相关关系,而 O_3 对 PM2.5 没有相关关系.

(Ⅱ)$b=\dfrac{9}{28}$,$a=\dfrac{1}{4}$,$\hat y=\dfrac{9}{28}\hat x+\dfrac{1}{4}$,当 CO 为 200 时,即 $\hat y=2$ 时,$\dfrac{9}{28}\hat x+\dfrac{1}{4}=2$,

所以 $\hat x=\dfrac{49}{9}$,即 PM2.5 $=\dfrac{49}{9}\times100=\dfrac{4900}{9}\approx544\ \mu g/m^3$.

(说明:本小题的结果可以用分数或者小数表示)

(Ⅲ)设交通流量是 X,则得如下分布列:

交通流量 X	800	600	200
P	p	$\frac{1}{2}q$	q

因为$\begin{cases} p+\frac{q}{2}+q=1 \\ \frac{1}{2}<p<1 \end{cases}$，所以 $EX=800\times p+600\times\frac{1}{2}q+200\times q$

$=\frac{1400}{3}p+\frac{1000}{3}\in\left(\frac{1700}{3},800\right)$，

即 $566.7<E(X)<800$，即交通流量期望值在 566.7 万辆到 800 万辆之间.

（说明：本题的取值范围的值可以用分数或者小数表示）

20.【点拨】（Ⅰ）本题考查根据已知条件确定椭圆的方程

（Ⅱ）本题考查直线与椭圆位置关系问题，并考查证明直线过定点的方法.

【解析】（Ⅰ）设椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意可得 $b=\sqrt{2}$，而$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $a=\sqrt{3}$，

于是，椭圆 C 的方程为$\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$.

（Ⅱ）记 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，有

$2y_1^2+3x_1^2=6$ ①

$2y_2^2+3x_2^2=6$ ②

①－②得：$2(y_1^2-y_2^2)+3(x_1^2-x_2^2)=0$

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{x_3}{y_3}=k_1$ ③

另一方面，$\frac{y_3-1}{x_3}=k_1$ ④

联立③④得$\begin{cases} x_3=\frac{-2k_1}{2k_1^2+3} \\ y_3=\frac{3}{2k_1^2+3} \end{cases}$，即 $M\left(\frac{-2k_1}{2k_1^2+3},\frac{3}{2k_1^2+3}\right)$.

同理，得 $N\left(\frac{-2k_2}{2k_2^2+3},\frac{3}{2k_2^2+3}\right)$，注意到 $k_1k_2=1$，

故 $N\left(\frac{-2k_1}{3k_1^2+2},\frac{3k_1^2}{3k_1^2+2}\right)$.

容易知道 $k_1^2\neq1$，若不然，$k_1=1$ 时，注意到 $k_1k_2=1$，故 $k_1=k_2=1$，这不可能；同理，$k_1\neq-1$.

于是，直线 MN 的斜率

$$k=\frac{\frac{3k_1^2}{3k_1^2+2}-\frac{3}{2k_1^2+3}}{\frac{-2k_1}{3k_1^2+2}-\frac{-2k_1}{2k_1^2+3}}=\frac{3k_1^2(2k_1^2+3)-3(3k_1^2+2)}{-2k_1(2k_1^2+3)+2k_1(3k_1^2+2)}=\frac{6k_1^4-6}{2k_1^3-2k_1}=\frac{3(k_1^2+1)}{k_1}.$$

于是，直线 MN 的方程为 $y-\frac{3}{2k_1^2+3}=\frac{3(k_1^2+1)}{k_1}\left(x+\frac{2k_1}{2k_1^2+3}\right)$，即 $y=\frac{3(k_1^2+1)}{k_1}x+3$，

所以，直线 MN 过点 $(0,3)$.

21.【点拨】（Ⅰ）本题考查利用导数法求函数单调区间的方法

（Ⅱ）本题考查利用导数法证明不等式的方法.

【解析】（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{a(x+a)-ax}{(x+a)^2}=\frac{x(x+2a-a^2)}{(x+1)(x+a)^2}$，

当 $0\leqslant a\leqslant2$ 时，$2a-a^2\geqslant0$，故 $f'(x)\geqslant0$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $[0,+\infty)$，无单调减区间.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，特别当 $a=2$ 时，

$\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$，

下证$\frac{2x}{x+2}>\frac{x^2}{e^x-1}$，即证 $e^x>\frac{1}{2}x^2+x+1$.

设函数 $g(x)=e^x-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)$，则 $g'(x)=e^x-(x+1)$，

设 $h(x)=e^x-(x+1)$，

$h'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$e^x>1$，即 $h'(x)=e^x-1>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

从而 $h(x)=e^x-(x+1)>h(0)=0$ ①

所以 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)=e^x-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，从而 $g(x)>g(0)=0$

所以 $e^x>\frac{1}{2}x^2+x+1$，即$\frac{2x}{x+2}>\frac{x^2}{e^x-1}$，

所以 $\ln(x+1)>\frac{x^2}{e^x-1}$，即 $(e^x-1)\ln(x+1)>x^2$.

又由上面证法中①可知，$e^x>x+1$.

由不等式的性质知，$(e^x-1)\ln(x+1)+e^x>x^2+x+1$.

22.【点拨】（Ⅰ）本题考查参数方程与普通方程的互化，根据方程判断曲线形状

（Ⅱ）本题考查极坐标方程与普通方程的互化，动点到定直线距离的最小值求法.

【解析】（Ⅰ）$C_1:(x+4)^2+(y-3)^2=1$，$C_2:\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$，

C_1 圆心为 $(-4,3)$，半径是 1 的圆，C_2 为中心是坐标原点焦点在 x 轴上，长轴为 8 短轴为 3 的椭圆.

（Ⅱ）当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$P(-4,4)$，$Q(8\cos\theta,3\sin\theta)$，故 $M\left(-2+4\cos\theta,2+\frac{3}{2}\sin\theta\right)$，

C_3 为直线 $x-2y-7=0$，M 到 C_3 的距离 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta-3\sin\theta-13|=\frac{\sqrt{5}}{5}|5\cos(\theta+\varphi)-13|$.

其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$，当 $\cos(\theta+\varphi)=1$ 时，d 取得最小值$\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

23.【点拨】（Ⅰ）本题考查含绝对值的不等式的解法.

（Ⅱ）本题考查恒成立问题中求参数的取值范围.

【解析】（Ⅰ）$f(x)=\begin{cases} 3-2x,x\leqslant1, \\ 1,1<x\leqslant2, \\ 2x-3,x>2, \end{cases}$ 由 $f(x)>2$ 得

$\begin{cases} 3-2x>2 \\ x\leqslant1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>2 \\ 2x-3>2 \end{cases}$，

解得 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>\frac{5}{2}$.

故所求实数 x 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

（Ⅱ）由 $|m+n|+|m-n|\geqslant|m|f(x)$ 且 $m\neq0$ 得 $\frac{|m+n|+|m-n|}{|m|}\geqslant f(x)$，

又∵ $\frac{|m+n|+|m-n|}{|m|}\geqslant\frac{|m+n+m-n|}{|m|}=2$，

∴ $f(x)\leqslant2$，

∵ $f(x)>2$ 的解集是 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$，

∴ $f(x)\leqslant2$ 的解集是 $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$.

∴ 所求实数 x 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$.