焦作市普通高中2019—2020学年(上)高二年级期末学业水平测试

数学(文科)

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\dfrac{x}{x+2}\leqslant 0\right.\right\}$,则集合 A 子集的个数为

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 8

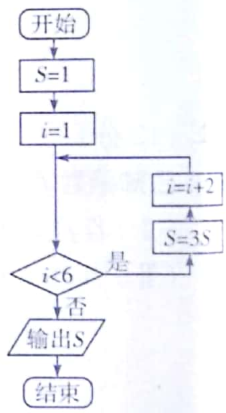
2. 设命题 p:$\forall x\geqslant 1,5x+1\geqslant 6$,则 $\neg p$ 为

A. $\exists x<1,5x+1<6$　　B. $\forall x\geqslant 1,5x+1<6$

C. $\forall x<1,5x+1\geqslant 6$　　D. $\exists x\geqslant 1,5x+1<6$

3. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,已知 $S_3=3,S_2=1$,则 $S_5=$

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. 5　　C. 10　　D. 20



4. 执行如图所示的算法流程图,则输出的 S 的值为

A. 9　　B. 27　　C. 81　　D. 729

5. 某公司有240名员工,编号依次为001,002,…,240,现采用系统抽样方法抽取一个容量为30的样本,且随机抽得的编号为004.若这240名员工中编号为001~100的在研发部,编号为101~210的在销售部,编号为211~240的在后勤部,则这三个部门被抽中的员工人数依次为

A. 12,14,4　　B. 13,14,3　　C. 13,13,4　　D. 12,15,3

6. 在区间 (a,b) 上,初等函数 $f(x)$ 存在极大值是其存在最大值的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

7. 已知函数$f(x)=2^x+\sin\frac{\pi x}{2}+k$,若函数$f(x)$在$(-1,1)$上存在零点,则实数$k$的取值范围是

A. $(-2,2)$　　B. $(-1,2)$　　C. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

8. 已知在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,P,Q分别为A_1B_1,CC_1的中点,则异面直线B_1C和PQ所成的角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

9. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$与圆$x^2+y^2=4$恰好有2个不同的公共点,$F$是双曲线$C$的右焦点,过点$F$的直线与圆$x^2+y^2=4$切于点$A$,则$A$到$C$左焦点的距离为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{17}$

10. 在$\triangle ABC$中,D是线段AB上靠近B的三等分点,E是线段AC的中点,BE与CD交于F点.若$\overrightarrow{AF}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$,则$a$,$b$的值分别为

A. $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4},\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3},\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

11. 欲制作一个容积为V的圆柱形蓄水罐(无盖),为能使所用的材料最省,它的底面半径应为

A. $\frac{V}{\pi}$　　B. $\sqrt{\frac{V}{\pi}}$　　C. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$　　D. $\sqrt[4]{\frac{V}{\pi}}$

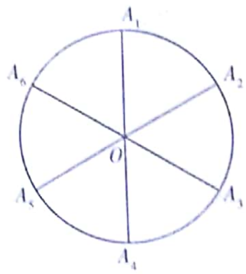
12. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$和坐标原点$O$是某正方形的两个顶点,若该正方形至少有一个顶点在椭圆C上,则椭圆C的离心率不可能为

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $\cos 570°$的值为__________.

14. 如图,将一个圆周进行6等分,得到分点A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6.现在从OA_2,OA_3,OA_4,OA_5,OA_6这5个半径中任意取1个,若$\angle A_1OA_i\in[0,\pi](i=2,3,4,5,6)$,则$\sin\angle A_1OA_i=\frac{\sqrt{3}}{2}$的概率为__________.



15. 已知函数$f(x)=x^2-4x-4$,若$f(x)<1$在区间$(m-1,-2m)$上恒成立,则实数m的取值范围是__________.

16. 已知直线$x-y+b=0$与曲线$y=x^2-\ln x$和曲线$y=ax^2+9x+a-6$均相切,则$a=$__________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

设函数 $f(x)=x^2+bx(b\in \mathbf{Z})$，不等式 $f(x)<0$ 的解集中恰有两个正整数.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若 $m>1$，不等式 $f(x)\leqslant m$ 在 $x\in[1,m]$ 时恒成立，求实数 m 的取值范围.

18.（12 分）

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_n=\frac{1}{4}-a_n(n\in \mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\log_2 a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求满足 $T_n\leqslant -25$ 的 n 的最小值.

19.（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\frac{\sin A}{a}+\frac{\sqrt{3}\cos B}{b}=0$.

（Ⅰ）求 B 的大小；

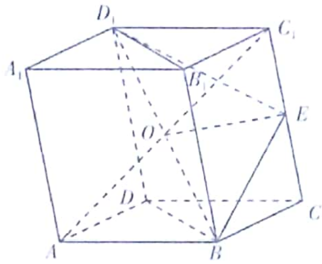
（Ⅱ）若 $b=3$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

20.（12分）

如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为菱形，AC_1和BD_1相交于点O，E为CC_1的中点.

（Ⅰ）求证：$OE /\!/$平面$ABCD$；

（Ⅱ）若平面$BDD_1B_1\perp$平面$ABCD$，求证：$D_1E=BE$.

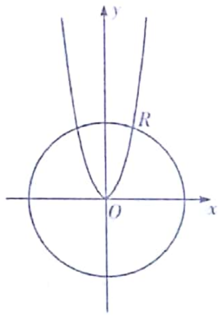


21.（12分）

如图，在平面直角坐标系xOy中，抛物线$C:x^2=2py(p>0)$与圆O的一个交点为$R\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$.

（Ⅰ）求抛物线C及圆O的方程；

（Ⅱ）设直线l与圆O相切于点R，与抛物线C交于A,R两点，求$\triangle OAR$的面积.



22.（12分）

已知函数$f(x)=(x^2+ax)\ln x, a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若$f(x)$的图像在$x=1$处的切线经过点$(0,-2)$，求a的值；

（Ⅱ）当$1<x<e^2$时，不等式$f(x)<x^2$恒成立，求a的取值范围.

焦作市普通高中2019—2020学年(上)高二年级期末学业水平测试

数学(文科)·答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.

1.【答案】 B

【命题意图】 本题考查集合的概念.

【解析】 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\dfrac{x}{x+2}\leqslant 0\right.\right\}=\{-1,0\}$,则集合$A$子集的个数为4.

2.【答案】 D

【命题意图】 本题考查全称命题的否定.

【解析】 全称命题“$\forall x\in M,p(x)$”的否定为“$\exists x\in M,\neg p(x)$”.

3.【答案】 C

【命题意图】 本题考查S_n与a_n的关系、等差数列的定义.

【解析】 依题意,得$S_3-S_2=a_3=2$,则$S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=\dfrac{5\times 2a_3}{2}=10$.

4.【答案】 B

【命题意图】 本题考查算法流程图.

【解析】 $S=1,i=1;S=3,i=3;S=9,i=5;S=27,i=7$时退出循环,所以输出的$S$的值为27.

5.【答案】 C

【命题意图】 本题考查系统抽样的概念以及等差数列的应用.

【解析】 依题意可知,被抽中的员工编号构成以4为首项,以8为公差的等差数列,通项为$8k-4(k=1,2,\cdots,30)$.由$8k-4\leqslant 100$,得$k\leqslant 13(k\in\mathbf{N}^*)$,由$101\leqslant 8k-4\leqslant 210$,得$14\leqslant k\leqslant 26(k\in\mathbf{N}^*)$,所以被抽中的员工研发部有13人,销售部有13人,后勤部有4人.

6.【答案】 B

【命题意图】 本题考查充要条件的判断以及函数的性质.

【解析】 初等函数$f(x)$在区间(a,b)存在极大值推不出其在区间(a,b)存在最大值,所以不充分;若初等函数$f(x)$在区间(a,b)存在最大值,则其在区间(a,b)必存在极大值,所以是必要的.

7.【答案】 C

【命题意图】 本题考查零点存在定理.

【解析】 因为$f(x)=2^x+\sin\dfrac{\pi x}{2}+k$在$(-1,1)$上单调递增,所以由零点存在定理得,函数$f(x)$在$(-1,1)$存在零点等价于$\begin{cases}f(-1)=k-\dfrac{1}{2}<0,\\ f(1)=k+3>0,\end{cases}$解得$-3<k<\dfrac{1}{2}$.所以实数$k$的取值范围是$\left(-3,\dfrac{1}{2}\right)$.

8.【答案】 A

【命题意图】 本题考查异面直线所成的角.

【解析】 取C_1B_1的中点为R,连接PR,QR.因为Q为CC_1的中点,所以$RQ/\!/B_1C$,所以异面直线B_1C和PQ所成角为$\angle PQR$或其补角.设正方体的棱长为2,经过计算可得,$PR=RQ=\sqrt{2}$,$PQ=\sqrt{6}$,所以$\cos\angle PQR=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.所以$\angle PQR=\dfrac{\pi}{6}$.

9.【答案】 D

【命题意图】 本题考查双曲线的方程和性质、直线与圆锥曲线的位置关系.

【解析】 因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 恰好有 2 个不同的公共点,所以 $a^2=4$. 因为过 F 点的直线与圆 $x^2+y^2=4$ 切于 A 点,所以 $|AF|=1$. 过 A 作 $AB\perp x$ 轴于 B,则 $|AB|=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $|OB|=\frac{4}{\sqrt{5}}$(O 为坐标原点),所以 A 到左焦点的距离为 $\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{17}$.

10.【答案】 A

【命题意图】 本题考查平面向量的线性运算.

【解析】 取 AD 的中点为 G,连接 GE. 由已知得,$GE/\!/CD$,所以 $DF/\!/EG$,又因为 D 是 GB 的中点,所以 F 是 BE 的中点,所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

11.【答案】 C

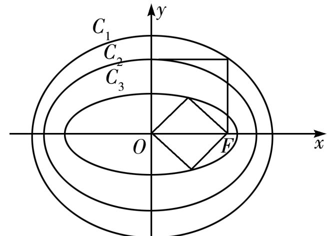
【命题意图】 本题考查导数的应用.

【解析】 设圆柱的底面半径为 r,高为 h,表面积为 y,则由题意有 $\pi r^2h=V$,所以 $h=\frac{V}{\pi r^2}$. 水罐的表面积 $y=\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}=\pi r^2+\frac{2V}{r}(r>0)$. 令 $y'=2\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{2(\pi r^3-V)}{r^2}=0$,得 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. 检验得,当 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$时,表面积取得最小值,即所用的材料最省.

12.【答案】 A

【命题意图】 本题考查椭圆的标准方程和几何性质.

【解析】 如图所示,椭圆 C 有 C_1,C_2,C_3 三种情况. 不妨设点 $F(2,0)$,则 $b^2=a^2-4$, $e^2=\frac{4}{a^2}$. ①对于 C_1,点(2,2)在椭圆上,则$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2-4}=1$,解得 $a^2=6\pm2\sqrt{5}$,由题知 $a^2>4$,所以 $a^2=6+2\sqrt{5}$,则 $e^2=\frac{4}{6+2\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,因为$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,B 项符合. ②对于 C_2,点(0,2)在椭圆上,$b=2$, $a=\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{2}$,所以 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,C 项符合. ③对于 C_3,点(1,1)在椭圆上,则$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2-4}=1$,解得 $a^2=3\pm\sqrt{5}$,因为 $a^2>4$,所以 $a^2=3+\sqrt{5}$,则 $e^2=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$,而$\left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=3-\sqrt{5}$,D 项符合.



二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【命题意图】 本题考查利用诱导公式求三角函数值.

【解析】 $\cos 570°=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14.【答案】 $\frac{4}{5}$

【命题意图】 本题考查古典概型的概率计算.

【解析】 因为$\angle A_1OA_i\in[0,\pi](i=2,3,4,5,6)$,$\sin\angle A_1OA_i=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\angle A_1OA_i=\frac{\pi}{3}$或$\angle A_1OA_i=\frac{2\pi}{3}$. 从$OA_2$,$OA_3$,$OA_4$,$OA_5$,$OA_6$这5个半径中任意取1个,得到5个不同的基本事件:$\angle A_1OA_2$,$\angle A_1OA_3$,$\angle A_1OA_4$,$\angle A_1OA_5$,$\angle A_1OA_6$,其中$\angle A_1OA_2=\frac{\pi}{3}$,$\angle A_1OA_3=\frac{2\pi}{3}$,$\angle A_1OA_5=\frac{2\pi}{3}$,$\angle A_1OA_6=\frac{\pi}{3}$,即正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,根据古典概率的计算公式得,$\sin\angle A_1OA_i=\frac{\sqrt{3}}{2}$的概率为$\frac{4}{5}$.

15.【答案】 $\left[0,\frac{1}{3}\right)$

【命题意图】 本题考查一元二次不等式和函数的综合问题.

【解析】 因为$f(x)=x^2-4x-4$,所以$f(x)<1\Leftrightarrow x^2-4x-5<0\Leftrightarrow -1<x<5$,即解集为$(-1,5)$. 因为$f(x)<1$在区间$(m-1,-2m)$上恒成立,所以$(m-1,-2m)\subseteq(-1,5)$,所以$-1\leqslant m-1<-2m\leqslant 5$,且两个等号不同时成立,所以$0\leqslant m<\frac{1}{3}$.

16.【答案】 -2或8

【命题意图】 本题考查导数的几何意义和曲线的切线问题.

【解析】 直线$x-y+b=0$的斜率为1,设$f(x)=x^2-\ln x$,则$f'(x)=2x-\frac{1}{x}(x>0)$. 令$f'(x)=1$得$x=1$,所以直线$x-y+b=0$与曲线$y=x^2-\ln x$的切点为$(1,1)$,所以$b=0$. 将$y=x$代入$y=ax^2+9x+a-6$,得$ax^2+8x+a-6=0$. 因为直线与曲线相切,所以$\Delta=64-4a(a-6)=0$,解得$a=-2$或8.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17.【命题意图】 本题考查函数解析式、不等式恒成立问题.

【解析】 (Ⅰ)由题可知,不等式$f(x)<0$的解集包含1和2两个正整数,

故解集为$\{x|0<x<3\}$,所以$f(x)=0$的根为0和3. ……(2分)

由$9+3b=0$得$b=-3$.

所以$f(x)=x^2-3x$. ……(4分)

(Ⅱ)因为不等式$f(x)\leqslant m$在$x\in[1,m]$时恒成立,

所以在$x\in[1,m]$上,$f(x)_{\max}\leqslant m$成立, ……(6分)

所以$f(1)\leqslant m$且$f(m)\leqslant m$,

所以$-2\leqslant m$且$m^2-3m\leqslant m$. ……(8分)

解得$0\leqslant m\leqslant 4$.

又$m>1$,所以$1<m\leqslant 4$.

所以实数m的取值范围为$(1,4]$. ……(10分)

18.【命题意图】 本题考查数列的通项公式和前n项和之间的关系以及数列的性质.

【解析】 (Ⅰ)因为$S_1=\frac{1}{4}-a_1$,所以$a_1=\frac{1}{4}-a_1$,所以$a_1=\frac{1}{8}$. ……(2分)

因为$S_n=\frac{1}{4}-a_n$,所以$S_{n+1}=\frac{1}{4}-a_{n+1}$.

所以$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{4}-a_{n+1}-\frac{1}{4}+a_n$, ……(3分)

所以$a_{n+1}=a_n-a_{n+1}$,易知$a_n\neq 0$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

所以数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{8}$,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列. ……(5分)

所以 $a_n=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n+2}}$. ……………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$b_n=\log_2 a_n=-n-2$. ……………………………………………………………………（7 分）

所以 $T_n=\frac{n(-3-n-2)}{2}=-\frac{n^2+5n}{2}$. ……………………………………………………………………（9 分）

$T_n\leqslant -25\Leftrightarrow -\frac{n^2+5n}{2}\leqslant -25$，即 $n^2+5n-50\geqslant 0$. ……………………………………………………（10 分）

又因 $n\in\mathbf{N}^*$，所以可得 $n\geqslant 5$.

所以满足 $T_n\leqslant -25$ 的 n 的最小值为 5. ……………………………………………………………………（12 分）

19.【命题意图】 本题考查正余弦定理在解三角形中的应用以及三角恒等变换.

【解析】（Ⅰ）由正弦定理及 $\frac{\sin A}{a}+\frac{\sqrt{3}\cos B}{b}=0$，得 $\frac{\sin A}{\sin A}=-\frac{\sqrt{3}\cos B}{\sin B}$，……………………………………（2 分）

所以 $\tan B=-\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………………………（4 分）

又因 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $9=a^2+c^2+ac$. ……………………………………（7 分）

因为 $9=a^2+c^2+ac\geqslant 2ac+ac=3ac$，

所以当且仅当 $a=c=\sqrt{3}$ 时，ac 取得最大值 3. ……………………………………………………（10 分）

此时，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………………………………（12 分）

20.【命题意图】 本题考查空间线面关系的证明.

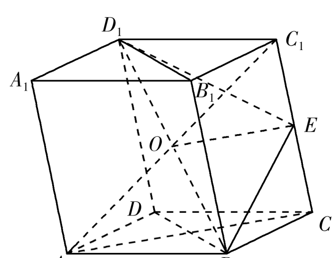
【解析】（Ⅰ）如图，连接 AC. 因为 $AB\parallel C_1D_1$，$AB=C_1D_1$，所以 AC_1，BD_1 相互平分，

所以 O 为 BD_1 和 AC_1 的中点. ……………………………………………………………………（2 分）

又因为 E 为 CC_1 的中点，所以 OE 为 $\triangle ACC_1$ 的中位线，所以 $OE\parallel AC$. ……………………（4 分）

又因为 $OE\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $OE\parallel$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………………………………………（6 分）



（Ⅱ）因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$. ……………………………………………………（7 分）

因为平面 $BDD_1B_1\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $BDD_1B_1\cap$ 平面 $ABCD=BD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1.

……………………………………………………………………………………………………（9 分）

因为 $BD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $AC\perp BD_1$. ………………………………………………………（10 分）

又因 $OE\parallel AC$，所以 $OE\perp BD_1$.

因为 $OB=OD_1$，所以 $D_1E=BE$. ……………………………………………………………………（12 分）

21.【命题意图】 本题考查圆锥曲线的方程以及直线与圆锥曲线的位置关系.

【解析】（Ⅰ）因为抛物线 C 与圆 O 的一个交点为 $R\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，

所以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=2p\cdot 1$，所以 $2p=\frac{1}{3}$，即抛物线 C 的方程为 $x^2=\frac{1}{3}y$. ……………………………（2 分）

设圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2(r>0)$，所以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2=r^2$，

所以 $r^2=\frac{4}{3}$，即圆 O 的方程为 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$. ……………………………………………………（3 分）

（Ⅱ）由题意得 $k_{OR}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………（4 分）

因为 AR 是圆 O 的切线，所以 $OR\perp AR$，所以 $k_{AR}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………（5 分）

所以直线 AR 的方程为 $y-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，即 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4}{3}$. ……………………………（6 分）

由 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4}{3}$ 与 $x^2=\frac{1}{3}y$ 联立消去 y 得 $9x^2+\sqrt{3}x-4=0$，则 $\Delta=147>0$. ……………（7 分）

设点 A 和点 R 的横坐标分别为 x_A，x_R.

则 $x_A+x_R=-\frac{\sqrt{3}}{9}$，$x_Ax_R=-\frac{4}{9}$. …………………………………………………………………（8 分）

所以 $|AR|=\sqrt{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\cdot|x_A-x_R|=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(x_A+x_R)^2-4x_Ax_R}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2+\frac{16}{9}}=\frac{14}{9}$. ………………………………………………………（10 分）

所以 $S=\frac{1}{2}|AR|\cdot|OR|=\frac{1}{2}\times\frac{14}{9}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{14\sqrt{3}}{27}$. ………………………………………………（12 分）

22.**【命题意图】** 本题考查导数的计算、导数的几何意义以及利用导数研究函数的性质.

【解析】（Ⅰ）由题知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. ………………………………………………………（1 分）

$f'(x)=(2x+a)\ln x+x+a$，则 $f'(1)=1+a$. ……………………………………………………………（2 分）

又因为 $f(1)=0$，所以切点为 $(1,0)$. ……………………………………………………………………（3 分）

所以 $\frac{0+2}{1-0}=1+a$， ……………………………………………………………………………………（4 分）

解得 $a=1$. ………………………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）当 $1<x<e^2$ 时，$0<\ln x<2$. ……………………………………………………………………（6 分）

由 $(x^2+ax)\ln x<x^2$ 可得 $a<\frac{x}{\ln x}-x$. ……………………………………………………………（7 分）

设 $g(x)=\frac{x}{\ln x}-x$，则 $g'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-1=-\frac{(\ln x)^2-\ln x+1}{(\ln x)^2}$. ………………………………（8 分）

因为 $(\ln x)^2-\ln x+1=\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$， ………………………………………………（9 分）

所以 $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(1,e^2)$ 上单调递减，从而 $g(x)>g(e^2)=-\frac{e^2}{2}$. ……………………………………（10 分）

要使原不等式恒成立，即 $a<g(x)$ 恒成立，故 $a\leqslant-\frac{e^2}{2}$.

即 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{e^2}{2}\right]$. ……………………………………………………………（12 分）