

# 2020 届湘赣粤名校高二(10 月)大联考·数学

## 参考答案、提示及评分细则

1. A  $a_2=2, a_3=5$ .

2. B  $a_5=3 \times 2^4=48$ .

3. B  $a_8=a_3+5d=25$ .

4. D 由  $a_4^2=a_3a_5=12$ , 有  $a_4=\pm 2\sqrt{3}$ .

5. A  $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin 2A}{\sin A}=\frac{2\sin A \cos A}{\sin A}=2\cos A=\frac{4}{3}$ .

6. D 由  $a_1+2a_4=a_1+2(a_1+3d)=3(a_1+2d)=3a_3=21$ , 故  $a_3=7$ .

7. B 由正弦定理有  $\sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin B \sin C$ , 得  $\sin(A+B) = \sin B \sin C$ , 有  $\sin C = \sin B \sin C$ , 由  $\sin C > 0$ , 得  $\sin B = 1$ , 有  $B = \frac{\pi}{2}$ , 故  $\triangle ABC$  的形状为直角三角形.

8. C 由  $\begin{cases} a_1 - a_1 q = 3, \\ a_1 q^2 = 4, \end{cases}$  得  $3q^2 + 4q - 4 = 0$ , 解得  $q = \frac{2}{3}$  (舍) 或  $q = -2$ , 故  $q = -2$ , 此时  $a_1 = 1, a_n = 1 \times (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$ .

9. A 由  $\begin{cases} a_1 + a_3 + \dots + a_{21} = \frac{11(a_1 + a_{21})}{2} = 11a_{11} = 110 \\ a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = \frac{10(a_2 + a_{20})}{2} = 10a_{11} \end{cases}$ , 有  $a_{11} = 10$ , 偶数项的和为 100.

10. D 当  $b = 2\sqrt{3}$  或  $b \geq 4$  时有一解; 当  $b < 2\sqrt{3}$  时无解; 当  $2\sqrt{3} < b < 4$  时有两解.

11. B 在  $\text{Rt} \triangle ABD$  中,  $BD = \sqrt{2} AB = 2\sqrt{3} \text{ km}$ , 由  $\angle BCD = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ , 由正弦定理有  $\frac{BD}{\sin 60^\circ} =$

$\frac{CD}{\sin 75^\circ}$ , 得  $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{CD}{\sin 75^\circ}$ , 有  $CD = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ . 在  $\text{Rt} \triangle ACD$  中,  $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{6 + (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} =$

$\sqrt{14 + 4\sqrt{3}} \approx 4.57 \text{ km}$ .

12. B 由  $S_{19} = \frac{19(a_1 + a_{19})}{2} = 19a_{10} < 0, S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = 10(a_1 + a_{20}) = 10(a_{10} + a_{11}) > 0$ , 可得  $a_{10} < 0, a_{10} +$

$a_{11} > 0$ , 有  $a_{11} > 0$ , 故  $S_n$  中的最小值为  $S_{10}$ .

13.  $20^\circ$  不妨设  $A < B < C$ , 有  $\begin{cases} 2B = A + C \\ C = 5A \\ A + B + C = 180^\circ \end{cases}$ , 解得  $A = 20^\circ, B = 60^\circ, C = 100^\circ$ .

14.  $\frac{\pi}{6}$  由  $\sin C = \sqrt{1 - \frac{7}{16}} = \frac{3}{4}$ , 由正弦定理有  $\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{2}$ , 又由  $b < c$ , 则  $B$  为锐角, 故  $B$

$$= \frac{\pi}{6}.$$

$$15. \frac{2n-1}{2n} \quad \text{由} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}}{\frac{(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}{2}} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n}.$$

16.  $\frac{1}{27}$  由  $a_{n+1}=3a_n-2$  有  $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$ , 故数列  $\{a_n-1\}$  为首项为 3, 公比为 3 的等比数列, 可得  $a_n-1=3^n$ . 不等式  $k(a_n-1) \geq 2n-5$  可化为  $k \geq \frac{2n-5}{3^n}$ , 令  $f(n) = \frac{2n-5}{3^n} (n \in \mathbb{N}^*)$ , 当  $1 \leq n \leq 2$  时  $f(n) < 0$ ; 当  $n \geq 3$  时,  $f(n) > 0$ . 故有当  $n \geq 3$  时,  $f(n+1) - f(n) = \frac{2n-3}{3^{n+1}} - \frac{2n-5}{3^n} = -\frac{4(n-3)}{3^{n+1}} \leq 0$ , 故  $f(n) \leq f(3) = \frac{1}{27}$ , 可得实数  $k$  的最小值为  $\frac{1}{27}$ .

17. 解: (1) 由正弦定理有,  $a^2 + b^2 - c^2 = \frac{2}{3}ab$ ,

由余弦定理有  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\frac{2ab}{3}}{2ab} = \frac{1}{3}$ , ..... 5 分

(2) 由余弦定理有  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 得  $9 = a^2 + b^2 - \frac{2}{3}ab$ , 可化为  $9 = (a+b)^2 - \frac{8}{3}ab$ , 代入  $a+b=5$ , 得  $ab=6$ ,

解方程组  $\begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases}$ , 可得  $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ . ..... 10 分

18. 解: (1) 设数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 由题意有:  $\begin{cases} a_1 + (a_1 + 3d) = 2(a_1 + d) - 2 \\ 3a_1 + 3d = 48 \end{cases}$ , 解得:  $\begin{cases} a_1 = 18 \\ d = -2 \end{cases}$

故数列  $\{a_n\}$  的首项为 18, 公差为 -2, ..... 6 分

(2) 由 (1) 知  $a_n = 18 - 2(n-1) = 20 - 2n$ ,

可知当  $1 \leq n \leq 10$  时  $a_n \geq 0$ , 当  $n \geq 11$  时  $a_n < 0$ , ..... 8 分

数列  $\{b_n\}$  前 20 项的和为  $(18+16+\cdots+2) + (2+4+\cdots+20) = \frac{9 \times (2+18)}{2} + \frac{10 \times (2+20)}{2} = 200$ . ... 12 分

19. 解: (1) 设数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 由  $S_6 \neq 2S_3$  可知  $q \neq 1$ ,

由题意有  $\begin{cases} \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 39 \\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 1092 \end{cases}$ , 解得:  $\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 3 \end{cases}$

故数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 3^n$ . ..... 6 分

(2) 由  $b_n = \frac{1}{\log_3 3^n \log_3 3^{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,

有  $T_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ ,

若  $T_n > \frac{2019}{2020}$ , 有  $1 - \frac{1}{n+1} > \frac{2019}{2020}$ , 得  $n > 2019$ ,

故满足  $T_n > \frac{2019}{2020}$  成立的最小的正整数  $n$  的值为 2020. .... 12 分

20. 解: (1) 当  $n=1$  时,  $3a_1 = 4(a_1 - 1)$ , 得  $a_1 = 4$ , .... 1 分

当  $n \geq 2$  时,  $3a_n = 3S_n - 3S_{n-1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ , 得  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 4$ , .... 5 分

故数列  $\{a_n\}$  是以 4 为首项, 4 为公比的等比数列,

数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 4^n$ , .... 6 分

(2) 由  $S_n = \frac{4(1-4^n)}{1-4} = \frac{4}{3}(4^n - 1)$ , 有  $S_n + S_{n+2} = \frac{4}{3}(4^n - 1) + \frac{4}{3}(4^{n+2} - 1) = \frac{4}{3}(17 \times 4^n - 2)$ , .... 8 分

若存在正整数  $n$  使得  $S_n, \frac{15}{7}S_{n+1}, S_{n+2}$  成等差数列, 有  $\frac{4}{3}(17 \times 4^n - 2) = 2 \times \frac{15}{7} \times \frac{4}{3}(4^{n+1} - 1)$ , 解得  $n=2$ ,

由上知, 存在  $n=2$  使得  $S_n, \frac{15}{7}S_{n+1}, S_{n+2}$  成等差数列. .... 12 分

21. 解: (1) 由正弦定理有  $\sqrt{3} \sin B \sin C - \sin C \cos B = 2 \sin B - \sin A$ ,

又由  $\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ , 代入上式得,

$\sqrt{3} \sin B \sin C = 2 \sin B - \sin B \cos C$ , .... 2 分

由  $0 < B < \pi$ , 有  $\sin B > 0$ ,

上式可化为:  $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin C + \frac{1}{2} \cos C = 1$ , 得  $\sin(C + \frac{\pi}{6}) = 1$ , 由  $0 < C < \pi$ , 有  $\frac{\pi}{6} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$ , 故有  $C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ,

故  $C = \frac{\pi}{3}$ , .... 6 分

(2) 由(1)知,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} b \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3b}{4}$ , .... 7 分

由正弦定理有  $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{\sqrt{3} \sin(\frac{2\pi}{3} - A)}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A)}{\sin A} = \frac{3 \cos A}{2 \sin A} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  
 $= \frac{3}{2 \tan A} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ , .... 9 分

由  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 有  $\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B = \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ , 得  $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$ , 有  $\tan A > \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 可得  $\frac{\sqrt{3}}{2} < b < 2\sqrt{3}$ , 故

$\triangle ABC$  面积的取值范围为  $(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ . ..... 12 分

22. 解: (1) 证明: 由  $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{3a_n + 3^{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = (\frac{a_n}{3^n} + 1) - \frac{a_n}{3^n} = 1$ ,

故数列  $\{\frac{a_n}{3^n}\}$  为公差为 1 的等差数列, ..... 3 分

(2) 由 (1) 知  $\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3} + (n-1) = n+1$ , 有  $a_n = (n+1) \times 3^n$ ,

由  $S_n = 2 \times 3 + 3 \times 3^2 + \cdots + (n+1) \times 3^n$ ,

有  $3S_n = 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^n + (n+1) \times 3^{n+1}$ ,

两作差有  $-2S_n = 2 \times 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - (n+1) \times 3^{n+1}$ ,

得  $-2S_n = 3 + (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (n+1) \times 3^{n+1}$ ,

有  $-2S_n = 3 + \frac{3(1-3^n)}{1-3} - (n+1) \times 3^{n+1}$ ,

得  $S_n = \frac{2n+1}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4}$ , ..... 8 分

(3) 对任意  $m \in \mathbf{N}^*$ , 若  $3^m < n+1 < 3^{2m}$ , 得  $3^m - 1 < n < 3^{2m} - 1$ , 得  $3^m \leq n \leq 3^{2m} - 2$ ,

故  $b_m = (3^{2m} - 2) - 3^m + 1 = 3^{2m} - 3^m - 1$ ,

有  $T_m = (3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{2m}) - (3 + 3^2 + \cdots + 3^m) - m = \frac{9(1-9^m)}{1-9} - \frac{3(1-3^m)}{1-3} - m$ ,

$= \frac{9}{8}(9^m - 1) - \frac{3}{2}(3^m - 1) - m = \frac{3^{2m+2} - 4 \times 3^{m+1} + 3}{8} - m$ . ..... 12 分