考号__________ 姓名__________ 班级__________ 学校__________ 县区__________

密 封 线 内 不 要 答 题

洛阳市 2017——2018 学年高二质量检测

数 学 试 卷（理）

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分．第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至4页．共150分．考试时间120分钟．

第Ⅰ卷（选择题，共 60 分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上．
2. 考试结束，将答题卡交回．

一、选择题：本题共12个小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 命题"如果 $x \geqslant a^2+b^2$，那么 $x \geqslant 2ab$"的逆否命题是

A. 如果 $x < a^2+b^2$，那么 $x < 2ab$　　B. 如果 $x \geqslant 2ab$，那么 $x \geqslant a^2+b^2$

C. 如果 $x < 2ab$，那么 $x < a^2+b^2$　　D. 如果 $x \geqslant a^2+b^2$，那么 $x < 2ab$

2. 已知复数 z 满足 $\dfrac{1+i}{z}=2i^3+2i^4$，其中 i 为虚数单位，则复数 $z=$

A. $\dfrac{i}{2}$　　B. $1+i$　　C. $-\dfrac{i}{2}$　　D. $-1-i$

3. 若 a,b 为正实数，且 $a\neq1,b\neq1$，则"$a>b>1$"是"$\log_a2<\log_b2$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 五个同学排成一排照相，其中甲、乙两人不排两端，则不同的排法种数为

A. 33　　B. 36　　C. 40　　D. 48

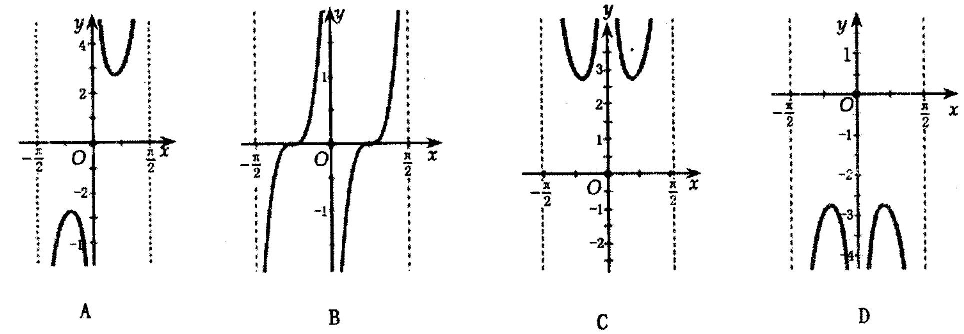
5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=a_2+4a_1$，且 $a_1a_2a_3a_4a_5=243$，则 a_5 的值为

A. -1　　B. 1　　C. -9　　D. 9

6. 牡丹花会期间，记者在王城公园随机采访6名外国游客，其中有2名游客来过洛阳，从这6人中任选2人进行采访，则这2人中至少有1人来过洛阳的概率是

A. $\dfrac{1}{15}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

7. 函数 $f(x)=(x+\dfrac{1}{x})\dfrac{1}{\cos x}(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},x\neq0)$ 的图象可能为



8. 在满分为15分的中招信息技术考试中，初三学生的分数 $X\sim N(11,2^2)$，若某班共有54名学生，则这个班的学生该科考试中13分以上的人数大约为
(附：$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$)

A. 6　　B. 7　　C. 9　　D. 10

9. 已知球 O 的内接长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB=2$，若四棱锥 $O-ABCD$ 的体积为2，则当球 O 的表面积最小时，球的半径为

A. $2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

10. 若直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=a\ln x$ 相切，且 $a\in(n,n+1)(n\in N^*)$，则 $n=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，准线为 l，抛物线的对称轴与准线交于点 Q，P 为抛物线上的动点，$|PF|=t|PQ|$，当 t 最小时，点 P 恰好在以 F,Q 为焦点的椭圆上，则椭圆的长轴长为

A. $\sqrt{2}+1$　　B. $3+2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}-2$　　D. $2\sqrt{2}+2$

12. 已知定义在 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 上的函数 $f(x)=x\ln x+1$，若 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x-a$ 有两个零点，则 实数 a 的取值范围是

A. $\left(\dfrac{1}{3e},1-\dfrac{1}{e}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{3e},1-\dfrac{3}{2e}\right)$

C. $\left(1-e^{-\frac{1}{2}},1-\dfrac{1}{e}\right)$　　D. $\left(1-e^{-\frac{1}{2}},1-\dfrac{3}{2e}\right)$

第 Ⅱ 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.在$(2x-1)^n$ 的展开式中,各项系数的和是________

14.设 $f(x)=\begin{cases}\lg x, x>0;\\ x+\int_0^b t^2dt, x\leqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(f(1))=\dfrac{8}{3}$,则常数 $b=$ ________.

15.若二项式$(\tan\varphi+x)^6$ 的展开式中,x^5 的系数为 1,则 $\dfrac{\sin\varphi-\cos\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}$ 的值为________.

16.已知函数 $f(x)=\dfrac{m}{x-1}+\ln x$ 在$[e,+\infty)$上存在极值点,则实数 m 的取值范围为________.

三、解答题:本大题共 6 个小题,共 70 分,解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 已知 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $f(\dfrac{A}{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$a=4$,$b+c=5$,求 ΔABC 的面积.

18.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,2a_na_{n+1}+a_{n+1}-a_n=0$,数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\dfrac{1}{2^na_n}$.

(1) 求证:数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列;

(2) 求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

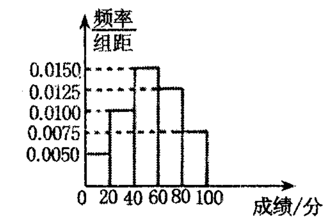
19.(本小题满分 12 分)

为了解学生喜欢校内、校外开展活动的情况,某中学一课外活动小组在学校高一年级进行了问卷调查,问卷共100道题,每题1分,总分100分,该课外活动小组随机抽取了200名学生的问卷成绩(单位:分)进行统计,将数据按[0,20),[20,40),[40,60),[60,80),[80,100]分成五组,绘制的频率分布直方图如图所示,若将不低于60分的称为A类学生,低于 60 分的称为 B 类学生.

(1) 根据已知条件完成下面 2×2 列联表,能否在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为性别与是否为 A 类学生有关系?

	B类	A类	合计
男			110
女		50	
合计			

(2) 将频率视为概率,现在从该校高一学生中用随机抽样的方法每次抽取 1 人,共抽取 3 次,记被抽取的 3 人中 A 类学生的人数为 X,若每次抽取的结果是相互独立的,求 X 的分布列、期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.



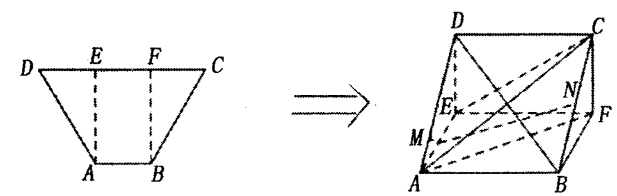
参考公式:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

参考临界值:

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.(本小题满分 12 分)

如图,已知在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AE\perp CD$,$BF\perp CD$,$AB=1$,$AD=2$,$\angle ADE=60°$,沿 AE,BF 折成三棱柱 $AED-BFC$.



(1) 若 M,N 分别为 AE,BC 的中点,求证:MN // 平面 $CDEF$;

(2) 翻折后若 $BD=\sqrt{5}$,求二面角 $E-AC-F$ 的余弦值.

21.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1$,$g(x)=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 函数 $h(x)=f(x)-ag(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,若 $h(x_1)<m$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知点(2,3)在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上,设 A,B,C 分别为椭圆的左顶点,上顶点,下顶点,且点 C 到直线 AB 的距离为$\dfrac{4\sqrt{7}}{7}b$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 O 为坐标原点,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$为椭圆上两点,且$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{a^2x_1x_2+b^2y_1y_2}{a^2+b^2}$,试问 ΔMON 的面积是否为定值,若是,求出定值;若不是,说明理由.

洛阳市2017——2018学年高二质量检测

数学试卷参考答案(理)

一、选择题:1－5 CAABD　　6－10 CACBC　　11－12 DD

二、填空题 13. 1　　14. 2　　15. $-\frac{5}{7}$　　16. $(e+\frac{1}{e}-2,+\infty)$

三、解答题:

17. 解:(1) 由题意知,$f(x)=\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x$ ……(2 分)

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……(3 分)

∵ $\sin(2x-\frac{\pi}{3})\in[-1,1]$,

∴ $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\in[-1+\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$. ……(5 分)

(2) ∵ $f(\frac{A}{2})=\sin(A-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴ $\sin(A-\frac{\pi}{3})=0$

∵ $A\in(0,\pi)$,$A-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$, ∴ $A-\frac{\pi}{3}=0$,解得 $A=\frac{\pi}{3}$.

……(7 分)

∵ $a=4$,$b+c=5$, ∴ 由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

可得 $16=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=25-3bc$,解得 $bc=3$, ……(9 分)

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ……(10 分)

18. 解:(1) 因为 $2a_na_{n+1}+a_{n+1}-a_n=0$,

即 $a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$ ∴ $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$, ……(2 分)

由等差数列的定义可得$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为$\frac{1}{a_1}=1$,公差为 $d=2$ 的等差数列。

……(4 分)

∴ $\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$. ……(6 分)

(2) 由(1) 知 $b_n=\frac{2n-1}{2^n}$,

所以 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$, ……(8 分)

两边同时乘以$\frac{1}{2}$ 得,$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

两式相减得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$, ……(10 分)

即$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+2\times\frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

所以 $S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$. ……(12 分)

19. 解:(1) 由频率分布直方图可得分数在[60,80)之间的学生人数为 $0.0125\times 20\times 200=50$,在[80,100]之间的学生人数为 $0.0075\times 20\times 200=30$,所以低于 60 分的学生人数为 120. 因此列联表为:

	B 类	A 类	合计
男	80	30	110
女	40	50	90
合计	120	80	200

……(3 分)

又 K^2 的观测值为 $K=\frac{200\times(80\times 50-30\times 40)^2}{120\times 80\times 110\times 90}\approx 16.498>6.635$,

所以在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为性别与 A 类学生有关.

……(6 分)

(2) 易知从该校高一学生中随机抽取 1 人,则该学生为“A 类”的概率为 $p=\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$.

依题意知 $X\sim B(3,\frac{2}{5})$, ……(8 分)

所以 $P(X=\mathrm{i})=C_3^i(\frac{2}{5})^i(1-\frac{2}{5})^{3-\mathrm{i}}(i=0,1,2,3)$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

……(10 分)

所以期望 $E(X)=np=\frac{6}{5}$,方差 $D(X)=np(1-p)=\frac{18}{25}$. ……(12 分)

20. 解:(1) 取 AD 的中点 G,连接 GM,GN,在三角形 ADE 中,

∵ M,G 分别为 AE,AD 的中点, ∴ $MG\parallel DE$,

∵ $DE\subset$ 平面 $CDEF$,$MG\not\subset$ 平面 $CDEF$, ∴ $MG\parallel$ 平面 $CDEF$.

……(2 分)

由于 G,N 分别为 AD,BC 的中点,由棱柱的性质可得 $GN\parallel DC$,

∵ $CD\subset$ 平面 $CDEF$,$GN\not\subset$ 平面 $CDEF$, ∴ $GN\parallel$ 平面 $CDEF$.

……(3 分)

又 $GM\subset$ 平面 GMN,$GN\subset$ 平面 GMN,$MG\cap NG=G$,

∴ 平面 $GMN\parallel$ 平面 $CDEF$, ∵ $MN\subset$ 平面 GMN,

∴ $MN\parallel$ 平面 $CDEF$. ……(5 分)

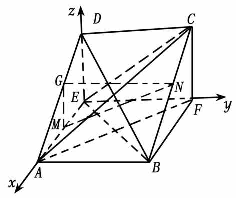
(2) 连接 EB,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,$AB=1$,$AE=\sqrt{3}$,

∴ $BE=2$,又 $DE=1$,$DB=\sqrt{5}$,

∴ $EB^2+ED^2=DB^2$， ∴ $ED\perp EB$，又 $DE\perp AE$

且 $AE\cap EB=E$， ∴ $DE\perp$ 平面 $ABFE$. ……(7 分)

建立如图所示的空间直角坐标系，



可得 $E(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$F(0,1,0)$，$C(0,1,1)$，

$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},1,1)$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{FC}=(0,0,1)$. ……(8 分)

设平面 AFC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$ 则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=-\sqrt{3}x+y+z=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{FC}=z=0,\end{cases}$ 则 $z=0$，令 $x=1$，

得 $y=\sqrt{3}$，则 $\vec{m}=(1,\sqrt{3},0)$ 为平面 AFC 的一个法向量，

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-\sqrt{3}x_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-\sqrt{3}x_1+y_1+z_1=0\end{cases}$

则 $x_1=0$，令 $y_1=1$，得 $z_1=-1$，

∴ $\vec{n}=(0,1,-1)$ 为平面 ACE 的一个法向量. ……(10 分)

设 $\vec{m},\vec{n}$ 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

由图可知二面角 $E-AC-F$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. ……(12 分)

21. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$， ……(1 分)

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增， ……(3 分)

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，且极小值 $f(1)=2$，无极大值。 ……(4 分)

(2) $h(x)=f(x)-ag(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1-ax-\dfrac{a}{x}$，其定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-a+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{-ax^2+x+a-1}{x^2}=-\dfrac{(x-1)(ax+a-1)}{x^2}$

……(5 分)

当 $a=0$ 时，$h'(x)=0$ 仅有一解 $x=1$，不合题意. ……(6 分)

当 $a\neq0$ 时，令 $h'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\dfrac{1-a}{a}$.

由题意得，$\dfrac{1-a}{a}>0$，且 $\dfrac{1-a}{a}\neq1$，所以 $a\in(0,\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},1)$，

此时 $h(x)$ 的两个极值点分别为 $x=1$，$x=\dfrac{1-a}{a}$. ……(7 分)

当 $a\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，$\dfrac{1-a}{a}>1$，所以 $x_1=1$，$x_2=\dfrac{1-a}{a}$，

$h(x_1)=h(1)=2-2a$，而 $2-2a\in(1,2)$，又 $h(x_1)<m$ 恒成立，则 $m\geqslant2$. ……(9 分)

当 $a\in(\dfrac{1}{2},1)$ 时，$\dfrac{1-a}{a}<1$，所以 $x_1=\dfrac{1-a}{a}$，$x_2=1$，

$h(x_1)=h(\dfrac{1-a}{a})=\ln\dfrac{1-a}{a}+2a$.

设 $\varphi(a)=\ln\dfrac{1-a}{a}+2a$，则 $\varphi'(a)=\dfrac{-2a^2+2a-1}{a(1-a)}=-\dfrac{2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}{a(1-a)}<0$，

所以 $\varphi(a)$ 在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上为减函数，$\varphi(a)<\varphi(\dfrac{1}{2})=1$，

所以 $h(x_1)<1$，

又 $h(x_1)<m$ 恒成立，则 $m\geqslant1$. ……(11 分)

综上所述，实数 m 的取值范围为 $[2,+\infty)$. ……(12 分)

22. 解：(1) 由题意得，直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{b}=1$，$C(0,-b)$，

∴ 点 C 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}b$，

整理得，$\sqrt{3}a-2b=0$. ……(2 分)

又点 $(2,3)$ 在椭圆上， ∴ $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1$

联立解得 $a=4$，$b=2\sqrt{3}$， ……(4 分)

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ ……(5 分)

(2) 由 $x_1\neq x_2$ 知直线 MN 的斜率存在，

设直线 MN 的方程为 $y=kx+m(m\neq0)$，

代入 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，并整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-48=0$.

∵ $\Delta=64k^2m^2-16(3+4k^2)(m^2-12)=48(12+16k^2-m^2)>0$，

∴ $12+16k^2-m^2>0$，

∴ $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-12)}{3+4k^2}$，

∴ $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{3m^2-48k^2}{3+4k^2}$.

……(7 分)

又 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2$，

∴ $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{a^2x_1x_2+b^2y_1y_2}{a^2+b^2}=\dfrac{16x_1x_2+12y_1y_2}{16+12}$，

整理得 $m^2=6+8k^2$(满足 $\Delta>0$) ……(8 分)

∵ $|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\dfrac{48(2m^2-m^2)}{\left(\frac{m^2}{2}\right)^2}}=8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{|m|}$. ……(9 分)

又点 O 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$， ……(10 分)

∴ $S_{\Delta MON}=\dfrac{1}{2}\times|MN|\times d=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{|m|}\times\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=4\sqrt{3}$

∴ ΔMON 的面积为定值 $4\sqrt{3}$. ……(12 分)