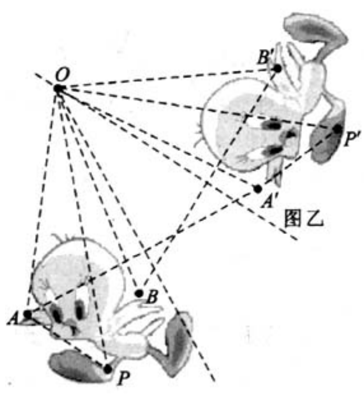
第十一届北京高中数学知识应用竞赛决赛试题及参考解答

1.（满分 20 分）这里有全等的两幅小鸭子的图像（见下图）. 它们的位置是随意摆放的（对应部位的连线不平行）. 请你证明其中的一幅是由另一幅围绕平面上某一个点（旋转中心）旋转得到的. 请你把这个旋转中心找出来，并且证明这个结论.

解 任选图甲中的两点 A 和 B，再取图乙中相应的点 A' 和 B'，如图. 分别作线段 AA' 和 BB' 的中垂线，交于点 O，则图乙是由图甲围绕平面上点 O 旋转得到的.



图甲

下面证明上述结论.

设 $\angle AOA'=\theta$，因为 O 在 AA' 的中垂线上，所以 $OA'=OA$，同理，$OB'=OB$，又因为 $A'B'=AB$，所以 $\triangle AOB\cong\triangle A'OB'$，所以 $\angle OAB=\angle OA'B'$.

在图甲中任取一点 P，不妨设点 P 与点 O 在直线 AB 的异侧，再取图乙中相应的点 P'，则 $\triangle ABP\cong\triangle A'B'P'$，$\angle BAP=\angle B'A'P'$. 于是

$\angle OAP=\angle OAB+\angle BAP=\angle OA'B'+\angle B'A'P'=\angle OA'P'$.

所以 $\triangle OAP\cong\triangle OA'P'$，所以

$OP'=OP$，且 $\angle POP'=\angle POA'+\angle A'OP'=\angle POA'+\angle AOP=\angle AOA'=\theta$.

因此，点 P' 是由点 P 围绕平面上点 O 旋转角 θ 得到的. 点 P 与点 O 在直线 AB 的同侧时，结论同理可证明. 根据点 P 的任意性，便得图乙是由图甲围绕平面上点 O 旋转得到的.

2.（满分 20 分）物理老师布置了这样一个作业，让同学测量常见的啤酒瓶和露露罐的容积. 啤酒瓶和露露罐的工业标准容积分别是 600ml 和 240ml. 现有的工具是一个 20ml 的小量杯，最小单位是 2ml.

小明先将露露罐盛满水，再一次次倒入小量杯，得到测量值. 反复测量了 4 次，每次的测量结果都不同，数据如下表所示（容积单位：ml）：

测量次数	1	2	3	4
容积测量值	$11\times20+10=230$	$12\times20+8=248$	$12\times20+12=252$	$11\times20+16=236$

物理学指出：测量误差是最小单位的一半. 于是知道，由于量杯的最小单位是 2ml，所以误差应该在 -1ml 到 $+1$ml 之间. 考虑到测量的误差，操作次数应为：$240/20=12$；$240/19=12.6$；$240/21=11.4$. 即最多要用量杯操作 13 次，于是知道露露罐的容积的测量值的误差范围应为 [-13ml, 13ml]，相应得到测量值 $\in[227,253]$. 请回答：

(1) 用量杯测量啤酒瓶的时候，误差范围应该如何？

(2) 如果小明依据已经完成的对露露罐的 4 次测量，借助露露罐，可以使啤酒瓶的测量值和真实值间的误差减小吗？试计算较小的误差范围，说明你的道理.

解 (1) 用量杯测量啤酒瓶，考虑到测量的误差，操作次数应为：

$600/20=30$；$600/19=31.6$；$600/21=28.6$.

即最多要用量杯操作 32 次，因此对于啤酒瓶

的测量值的误差范围应为[－32ml，32ml]，相应得到测量值∈[568，632]．

(2) 用量杯测量露露罐，再用露露罐和量杯混和测量啤酒瓶．

设量杯的测量一次的方差为 σ^2，则测量露露罐时的方差应为 $13\sigma^2$．现在用 4 次测量值的平均值(230＋248＋252＋235)/4＝241.25 代替露露罐的容积，此时这个平均值的方差为 $13\sigma^2/4=3.25\sigma^2$，它表明 4 次露露罐测量值的平均值的方差不会超过量杯测量误差的 4 倍．代替的容积露露罐的容积约为(230＋248＋252＋235)/4＝241.25．可见露露罐的测量值和工业标准的误差大约为 1.25．

如果用露露罐测量啤酒瓶，则

$$600=2\times241.25+117.5,$$

即用露露罐两次测量后，所剩水量约为 117.5ml．再用量杯测量啤酒瓶所剩水量，考虑到测量的误差，则有

$$117.5/19=6.18;117.5/21=5.6.$$

我们对剩下的约为 117.5ml 水用量杯测量，最多 7 次．

我们计算此时测量啤酒瓶的方差，为

$$2\times3.25\sigma^2+7\times\sigma^2=13.5\sigma^2.$$

误差范围应为[－13.5ml，13.5ml]．它相当于用量杯测量方差的 13.5 倍．而直接用量杯测量啤酒瓶的方差为 $32\sigma^2$．由于 13.5＜32，即用量杯测量露露罐，再用露露罐和量杯混和测量啤酒瓶的方差比直接用量杯测量啤酒瓶的方差要小，所以误差要小．

3．(满分 20 分) 在军事演习中，红方将在甲、乙两个相距很远的地方从海上试图登陆．蓝方在陆地防守，以阻止红方登陆．

假设蓝方有三个师的兵力，红方只有二个师的兵力．而且蓝、红方在甲、乙两地安排、部署兵力时，必须以整师为单位，不能拆散．在甲、乙任何一个阵地，两军相遇，我们规定兵力多的一方胜利；若两方军力相等，根据易守难攻的原则，我们规定蓝方胜利．显然，无论从兵力的数量上，还是胜负的规则上，对红方都不利．只要红方在甲、乙任意一地登陆就认为红方胜利登陆．

如果任何一种安排兵力的方法都是等可能的，在没有其它的信息情况下，试计算红方胜利登陆的概率．

解 我们用 A_i 表示蓝方在甲地部署了 i 个师(这意味着蓝方在乙地部署了 $3-i$ 个师)，其中 $i=0,1,2,3$；用 B_j 表示红方往甲地派遣了 j 个师(这意味着红方往乙地派遣了 $2-j$ 个师)，其中 $j=0,1,2$．

现在，双方对阵的各种可能的情形如下表：

		蓝方策略			
		A_0	A_1	A_2	A_3
红方策略	B_0			红方在乙地登陆	红方在乙地登陆
	B_1	红方在甲地登陆			
	B_2	红方在甲地登陆	红方在甲地登陆		红方在乙地登陆

由于上面 12 种情形都是等可能的，其中有 6 种情形使得红方能登陆成功，因此，红方胜利登陆的概率是二分之一．

表面看，红方在兵力上和胜负规则上都处于不利地位，但红方只要在甲、乙任何一地登陆就是胜利，而蓝方则要求在甲、乙两处都要不败，才能胜利．红方胜利的概率不低．

4．(满分 20 分) 北京市出租车计价是如下规定的：行程在 3 公里以内 10 元；大于等于 3 公里，每公里 2 元；总里程大于等于 15 公里的部分加收 50%．每半公里计一次价，不足半公里按半公里计，例如，当行驶路程 x(公里)满足 $12\leqslant x<12.5$ 时，按 12.5 公里计价；当 $12.5\leqslant x<13$ 时，按 13 公里计价．途中时速低于 12 公里(称为等候)时，每累计 2.5 分钟加收 1 元，不足 2.5 分钟不计，例如，累计时间 t(分钟)满足 $5\leqslant x<7.5$ 时，按 5 分钟计价；$7.5\leqslant x<10$ 时，按 7.5 分钟计价．晚 11 点到次日早 5 点为夜间，夜间起价 11 元，上述其它金额均加收 20% 的费用．

(1) 如果无等候，白天乘出租车行驶 28.8 公里的费用是多少？

(2) 如果无等候，白天乘出租车行驶 14.4 公

里下车,再换乘另一辆出租车行驶14.4公里的总费用是多少?

(3) 写出白天乘出租车无等候行驶 x 公里与应付费用 y 之间的函数关系式.

(4) 如果无等候,白天从上地工业园区乘出租车去41公里处的亦庄经济开发区,直接乘车到达花多少钱?最省钱的乘车方案是什么?这个方案费用是多少?

解 (1) $y=10+2\times12+3\times14=76$(元).

(2) $y=2\times(10+2\times12)=68$(元).

(3) $y=f(x)$

$$=\begin{cases}10 & x\in(0,3)\\ 2[x]+5 & x\in[3,15)\text{且}\{x\}\in[0,0.5)\\ 2[x]+6 & x\in[3,15)\text{且}\{x\}\in[0.5,1)\\ 3[x]-9 & x\in[15,+\infty)\text{且}\{x\}\in[0,0.5)\\ 3[x]-8 & x\in[15,+\infty)\text{且}\{x\}\in[0.5,1)\end{cases}$$

其中$[x]$表示 x 的整数部分,$\{x\}$表示 x 的小数部分.

(4) 首先,考虑每公里的平均费用,这个平均费用越小就越省钱.以白天为例:每公里平均费用函数为 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

在 $x\in[1,3)$内,当 x 趋于3时得最小值,近似为3.33元/公里;

在 $x\in[3,15)$内,当 x 趋于15时得最小值,近似为2.27元/公里;

在 $x\in[15,+\infty)$内,当 x 趋于16时得最小值,近似为2.31元/公里.

可见,当行程为15公里时最省钱.

那么,如果行程超过15公里而又不足30公里,是换车省钱还是不换车省钱呢?为此我们比较两种情况.在不换车的情况下,收费情况为:

$$f(x)=\begin{cases}3[x]-9,x\in[15,+\infty)\text{且}\{x\}\in[0,0.5)\\ 3[x]-8,x\in[15,+\infty)\text{且}\{x\}\in[0.5,1)\end{cases}$$

行程接近15公里后换车的情况为:

$$u(x)=\begin{cases}44,x\in(15,18)\\ 2[x]+9,x\in[18,30]\text{且}\{x\}\in[0,0.5)\\ 2[x]+10,x\in[18,30]\text{且}\{x\}\in[0.5,1)\end{cases}$$

显然,当 $x\in(15,18)$时,由于出租车收取起步费,换车不经济;当 $x>18$ 时

令 $3[x]-9=2[x]+9$

或 $3[x]-8=2[x]+10$

得$[x]=18$.

从计算结果可以看出:19公里是个临界值,当行程超过15公里但不到19公里时不换车省钱;当超过19公里时,在15公里处再换一次车更省钱.

在乘坐出租车时,最经济的方案是每行驶接近15公里换一次车,最后一程,如果不到19公里就不必换车,达到19公里应换车或者要求司机重新起动计价器.

这个结论对于夜间行车也完全适用.

对于39公里的行程,可以看作接近39公里.打车直接到目的地的费用是:$3\times40-8=112$,节约了18元.由以上讨论,最省钱的乘出租车的方案是:把路程分解成三段,前两段都是尽量接近15公里,第三段尽量接近11公里,总费用为:$34+34+26=94$(元).

5.(满分20分)长江是我国第一、世界第三大河流,长江水质的污染程度日趋严重,已引起了相关政府部门和专家们的高度重视.这里给出了长江干流的两个观测站:湖北宜昌南津关和湖南岳阳城陵矶于2005年1月对主要水质污染指标高锰酸盐含量(mg/l)的检测数据,以及这两个观测站水流情况的基本数据(江水流量(m^3/s)和流速(m/s)).

观测站	湖北宜昌 A	湖南岳阳 B
水流量	$Q_A=4570$	$Q_B=8190$
水流速	$v_A=0.5$	$v_B=0.6$
高锰酸盐浓度	$C_A=1.9$	$C_B=5.1$

这两个观测站之间的江面距离为395km.通常认为一个观测站的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水.一般说来,江河自身对污染物都有一定的自然净化能力,即污染物随着水的流动通过物理降解、化学降解和生物降解等现象使水中污染物的浓度按照规律 $C(t)=C(0)e^{-\lambda t}$ 降低.其中 t 是江水流动的时间,λ 是反映江河自然净化能力的指标——降解系数.根据检测可知,高锰酸盐的降解系数为0.2(单位:1/天).根据这

些数据请你回答：

(1) 如果在这个河段只有一个排污口 P，它位于距离下游岳阳观测站之上 x km 处，请你计算这个排污口排出的污水的浓度.并回答排污的浓度与排污口的位置是什么关系.

(2) 如果我们不知道有关排污口的具体位置，根据前面给出的分析能不能对这个河段上污水排放的浓度的范围给出估计.

解 假设上游湖北宜昌南津关 A 和下游湖南岳阳城陵矶 B 河水的流量和污染物的浓度分别为 Q_A, Q_B, C_A, C_B.为估计将江水由宜昌流到岳阳的时间，我们取这个区段江水的平均流速 $v = \frac{0.5+0.6}{2} = 0.55(\mathrm{m/s})$.于是江水流过 395km 所需要的时间大约是 $t_1 = \frac{395\times 1000}{3600\times 24\times v} = \frac{395}{47.52} = 8.3$(天).

(1) 假设：这段河道内江水流量的增加完全是由于排污口 P 的输入所产生的.流入污水的流量和污染物的浓度分别为 q 和 c.则江水流量的平衡关系是 $Q_A + q = Q_B$.江水从排污口流到下游的岳阳所需要的时间为 $t_2 = \frac{x\times 1000}{3600\times 24\times v} = \frac{x}{47.52}$天.

由于下游任何地点的水质污染主要来自于上游经过一定时间降解后的污水和本地区的排出的污水.因此下游 B 点污水的浓度是由于上游宜昌流下来的污染物和排污口 P 排出来的污水经过降解后形成的.

利用污染浓度降解的规律可以得到

$$C_B = \frac{C_A e^{-\lambda\frac{395-x}{47.52}} Q_A + cq}{Q_A + q} e^{-\lambda\frac{x}{47.52}},$$

注意到 $Q_A + q = Q_B$，将上式化简，有

$$C_B Q_B = C_A Q_A e^{-\lambda\frac{395}{47.52}} + cq e^{-\lambda\frac{x}{47.52}},$$

解出 c 可得

$$c = \frac{(C_B Q_B - C_A Q_A e^{-\lambda\frac{395}{47.52}})}{Q_B - Q_A} e^{\lambda\frac{x}{47.52}}$$

$$= \frac{5.1\times 8190 - 1.9\times 4570\times 0.1897}{8190 - 4570} e^{0.00421x}$$

$$= 11.08 e^{0.00421x}$$

由这个式子可以看出，如果知道下游岳阳观测站江水污染物的浓度 $C_B = 5.1$，来判断上游某一个排污口所排出的污染物的浓度时，这个浓度的数量与排污口距离岳阳的观测站的远近 x 是有关系的.

距离 x 的数值越大排出污染物的浓度越高.

(2) 由于我们无法知道污染源的数量和具体的位置，因此就不可能准确地算出污染物的具体的排放量，只能给出一个大致的估计.由前面的讨论我们知道为保持下游的岳阳站观测的排污浓度不变，随着排污口离下游的岳阳观测站距离的增加，排污口的排污量将要增大.因此分析极端的情形，估计污水排放的浓度的范围.

如果排污口都在下游岳阳站附近的上方，也就是相当于只在岳阳附近有一个排污口(相当于 $x = 0$).这时污染物无须经过降解就形成 B 点污染的浓度 $C_B = 5.1$，排污的浓度应该是最低的，有

$$c_1 = \frac{(C_B Q_B - C_A Q_A e^{-\lambda\frac{395}{47.52}})}{Q_B - Q_A} e^{\lambda\frac{0}{47.52}}$$

$$= \frac{C_B Q_B - C_A Q_A e^{-\lambda\frac{395}{47.52}}}{Q_B - Q_A}$$

$$= \frac{8190\times 5.1 - 4570\times 1.9\times e^{-0.2\times 8.3}}{8190 - 4570}$$

$$= \frac{40053}{3620} = 11.06.$$

如果排污口都在上游宜昌站附近的下方，也就是相当于只在宜昌附近有一个排污口(相当于 $x = 395$).这时污染物必须要经过长距离的降解衰减才形成 B 点污染的浓度 $C_B = 5.1$，排污的浓度是最高的，有

$$c_2 = \frac{(C_B Q_B - C_A Q_A e^{-\lambda\frac{395}{47.52}})}{Q_B - Q_A} e^{\lambda\frac{395}{47.52}}$$

$$= \frac{C_B Q_B e^{\lambda\frac{395}{47.52}} - C_A Q_A}{Q_B - Q_A}$$

$$= \frac{8190\times 5.1\times e^{0.2\times 8.3} - 4570\times 1.9}{8190 - 4570}$$

$$= \frac{210993}{3620} = 58.28.$$

由此可知，在这个区段排出的污水的浓度应该介于(11.08，58.28)之间.