赛题另解

2017年全国高中数学联赛加试题另解

中图分类号:O12 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2017)12-0012-07

第一题 如图1,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,I为$\triangle ABC$的内心.以AB为半径作$\odot A$,以IB为半径作$\odot I$,过点B、I的圆Γ与$\odot A$、$\odot I$分别交于点P、Q(不同于点B).设IP与BQ交于点R.证明:$BR\perp CR$.

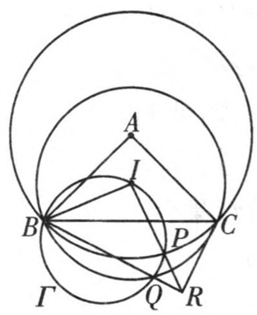

图1

证法1 如图2,联结IC、IQ、PA、PB、PC,作$AD\perp BP$于点D,$IS\perp BQ$于点S.

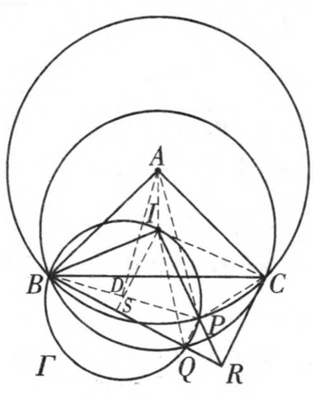

图2

由$AB=AC=AP$,$IB=IC=IQ$,且B、I、P、Q四点共圆,知

$\angle BAD=\angle PAD=\angle BCP$,

$\angle BIS=\angle QIS$,

$\angle ABI=\angle CBI=\angle BCI=\angle ACI$,

$\angle IPB=\angle IQB=\angle IBQ$,

$\angle PIQ=\angle PBQ$.

则$\angle BAD+\angle ABI+\angle IBC+\angle CBP=90°$,

$\angle BIS+\angle IBC+\angle CBP+\angle PBQ=90°$.

故$\angle BCP+\angle BCI=\angle PIQ+\angle QIS$,即

$\angle SIR=\angle ICP$.

又$\angle BIP=\angle RIB$,于是,

$\angle IBP=\angle IRB$

$\Rightarrow IB$为$\triangle BPR$外接圆的切线

$\Rightarrow IB^2=IP\cdot IR=IC^2$.

又$\angle CIP=\angle RIC$,故

$\triangle CIP\backsim\triangle RIC\Rightarrow\angle ICP=\angle IRC$

$\Rightarrow IC$为$\triangle CPR$外接圆的切线

$\Rightarrow\angle IRC=\angle ICP=\angle SIR$

$\Rightarrow IS/\!/CR$.

因此,$BR\perp CR$.

(李耀文 山东省枣庄市第十八中学,277200 王梅丽 重庆市铁路中学,400000)

有元素a、b的集合有两个时,满足条件的集合的个数最多为七个;同时含有元素a、b的集合有三个时,满足条件的集合的个数最多也是七个.

参考文献:

[1] 第28届韩国数学奥林匹克(2015)[J].中等数学,2016(增刊二).

[2] 单墫 编著.算两次[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2009,4.

证法 2　以$\odot I$为基圆作反演变换，圆Γ的像为直线BQ，点P的像为R.

据反演的保角性得

$\angle IBP=\angle BRI,\angle ICP=\angle CRI$,

$\angle BRC=\angle BRI+\angle CRI$

$=\angle IBP+\angle ICP$

$=2\pi-\angle BIC-\angle BPC$

$=2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle BAC\right)-\left(\pi-\frac{1}{2}\angle BAC\right)$

$=\frac{\pi}{2}$.

因此，$BR\perp CR$.

（杨续亮　安徽省安庆市岳西县汤池中学，246620　金智豪　江西省景德镇一中高一(16)班，333000　李奕冲　吉林省四平市第一高级中学高三(16)班，136001）

证法 3　如图 3，设圆Γ的圆心为O，过点O作$OD\perp AB$于点D，$OE\perp AI$于点E，设AO与BC交于点F. 联结OB、OI、OA.

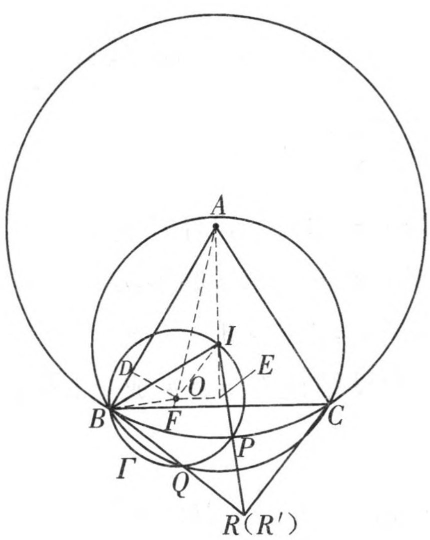

图 3

由$AI\perp BC$，则$OE/\!/BC$.

故$\angle IOE=90°-\angle OIE$

$=90°-\angle BIE+\angle BIO$

$=90°-\angle BAI-\angle ABI+\angle OBI$

$=\angle IBC+\angle OBI=\angle OBD$.

又$OB=OI,\angle ODB=\angle OEI=90°$，则

$\triangle ODB\cong\triangle OEI\Rightarrow OE=BD$.

由两圆相交的性质，知B、Q关于直线OI对称，B、P关于直线OA对称.

因此，$BQ\perp IO$.

又$BC\perp IE$，故

$\angle CBQ=\angle OIE=\angle BOD$.

注意到，

$\angle BIP=\frac{1}{2}\angle BOP=180°-\angle AOB$,

$\angle IRB=180°-\angle BIP-\angle CBQ-\angle IBC$

$=\angle AOB-\angle BOD-\angle IBC$

$=\angle AOD-\frac{1}{2}\angle ABC$

$=90°-\angle BAO-\frac{1}{2}\angle ABC$.

过点C作$CR'\perp BQ$于点R'.

则$BR'=BC\cos\angle CBQ$.

在$\triangle BIR$中，由正弦定理得

$\frac{BR}{\sin\angle BIR}=\frac{BI}{\sin\angle IRB}$,

$BI=\frac{BC}{2\cos\angle IBC}$.

故$BR=BR'$

$\Leftrightarrow\sin\angle BIR$

$=2\sin\angle IRB\cdot\cos\angle IBC\cdot\cos\angle CBQ$

$\Leftrightarrow\sin\angle AOB$

$=2\cos\left(\angle BAO+\frac{1}{2}\angle ABC\right)\cdot$

$\cos\frac{1}{2}\angle ABC\cdot\cos\angle BOD$

$\Leftrightarrow\sin\angle BAO\cdot\cos\angle ABO+$

$\sin\angle ABO\cdot\cos\angle BAO$

$=(\cos\angle BAO+\cos(\angle BAO+\angle ABC))\cdot$

$\sin\angle ABO$

$\Leftrightarrow\sin\angle BAO\cdot\cos\angle ABO$

$=\cos\angle AFC\cdot\sin\angle ABO$

$\Leftrightarrow \sin\angle BAO=\cos\angle AOE\cdot\tan\angle ABO$

$\Leftrightarrow \frac{DO}{OA}=\frac{OE}{AO}\cdot\frac{DO}{DB}\Leftrightarrow OE=BD.$

上式显然成立.

因此,点 R 与 R'重合,即 $BR\perp CR$.

(薛辰昕　浙江省杭州第二中学高三(12)班,310053　申武杰　山西省太原市第五中学389班,030012)

证法4　如图4,设 C、I、P 三点确定圆 Γ_1,与$\odot I$交于点 S(若两圆相切,则视作点 C 与 S 重合,直线 CS 视为两圆公切线).

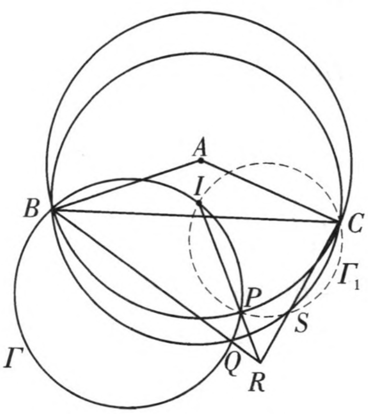

图4

对圆 Γ_1、$\odot I$、圆 Γ 应用根心定理,有 CS、IP、BQ 三线共点于 R.

从而,C、S、R 三点共线.

故$\angle PQR+\angle PSR$

$=\angle BIP+\angle CIP=\angle BIC.$

又$\angle QPR=\angle IBR=\angle IQB=\angle IPB$,类似地,$\angle RPS=\angle IPC$,于是,

$\angle QPS=\angle QPR+\angle RPS$

$=\angle IPB+\angle IPC=\angle BPC.$

注意到,$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$,

$\angle BPC=180^\circ-\angle BAC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A.$

则$\angle QRS$

$=360^\circ-(\angle PQR+\angle PSR)-\angle QPS$

$=360^\circ-\angle BIC-\angle BPC$

$=360^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A\right)-\left(180^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)$

$=90^\circ.$

因此,$BR\perp CR$.

(段宇昕　湖南省长沙市长郡中学高二(1601)班,410000)

第二题　设数列$\{a_n\}$定义为

$a_1=1$,

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n, & a_n\leqslant n;\\ a_n-n, & a_n>n\end{cases}(n=1,2,\cdots).$$

求满足 $a_r<r\leqslant 3^{2\,017}$ 的正整数 r 的个数.

解法1　先证明一个引理.

引理　$a_1=1$,$n\geqslant2$ 时,设

$\frac{3^m-1}{2}<n\leqslant\frac{3^{m+1}-1}{2}(m\geqslant1)$.

则当 $n=\frac{3^m-1}{2}+2k\left(1\leqslant k\leqslant\frac{3^m-1}{2}\right)$时,

$a_n=3^m+k>n$;

当 $n=\frac{3^m-1}{2}+2k+1\left(0\leqslant k\leqslant\frac{3^m-1}{2}\right)$时,

$a_n=\frac{3^m+1}{2}-k\leqslant n$,

当且仅当 $k=0$ 时,上式等号成立.

证明　对 n 用数学归纳法.

(1)当 $n=2,3,4$ 时,易证.

(2)假设结论对 $n\geqslant4$ 成立,考虑 $n+1$ 的情形.

(i)若 $n=\frac{3^m-1}{2}+2k\left(1\leqslant k\leqslant\frac{3^m-1}{2}\right)$,则

$a_n=3^m+k>n$.

故 $a_{n+1}=a_n-n$

$=3^m+k-\frac{3^m-1}{2}-2k=\frac{3^m+1}{2}<n+1.$

(ii)若 $n=\frac{3^m-1}{2}+2k+1\left(0\leqslant k\leqslant\frac{3^m-3}{2}\right)$,则

$$a_n=\frac{3^m+1}{2}-k\leqslant n.$$

故 $a_{n+1}=a_n+n$

$$=\frac{3^m+1}{2}-k+\frac{3^m-1}{2}+2k+1$$

$$=3^m+k+1>n+1.$$

(iii)若 $n=\frac{3^m-1}{2}+2k+1\left(k=\frac{3^m-1}{2}\right)$,即

$$n=\frac{3^{m+1}-1}{2},$$

$$n+1=\frac{3^{m+1}-1}{2}+1\in\left(\frac{3^{m+1}-1}{2},\frac{3^{m+2}-1}{2}\right],$$

则 $a_n=\frac{3^m+1}{2}-k=1$.

故 $a_{n+1}=a_n+n=1+\frac{3^{m+1}-1}{2}$

$$=\frac{3^{m+1}+1}{2}=n+1.$$

引理得证.

现考虑 $a_r<r\leqslant 3^{2\,017}$.

易知 $r\neq 1$. 故 $r\geqslant 2$.

当 $r\in\left(\frac{3^m-1}{2},\frac{3^{m+1}-1}{2}\right]$ $(m=1,2,\cdots,2\,016)$ 时,因为 $a_r<r$,所以,由引理,知 $r-\frac{3^m-1}{2}$ 为不小于 3 的奇数,即

$$r=\frac{3^m-1}{2}+2k+1\left(1\leqslant k\leqslant\frac{3^m-1}{2}\right).$$

故这样的 r 有 $\frac{3^m-1}{2}$ 个.

当 $\frac{3^{2\,017}-1}{2}<r\leqslant 3^{2\,017}$ 时,因为 $a_r<r$,所以,由引理,知 $r-\frac{3^{2\,017}-1}{2}$ 为不小于 3 的奇数.

故这样的 r 有

$$\frac{3^{2\,017}-\frac{3^{2\,017}-1}{2}-2}{2}=\frac{3^{2\,017}-3}{4}(\text{个}).$$

因此,满足 $a_r<r\leqslant 3^{2\,017}$ 的 r 的个数为

$$\sum_{m=1}^{2\,016}\frac{3^m-1}{2}+\frac{3^{2\,017}-3}{4}=-1\,009+\frac{3^{2\,017}-1}{2}.$$

(陈 春 湖北省武钢三中,430080)

解法 2 易得 $a_1=1, a_2=2$.

设 $a_{r_k}=r_k(k=1,2,\cdots)$.

下面运用算两次计算 a_{3r_k-2}.

当 $k\geqslant 3$ 时,有

$$\begin{aligned}&a_{3r_k-2}\\&=(a_{3r_k-2}-a_{3r_k-3})+(a_{3r_k-3}-a_{3r_k-4})+\cdots+\\&\quad(a_{r_k+2}-a_{r_k+1})+(a_{r_k+1}-a_{r_k})+a_{r_k}.\end{aligned}$$

又 $a_{r_k}=r_k, a_{r_k+1}=a_{r_k}+r_k$,

$a_{r_k+2}=a_{r_k+1}-(r_k+1)$,

$a_{r_k+3}=a_{r_k+2}+(r_k+2)$,

$a_{r_k+4}=a_{r_k+3}-(r_k+3)$,

$a_{r_k+5}=a_{r_k+4}+(r_k+4)$,

……

$a_{3r_k-3}=a_{3r_k-4}+(3r_k-4)$,

$a_{3r_k-2}=a_{3r_k-3}-(3r_k-3)$,

并利用 $a_{r_k}=r_k$ 得

$$\begin{aligned}&a_{r_k}+(r_k-(r_k+1))+((r_k+2)-(r_k+3))+\\&\cdots+((3r_k-4)-(3r_k-3))\\&=a_{r_k}+(r_k-(r_k+1))+((r_k+2)-\\&\quad(r_k+3))+\cdots+((r_k+(2r_k-4))-\\&\quad(r_k+(2r_k-3))\\&=r_k+(-1)(r_k-1)=1.\end{aligned}$$

于是,$a_{3r_k-2}=1$.

又 $a_{3r_k-1}=a_{3r_k-2}+3r_k-2=3r_k-1$ 满足 $a_{r_k}=r_k$,则 $r_{k+1}=3r_k-1$,即

$$\frac{r_{k+1}-\frac{1}{2}}{r_k-\frac{1}{2}}=3.$$

故 $\left\{r_k-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项、3 为公比的等比数列.

从而,$r_k=\frac{3^{k-1}+1}{2}$.

经检验，$k=1,2$ 也满足要求.

对任意的正整数 $r\in(r_k,r_{k+1})$ 有

$a_r\neq r$.

令 $r_k<3^m$，$r_{k+1}\geqslant 3^m$.

取 $k=[1+\log_3(2\times 3^m-1)]$，其中，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

从而，在区间 $[1,3^m]$ 内共有

$k=[1+\log_3(2\times 3^m-1)]$

个数满足 $a_r=r$.

故满足 $a_r<r<3^m$ 的正整数 r 的个数为

$$\frac{3^m-[1+\log_3(2\times 3^m-1)]-1}{2}.$$

因此，所求为 $\frac{3^{2\,017}-2\,019}{2}$.

（杨续亮，安徽省安庆市岳西县汤池中学，246620　周阳锋，宁波诺丁汉大学附属中学，315048）

第三题　将 33×33 的方格表中每个格染三种颜色之一，使得每种颜色的格的个数相等. 若相邻两格的颜色不同，则称其公共边为“分隔边”. 试求分隔边条数的最小值.

解　假设分隔边条数不大于 55，记三种颜色为 A、B、C.

若一条分隔边对应的两格为 A 色、B 色或 A 色、C 色，则称该分隔边为 A 色分隔边. 类似定义 B 色、C 色分隔边.

由于 $55<66$，故必有一列无水平分隔边或必有一行无竖直分隔边.

设有一列无水平分隔边，该列均为 A 色.

(1) 若 A 色分隔边条数不大于 32，则必有一行无 A 色分隔边（否则，A 色分隔边条数不小于 33，矛盾）.

故该行也为单色行，且为 A 色行.

于是，水平或竖直的 A 色分隔边条数不大于 16.

不妨设 A 色水平分隔边条数不大于 16，则必有 17 列全为 A 色，这与每色小方格数相等矛盾.

(2) 若 A 色分隔边条数不小于 33，则

(i) 存在全为 B 色的列，也存在全为 C 色的列. 这三列中相邻两列间均至少有 33 条竖直分隔边（每行中至少有一条），故至少有 66 条分隔边，矛盾.

(ii) 存在全为 B 色的列，不存在全为 C 色的列.

由于不存在全为 C 色的行与列，故

C 色分隔边条数

$\geqslant C$ 色所有格在水平和竖直方向上投影长度的长　①

$\geqslant 39$.

否则，

C 色格数

$\leqslant C$ 色所有格在水平和竖直方向上投影长度的乘积

$\leqslant 19\times 19<363$，

矛盾.

若一个 C 色格夹在全为 A 色列与全为 B 色列之间，则该 C 色格在水平方向上的投影线段只有一条. 而在该行中至少产生 2 条 C 色分隔边，故该行对结论①中左边与右边的差的贡献为 1. 而 A 色列与 B 色列之间每行均有一条竖直分隔边，设有 k 行中 A 色列与 B 色列之间有 C 色格，于是，

C 色格数 $\geqslant 39-k+33+k=72$，

矛盾.

(iii) 不存在全为 B 色的列，也不存在全为 C 色的列.

同 (ii)，B 色分隔边与 C 色分隔边均至少为 39 条，且每条分隔边至少为两种颜色的分隔边，故

分隔边总数 $\geqslant\frac{33+39+39}{2}=55.5$，矛盾.

构造分隔边数为 56 的例子，如图 5.

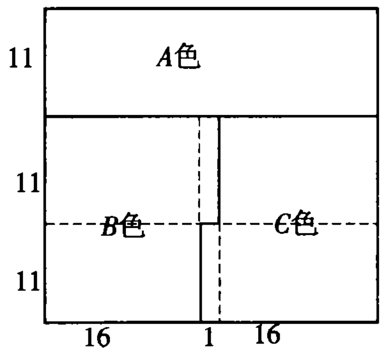

图 5

因此，所求最小值为 56.

（申武杰　山西省太原市第五中学 389 班，030012　荣仲　重庆市第十一中学校，400061）

第四题　设 m、$n(m\geqslant n)$ 均为大于 1 的整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个不超过 m 的互不相同的正整数，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素. 证明：对任意实数 x，均存在一个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得 $\|a_ix\|\geqslant\frac{2}{m(m+1)}\|x\|$，其中，$\|y\|$ 表示实数 y 到与其最近的整数的距离.

证明　将结论加强为：

$$\|a_ix\|\geqslant\frac{6}{m^2+m+6}\|x\|,$$

其中，对于 $m\geqslant2$，有

$$\frac{6}{m^2+m+6}>\frac{2}{m(m+1)}\Leftrightarrow m^2+m>3.$$

下面证明加强命题.

首先研究 $f(x)=\|x\|$ 的基本性质.

引理　(1) 对任意整数 u 和实数 a，有

$\|a+u\|=\|a\|$；

(2) 对任意实数 a、b，有

$\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$，

$\|a-b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$；

(3) 对任意整数 v 和实数 a，有

$\|va\|\leqslant|v|\,\|a\|$；

(4) 对任意 k 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 及 k 个整数 $v_1,v_2,\cdots,v_k$，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}v_jx_j\right\|\leqslant\sum_{j=1}^{k}|v_j|\,\|x_j\|.$$

证明　(1) 显然成立.

(2) 由 (1)，设 a、$b\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，此时，

$\|a\|=|a|$，$\|b\|=|b|$.

若 $ab\leqslant0$，设 $a\leqslant0\leqslant b$，则

$$a+b\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\|a+b\|=|a+b|\leqslant|a|+|b|$$
$$=\|a\|+\|b\|.$$

若 $ab>0$，当 $|a|+|b|\geqslant\frac{1}{2}$ 时，由于

$$\|a+b\|\leqslant\frac{1}{2},$$

故 $\|a+b\|\leqslant\frac{1}{2}\leqslant|a|+|b|=\|a\|+\|b\|$.

当 $|a|+|b|<\frac{1}{2}$ 时，有

$$|a+b|=|a|+|b|<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a+b\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\|a+b\|=|a+b|$$
$$\leqslant|a|+|b|=\|a\|+\|b\|.$$

又 $\|b\|=\|-b\|$，由前面的证明有

$$\|a-b\|=\|a+(-b)\|\leqslant\|a\|+\|-b\|$$
$$=\|a\|+\|b\|.$$

(3) 若 $v>0$，由 (2) 及数学归纳法，结论显然成立.

若 $v=0$，显然成立.

若 $v<0$，由于

$$\|va\|=\|-va\|\leqslant|-v|\,\|a\|=|v|\,\|a\|,$$

因此，(3) 成立.

(4) 当 $k=1$ 时，由 (3) 知结论成立.

假设对于 $k=t$ 时，结论成立.

当 $k=t+1$ 时,由(2)、(3)及归纳假设得

$$\left\|\sum_{j=1}^{t+1} v_j x_j\right\| \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{t} v_j x_j\right\| + \| v_{t+1} x_{t+1} \|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{t+1} |v_j| \, \| x_j \| .$$

综上,结论成立.

引理得证.

不妨设 $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqslant m$.

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有两个数相邻,记为 a_j、$a_{j+1}(a_{j+1}=a_j+1)$.

由(4)知

$$\| x \| = \| -a_j x + a_{j+1} x \| \leqslant \| a_j x \| + \| a_{j+1} x \| .$$

由平均值原理,知存在 $i \in \{j, j+1\}$,有

$$\| a_i x \| \geqslant \frac{1}{2} \| x \| \geqslant \frac{6}{m^2+m+6} \| x \| .$$

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中不存在两个数相邻,则

$$m \geqslant a_n \geqslant a_{n-1}+2 \geqslant \cdots \geqslant a_1+2(n-1)$$

$$\Rightarrow a_1 \leqslant m-2n+2, a_2 \leqslant m-2n+4, \cdots, a_n \leqslant m.$$

由于 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$,故由 Bezout 定理,知存在 $u_1, u_2, \cdots, u_n \in \mathbf{Z}$,使得

$$\sum_{j=1}^{n} u_j a_j = 1. \qquad ①$$

设 $\| a_i x \| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \| a_j x \|$.

由(4)知

$$\| x \| = \left\|\sum_{j=1}^{n} u_j a_j x\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |u_j| \, \| a_j x \|$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|\right) \| a_i x \| .$$

故 $\| a_i x \| \geqslant \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j|} \| x \|$.

只需证:存在一组满足式①的整数组 $u_1, u_2, \cdots, u_n$,使得

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j| \leqslant \frac{m^2+m+6}{6}.$$

由于 $a_1 = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$,对于任意 $2 \leqslant i \leqslant n$ 及任意整数 k,有

$$u_1 a_1 + u_i a_i = (u_1 + k a_i) a_1 + (u_i - k a_1) a_i .$$

取 $k = \left\|\dfrac{u_i}{a_1}\right\|$,则

$$k = \left\|\frac{u_i}{a_1}\right\| \Leftrightarrow \left|\frac{u_i}{a_1} - k\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |u_i - k a_1| \leqslant \frac{a_1}{2} .$$

故不妨设 $|u_i| \leqslant \dfrac{a_1}{2}$ 对任意 $2 \leqslant i \leqslant n$ 成立. 此时,

$$|u_1| = \left|\frac{1}{a_1}\left(1 - \sum_{j=2}^{n} a_j u_j\right)\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{a_1}\right| + \sum_{j=2}^{n} \left|\frac{a_j u_j}{a_1}\right|$$

$$\leqslant 1 + \sum_{j=2}^{n} \left|\frac{a_j}{2}\right| .$$

故 $\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j| \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{j=2}^{n} a_j + (n-1) \dfrac{a_1}{2}$.

结合 $a_j \leqslant m-2n+2j$,有

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j|$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} (m-2n+2j) + \frac{(n-1)(m-2n+2)}{2}$$

$$= 1 + \frac{(n-1)(m-n+2)}{2} + \frac{(n-1)(m-2n+2)}{2}$$

$$= 1 + \frac{(3n-3)((2m+1)-(3n-3))}{6}$$

$$\leqslant 1 + \frac{(2m+1)^2}{24} = \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{6} m + \frac{25}{24} .$$

由 $\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j| \in \mathbf{Z}$,有

$$6 \sum_{j=1}^{n} |u_j| \leqslant \left[m^2 + m + \frac{25}{4}\right] = m^2 + m + 6$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |u_j| \leqslant \frac{m^2+m+6}{6},$$

其中,$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

故 $\| a_i x \| \geqslant \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j|} \| x \| \geqslant \dfrac{6}{m^2+m+6} \| x \|$.

综上,加强命题成立.

(王首樵　天津市耀华中学实验五年(3)班,300040)