

赛题另解

2017 年全国高中数学联赛加试题另解

中图分类号:012 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2017)12-0012-07

第一题 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, I 为 $\triangle ABC$ 的内心. 以 AB 为半径作 $\odot A$, 以 IB 为半径作 $\odot I$, 过点 B, I 的圆 Γ 与 $\odot A, \odot I$ 分别交于点 P, Q (不同于点 B). 设 IP 与 BQ 交于点 R . 证明: $BR \perp CR$.

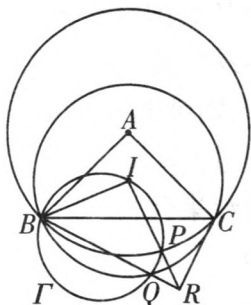


图 1

证法 1 如图 2, 联结 IC, IQ, PA, PB, PC , 作 $AD \perp BP$ 于点 $D, IS \perp BQ$ 于点 S .

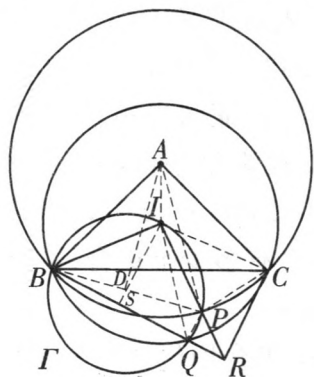


图 2

由 $AB = AC = AP, IB = IC = IQ$, 且 B, I, P, Q 四点共圆, 知

$$\angle BAD = \angle PAD = \angle BCP,$$

$$\angle BIS = \angle QIS,$$

$$\angle ABI = \angle CBI = \angle BCI = \angle ACI,$$

$$\angle IPB = \angle IQB = \angle IBQ,$$

$$\angle PIQ = \angle PBQ.$$

$$\text{则 } \angle BAD + \angle ABI + \angle IBC + \angle CBP = 90^\circ,$$

$$\angle BIS + \angle IBC + \angle CBP + \angle PBQ = 90^\circ.$$

$$\text{故 } \angle BCP + \angle BCI = \angle PIQ + \angle QIS, \text{ 即}$$

$$\angle SIR = \angle ICP.$$

$$\text{又 } \angle BIP = \angle RIB, \text{ 于是,}$$

$$\angle IBP = \angle IRB$$

$$\Rightarrow IB \text{ 为 } \triangle BPR \text{ 外接圆的切线}$$

$$\Rightarrow IB^2 = IP \cdot IR = IC^2.$$

$$\text{又 } \angle CIP = \angle RIC, \text{ 故}$$

$$\triangle CIP \sim \triangle RIC \Rightarrow \angle ICP = \angle IRC$$

$$\Rightarrow IC \text{ 为 } \triangle CPR \text{ 外接圆的切线}$$

$$\Rightarrow \angle IRC = \angle ICP = \angle SIR$$

$$\Rightarrow IS \parallel CR.$$

$$\text{因此, } BR \perp CR.$$

(李耀文 山东省枣庄市第十八中学,

277200 王梅丽 重庆市铁路中学, 400000)

有元素 a, b 的集合有两个时, 满足条件的集合的个数最多为七个; 同时含有元素 a, b 的集合有三个时, 满足条件的集合的个数最多也是七个.

参考文献:

- [1] 第 28 届韩国数学奥林匹克(2015)[J]. 中等数学, 2016(增刊二).
- [2] 单增 编著. 算两次[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009, 4.

证法2 以 $\odot I$ 为基圆作反演变换,圆 Γ 的像为直线 BQ ,点 P 的像为 R .

据反演的保角性得

$$\begin{aligned} \angle IBP &= \angle BRI, \angle ICP = \angle CRI, \\ \angle BRC &= \angle BRI + \angle CRI \\ &= \angle IBP + \angle ICP \\ &= 2\pi - \angle BIC - \angle BPC \\ &= 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC\right) - \left(\pi - \frac{1}{2}\angle BAC\right) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

因此, $BR \perp CR$.

(杨续亮 安徽省安庆市岳西县汤池中学,246620 金智豪 江西省景德镇一中高一(16)班,333000 李奕冲 吉林省四平市第一高级中学高三(16)班,136001)

证法3 如图3,设圆 Γ 的圆心为 O ,过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D , $OE \perp AI$ 于点 E ,设 AO 与 BC 交于点 F .联结 OB 、 OI 、 OA .

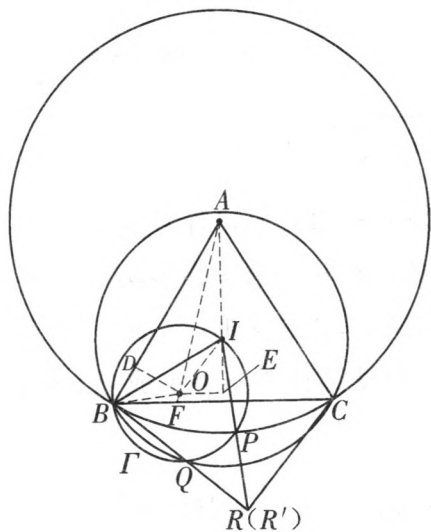


图3

由 $AI \perp BC$,则 $OE \parallel BC$.

$$\begin{aligned} \text{故 } \angle IOE &= 90^\circ - \angle OIE \\ &= 90^\circ - \angle BIE + \angle BIO \\ &= 90^\circ - \angle BAI - \angle ABI + \angle OBI \\ &= \angle IBC + \angle OBI = \angle OBD. \end{aligned}$$

又 $OB = OI$, $\angle ODB = \angle OEI = 90^\circ$,则 $\triangle ODB \cong \triangle OEI \Rightarrow OE = BD$.

由两圆相交的性质,知 B 、 Q 关于直线 OI 对称, B 、 P 关于直线 OA 对称.

因此, $BQ \perp IO$.

又 $BC \perp IE$,故

$$\angle CBQ = \angle OIE = \angle BOD.$$

注意到,

$$\begin{aligned} \angle BIP &= \frac{1}{2}\angle BOP = 180^\circ - \angle AOB, \\ \angle IRB &= 180^\circ - \angle BIP - \angle CBQ - \angle IBC \\ &= \angle AOB - \angle BOD - \angle IBC \\ &= \angle AOD - \frac{1}{2}\angle ABC \\ &= 90^\circ - \angle BAO - \frac{1}{2}\angle ABC. \end{aligned}$$

过点 C 作 $CR' \perp BQ$ 于点 R' .

则 $BR' = BC \cos \angle CBQ$.

在 $\triangle BIR$ 中,由正弦定理得

$$\frac{BR}{\sin \angle BIR} = \frac{BI}{\sin \angle IRB'}$$

$$BI = \frac{BC}{2 \cos \angle IBC}.$$

故 $BR = BR'$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sin \angle BIR \\ &= 2 \sin \angle IRB \cdot \cos \angle IBC \cdot \cos \angle CBQ \\ &\Leftrightarrow \sin \angle AOB \\ &= 2 \cos \left(\angle BAO + \frac{1}{2}\angle ABC \right) \cdot \\ &\quad \cos \frac{1}{2}\angle ABC \cdot \cos \angle BOD \\ &\Leftrightarrow \sin \angle BAO \cdot \cos \angle ABO + \\ &\quad \sin \angle ABO \cdot \cos \angle BAO \\ &= (\cos \angle BAO + \cos(\angle BAO + \angle ABC)) \cdot \\ &\quad \sin \angle ABO \\ &\Leftrightarrow \sin \angle BAO \cdot \cos \angle ABO \\ &= \cos \angle AFC \cdot \sin \angle ABO \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle BAO = \cos \angle AOE \cdot \tan \angle ABO$$

$$\Leftrightarrow \frac{DO}{OA} = \frac{OE}{AO} \cdot \frac{DO}{DB} \Leftrightarrow OE = BD.$$

上式显然成立.

因此,点 R 与 R' 重合,即 $BR \perp CR$.

(薛辰昕 浙江省杭州第二中学高三(12)班,310053 申武杰 山西省太原市第五中学389班,030012)

证法4 如图4,设 C, I, P 三点确定圆 Γ_1 ,与 $\odot I$ 交于点 S (若两圆相切,则视作点 C 与 S 重合,直线 CS 视为两圆公切线).

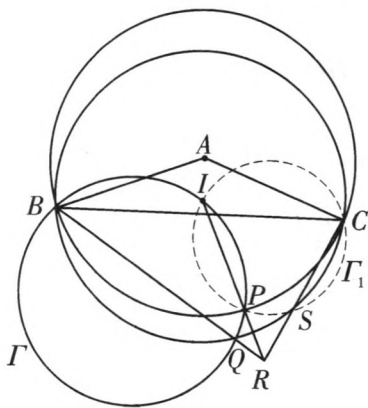


图4

对圆 $\Gamma_1, \odot I$ 、圆 Γ 应用根心定理,有 CS 、 IP 、 BQ 三线共点于 R .

从而, C, S, R 三点共线.

$$\begin{aligned} \text{故 } \angle PQR + \angle PSR \\ = \angle BIP + \angle CIP = \angle BIC. \end{aligned}$$

又 $\angle QPR = \angle IBR = \angle IQB = \angle IPB$, 类似地, $\angle RPS = \angle IPC$, 于是,

$$\begin{aligned} \angle QPS &= \angle QPR + \angle RPS \\ &= \angle IPB + \angle IPC = \angle BPC. \end{aligned}$$

注意到, $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$,

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle A.$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \angle QRS \\ = 360^\circ - (\angle PQR + \angle PSR) - \angle QPS \end{aligned}$$

$$= 360^\circ - \angle BIC - \angle BPC$$

$$= 360^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2} \angle A\right) - \left(180^\circ - \frac{1}{2} \angle A\right)$$

$$= 90^\circ.$$

因此, $BR \perp CR$.

(段宇昕 湖南省长沙市长郡中学高二(1601)班,410000)

第二题 设数列 $\{a_n\}$ 定义为

$$a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n, & a_n \leq n; \\ a_n - n, & a_n > n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

求满足 $a_r < r \leq 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数.

解法1 先证明一个引理.

引理 $a_1 = 1, n \geq 2$ 时, 设

$$\frac{3^m - 1}{2} < n \leq \frac{3^{m+1} - 1}{2} \quad (m \geq 1).$$

则当 $n = \frac{3^m - 1}{2} + 2k \left(1 \leq k \leq \frac{3^m - 1}{2}\right)$ 时,

$$a_n = 3^m + k > n;$$

当 $n = \frac{3^m - 1}{2} + 2k + 1 \left(0 \leq k \leq \frac{3^m - 1}{2}\right)$ 时,

$$a_n = \frac{3^m + 1}{2} - k \leq n,$$

当且仅当 $k = 0$ 时, 上式等号成立.

证明 对 n 用数学归纳法.

(1) 当 $n = 2, 3, 4$ 时, 易证.

(2) 假设结论对 $n \geq 4$ 成立, 考虑 $n + 1$ 的情形.

(i) 若 $n = \frac{3^m - 1}{2} + 2k \left(1 \leq k \leq \frac{3^m - 1}{2}\right)$, 则

$$a_n = 3^m + k > n.$$

$$\text{故 } a_{n+1} = a_n - n$$

$$= 3^m + k - \frac{3^m - 1}{2} - 2k = \frac{3^m + 1}{2} < n + 1.$$

(ii) 若 $n = \frac{3^m - 1}{2} + 2k + 1 \left(0 \leq k \leq \frac{3^m - 3}{2}\right)$, 则

$$a_n = \frac{3^m + 1}{2} - k \leq n.$$

故 $a_{n+1} = a_n + n$

$$= \frac{3^m + 1}{2} - k + \frac{3^m - 1}{2} + 2k + 1$$

$$= 3^m + k + 1 > n + 1.$$

(iii) 若 $n = \frac{3^m - 1}{2} + 2k + 1 (k = \frac{3^m - 1}{2})$, 即

$$n = \frac{3^{m+1} - 1}{2},$$

$$n + 1 = \frac{3^{m+1} - 1}{2} + 1 \in \left(\frac{3^{m+1} - 1}{2}, \frac{3^{m+2} - 1}{2} \right],$$

$$\text{则 } a_n = \frac{3^m + 1}{2} - k = 1.$$

$$\text{故 } a_{n+1} = a_n + n = 1 + \frac{3^{m+1} - 1}{2}$$

$$= \frac{3^{m+1} + 1}{2} = n + 1.$$

引理得证.

现考虑 $a_r < r \leq 3^{2017}$.

易知 $r \neq 1$. 故 $r \geq 2$.

当 $r \in \left(\frac{3^m - 1}{2}, \frac{3^{m+1} - 1}{2} \right] (m = 1, 2, \dots, 2016)$

时, 因为 $a_r < r$, 所以, 由引理, 知 $r - \frac{3^m - 1}{2}$ 为

不小于 3 的奇数, 即

$$r = \frac{3^m - 1}{2} + 2k + 1 \left(1 \leq k \leq \frac{3^m - 1}{2} \right).$$

故这样的 r 有 $\frac{3^m - 1}{2}$ 个.

当 $\frac{3^{2017} - 1}{2} < r \leq 3^{2017}$ 时, 因为 $a_r < r$, 所以,

由引理, 知 $r - \frac{3^{2017} - 1}{2}$ 为不小于 3 的奇数.

故这样的 r 有

$$\frac{3^{2017} - \frac{3^{2017} - 1}{2} - 2}{2} = \frac{3^{2017} - 3}{4} \text{ (个)}.$$

因此, 满足 $a_r < r \leq 3^{2017}$ 的 r 的个数为

$$\sum_{m=1}^{2016} \frac{3^m - 1}{2} + \frac{3^{2017} - 3}{4} = -1009 + \frac{3^{2017} - 1}{2}.$$

(陈春 湖北省武钢三中, 430080)

解法 2 易得 $a_1 = 1, a_2 = 2$.

设 $a_{r_k} = r_k (k = 1, 2, \dots)$.

下面运用算两次计算 $a_{3r_k - 2}$.

当 $k \geq 3$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_{3r_k - 2} &= (a_{3r_k - 2} - a_{3r_k - 3}) + (a_{3r_k - 3} - a_{3r_k - 4}) + \dots + \\ &\quad (a_{r_k + 2} - a_{r_k + 1}) + (a_{r_k + 1} - a_{r_k}) + a_{r_k}. \end{aligned}$$

又 $a_{r_k} = r_k, a_{r_k + 1} = a_{r_k} + r_k,$

$$a_{r_k + 2} = a_{r_k + 1} - (r_k + 1),$$

$$a_{r_k + 3} = a_{r_k + 2} + (r_k + 2),$$

$$a_{r_k + 4} = a_{r_k + 3} - (r_k + 3),$$

$$a_{r_k + 5} = a_{r_k + 4} + (r_k + 4),$$

.....

$$a_{3r_k - 3} = a_{3r_k - 4} + (3r_k - 4),$$

$$a_{3r_k - 2} = a_{3r_k - 3} - (3r_k - 3),$$

并利用 $a_{r_k} = r_k$ 得

$$\begin{aligned} &a_{r_k} + (r_k - (r_k + 1)) + ((r_k + 2) - (r_k + 3)) + \\ &\dots + ((3r_k - 4) - (3r_k - 3)) \\ &= a_{r_k} + (r_k - (r_k + 1)) + ((r_k + 2) - \\ &\quad (r_k + 3)) + \dots + ((r_k + (2r_k - 4)) - \\ &\quad (r_k + (2r_k - 3))) \\ &= r_k + (-1)(r_k - 1) = 1. \end{aligned}$$

于是, $a_{3r_k - 2} = 1$.

又 $a_{3r_k - 1} = a_{3r_k - 2} + 3r_k - 2 = 3r_k - 1$ 满足

$a_{r_k} = r_k$, 则 $r_{k+1} = 3r_k - 1$, 即

$$\frac{r_{k+1} - \frac{1}{2}}{r_k - \frac{1}{2}} = 3.$$

故 $\left\{ r_k - \frac{1}{2} \right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项、3 为公比的等比数列.

$$\text{从而, } r_k = \frac{3^{k-1} + 1}{2}.$$

经检验, $k=1, 2$ 也满足要求.

对任意的正整数 $r \in (r_k, r_{k+1})$ 有

$$a_r \neq r.$$

$$\text{令 } r_k < 3^m, r_{k+1} \geq 3^m.$$

取 $k = [1 + \log_3(2 \times 3^m - 1)]$, 其中, $[x]$

表示不超过实数 x 的最大整数.

从而, 在区间 $[1, 3^m]$ 内共有

$$k = [1 + \log_3(2 \times 3^m - 1)]$$

个数满足 $a_r = r$.

故满足 $a_r < r < 3^m$ 的正整数 r 的个数为

$$\frac{3^m - [1 + \log_3(2 \times 3^m - 1)] - 1}{2}.$$

$$\text{因此, 所求为 } \frac{3^{2017} - 2019}{2}.$$

(杨续亮, 安徽省安庆市岳西县汤池中学, 246620 周阳锋, 宁波诺丁汉大学附属中学, 315048)

第三题 将 33×33 的方格表中每个格染三种颜色之一, 使得每种颜色的格的个数相等. 若相邻两格的颜色不同, 则称其公共边为“分隔边”. 试求分隔边条数的最小值.

解 假设分隔边条数不大于 55, 记三种颜色为 A, B, C .

若一条分隔边对应的两格为 A 色、 B 色或 A 色、 C 色, 则称该分隔边为 A 色分隔边. 类似定义 B 色、 C 色分隔边.

由于 $55 < 66$, 故必有一列无水平分隔边或必有一行无竖直分隔边.

设有一列无水平分隔边, 该列均为 A 色.

(1) 若 A 色分隔边条数不大于 32, 则必有一行无 A 色分隔边 (否则, A 色分隔边条数不小于 33, 矛盾).

故该行也为单色行, 且为 A 色行.

于是, 水平或竖直的 A 色分隔边条数不大于 16.

不妨设 A 色水平分隔边条数不大于 16, 则必有 17 列全为 A 色, 这与每色小方格数相等矛盾.

(2) 若 A 色分隔边条数不小于 33, 则

(i) 存在全为 B 色的列, 也存在全为 C 色的列. 这三列中相邻两列间均至少有 33 条竖直分隔边 (每行中至少有一条), 故至少有 66 条分隔边, 矛盾.

(ii) 存在全为 B 色的列, 不存在全为 C 色的列.

由于不存在全为 C 色的行与列, 故

C 色分隔边条数

$$\geq C \text{ 色所有格在水平和竖直方向上投影长度的长} \quad \textcircled{1}$$

$$\geq 39.$$

否则,

C 色格数

$$\leq C \text{ 色所有格在水平和竖直方向上投影长度的乘积}$$

$$\leq 19 \times 19 < 363,$$

矛盾.

若一个 C 色格夹在全为 A 色列与全为 B 色列之间, 则该 C 色格在水平方向上的投影线段只有一条. 而在该行中至少产生 2 条 C 色分隔边, 故该行对结论①中左边与右边的差的贡献为 1. 而 A 色列与 B 色列之间每行均有一条竖直分隔边, 设有 k 行中 A 色列与 B 色列之间有 C 色格, 于是,

$$C \text{ 色格数} \geq 39 - k + 33 + k = 72,$$

矛盾.

(iii) 不存在全为 B 色的列, 也不存在全为 C 色的列.

同(ii), B 色分隔边与 C 色分隔边均至少为 39 条, 且每条分隔边至少为两种颜色的分隔边, 故

分隔边总数 $\geq \frac{33+39+39}{2} = 55.5$, 矛盾.

构造分隔边数为 56 的例子, 如图 5.

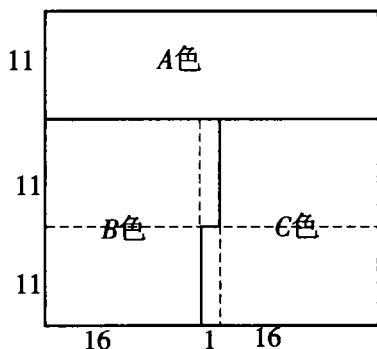


图 5

因此, 所求最小值为 56.

(申武杰 山西省太原市第五中学 389 班, 030012 荣仲 重庆市第十一中学校, 400061)

第四题 设 $m, n (m \geq n)$ 均为大于 1 的整数, a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个不超过 m 的互不相同的正整数, 且 a_1, a_2, \dots, a_n 互素. 证明: 对任意实数 x , 均存在一个 $i (1 \leq i \leq n)$, 使得

$$\|a_i x\| \geq \frac{2}{m(m+1)} \|x\|, \text{ 其中, } \|y\| \text{ 表示实数 } y \text{ 到与其最近的整数的距离.}$$

证明 将结论加强为:

$$\|a_i x\| \geq \frac{6}{m^2 + m + 6} \|x\|,$$

其中, 对于 $m \geq 2$, 有

$$\frac{6}{m^2 + m + 6} > \frac{2}{m(m+1)} \Leftrightarrow m^2 + m > 3.$$

下面证明加强命题.

首先研究 $f(x) = \|x\|$ 的基本性质.

引理 (1) 对任意整数 u 和实数 a , 有

$$\|a + u\| = \|a\|;$$

(2) 对任意实数 a, b , 有

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

$$\|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|;$$

(3) 对任意整数 v 和实数 a , 有

$$\|va\| \leq |v| \|a\|;$$

(4) 对任意 k 个实数 x_1, x_2, \dots, x_k 及 k 个整数 v_1, v_2, \dots, v_k , 有

$$\left\| \sum_{j=1}^k v_j x_j \right\| \leq \sum_{j=1}^k |v_j| \|x_j\|.$$

证明 (1) 显然成立.

(2) 由(1), 设 $a, b \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 此时,

$$\|a\| = |a|, \|b\| = |b|.$$

若 $ab \leq 0$, 设 $a \leq 0 \leq b$, 则

$$a + b \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|a + b\| &= |a + b| \leq |a| + |b| \\ &= \|a\| + \|b\|. \end{aligned}$$

若 $ab > 0$, 当 $|a| + |b| \geq \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$\|a + b\| \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } \|a + b\| \leq \frac{1}{2} \leq |a| + |b| = \|a\| + \|b\|.$$

当 $|a| + |b| < \frac{1}{2}$ 时, 有

$$|a + b| = |a| + |b| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a + b \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|a + b\| &= |a + b| \\ &\leq |a| + |b| = \|a\| + \|b\|. \end{aligned}$$

又 $\|b\| = \|-b\|$, 由前面的证明有

$$\begin{aligned} \|a - b\| &= \|a + (-b)\| \leq \|a\| + \|-b\| \\ &= \|a\| + \|b\|. \end{aligned}$$

(3) 若 $v > 0$, 由(2)及数学归纳法, 结论显然成立.

若 $v = 0$, 显然成立.

若 $v < 0$, 由于

$$\|va\| = \|-va\| \leq |-v| \|a\| = |v| \|a\|,$$

因此, (3) 成立.

(4) 当 $k = 1$ 时, 由(3)知结论成立.

假设对于 $k = t$ 时, 结论成立.

当 $k=t+1$ 时,由(2)、(3)及归纳假设得

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{t+1} v_j x_j \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^t v_j x_j \right\| + \|v_{t+1} x_{t+1}\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{t+1} |v_j| \|x_j\|. \end{aligned}$$

综上,结论成立.

引理得证.

不妨设 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq m$.

若 a_1, a_2, \dots, a_n 中有两个数相邻,记为 a_j, a_{j+1} ($a_{j+1} = a_j + 1$).

由(4)知

$$\|x\| = \|-a_j x + a_{j+1} x\| \leq \|a_j x\| + \|a_{j+1} x\|.$$

由平均值原理,知存在 $i \in \{j, j+1\}$,有

$$\|a_i x\| \geq \frac{1}{2} \|x\| \geq \frac{6}{m^2 + m + 6} \|x\|.$$

若 a_1, a_2, \dots, a_n 中不存在两个数相邻,则

$$m \geq a_n \geq a_{n-1} + 2 \geq \dots \geq a_1 + 2(n-1)$$

$$\Rightarrow a_1 \leq m - 2n + 2, a_2 \leq m - 2n + 4, \dots, a_n \leq m.$$

由于 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$,故由 Bezout 定理,知存在 $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbf{Z}$,使得

$$\sum_{j=1}^n u_j a_j = 1. \quad (1)$$

$$\text{设 } \|a_i x\| = \max_{1 \leq j \leq n} \|a_j x\|.$$

由(4)知

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n u_j a_j x \right\| \leq \sum_{j=1}^n |u_j| \|a_j x\|$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^n |u_j| \right) \|a_i x\|.$$

$$\text{故 } \|a_i x\| \geq \frac{1}{\sum_{j=1}^n |u_j|} \|x\|.$$

只需证:存在一组满足式①的整数组 u_1, u_2, \dots, u_n ,使得

$$\sum_{j=1}^n |u_j| \leq \frac{m^2 + m + 6}{6}.$$

由于 $a_1 = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$,对于任意 $2 \leq i \leq n$ 及任意整数 k ,有

$$u_1 a_1 + u_i a_i = (u_1 + k a_i) a_1 + (u_i - k a_1) a_i.$$

取 $k = \left\lfloor \frac{u_i}{a_1} \right\rfloor$,则

$$k = \left\lfloor \frac{u_i}{a_1} \right\rfloor \Leftrightarrow \left| \frac{u_i}{a_1} - k \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |u_i - k a_1| \leq \frac{a_1}{2}.$$

故不妨设 $|u_i| \leq \frac{a_1}{2}$ 对任意 $2 \leq i \leq n$ 成立.此时,

$$|u_1| = \left| \frac{1}{a_1} \left(1 - \sum_{j=2}^n a_j u_j \right) \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{a_1} \right| + \sum_{j=2}^n \left| \frac{a_j u_j}{a_1} \right|$$

$$\leq 1 + \sum_{j=2}^n \left| \frac{a_j}{2} \right|.$$

$$\text{故 } \sum_{j=1}^n |u_j| \leq 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n a_j + (n-1) \frac{a_1}{2}.$$

结合 $a_j \leq m - 2n + 2j$,有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |u_j| &\leq 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n (m - 2n + 2j) + \frac{(n-1)(m - 2n + 2)}{2} \\ &= 1 + \frac{(n-1)(m - n + 2)}{2} + \frac{(n-1)(m - 2n + 2)}{2} \\ &= 1 + \frac{(3n-3)((2m+1) - (3n-3))}{6} \end{aligned}$$

$$\leq 1 + \frac{(2m+1)^2}{24} = \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{6} m + \frac{25}{24}.$$

由 $\sum_{j=1}^n |u_j| \in \mathbf{Z}$,有

$$6 \sum_{j=1}^n |u_j| \leq \left[m^2 + m + \frac{25}{4} \right] = m^2 + m + 6$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n |u_j| \leq \frac{m^2 + m + 6}{6},$$

其中, $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

$$\text{故 } \|a_i x\| \geq \frac{1}{\sum_{j=1}^n |u_j|} \|x\| \geq \frac{6}{m^2 + m + 6} \|x\|.$$

综上,加强命题成立.

(王首樵 天津市耀华中学实验五年
(3)班,300040)