数学奥林匹克小丛书 高中卷 14

第二版

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

高中数学竞赛中的解题方法与策略

熊 斌 何忆捜 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第二版） 编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目 录

1 化归

所谓"化归"，是指把要解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经解决或者能比较容易解决的问题中去，最终获得原问题解答的一种解题策略，化归从某种意义上来说就是"化简". 匈牙利著名数学家罗莎·彼得(Rosza Peter)在他的名著《无穷的玩艺》中，通过一个十分生动而有趣的笑话，来说明数学家是如何用化归的思想方法来解题的. 有人提出了这样一个问题："假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，你想烧开水，应当怎样去做?"对此，某人回答说："在壶中灌上水，点燃煤气，再把壶放到煤气灶上."提问者肯定了这一回答，但是，他又追问道："如果其他的条件都没有变化，只是水壶中已经有了足够多的水，那么你又应该怎样去做?"这时被提问者一定会大声而有把握地回答说："点燃煤气，再把水壶放上去."但是更完善的回答应该是这样："只有物理学家才会按照刚才所说的办法去做，而数学家们却会回答：'只须把水壶中的水倒掉，问题就化归为前面所说的问题了.'""把水倒掉"，这就是化归，这就是数学家们常用的方法.

我们常常采用：(1)把复杂问题化归为简单问题；(2)把陌生问题化归为熟悉问题；(3)把一般情况化归为特殊情况；(4)把一个命题化归为一个更强的命题.

先看如下两个例子：

例 1 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解 作三角代换：令$a_1=\frac{1}{3}=\cos t$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$a_2=\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}=\cos\frac{t}{2},$$

同理可得$a_3=\cos\frac{t}{2^2}$，$a_4=\cos\frac{t}{2^3}$，…，一般地，有$a_n=\cos\frac{t}{2^{n-1}}$，其中$t=\arccos\frac{1}{3}$，故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\cos\left(\frac{1}{2^{n-1}}\arccos\frac{1}{3}\right)$.

例 2 若关于 z 的方程 $z^2+c\,|\,z\,|^2=1+2\mathrm{i}$ 有复数解，求实数 c 的取值范围.

解 设原方程有复数解 $z_0=a+b\mathrm{i}\ (a,\ b\in\mathbf{R})$，则

$$a^2-b^2+2ab\mathrm{i}+c(a^2+b^2)=1+2\mathrm{i},$$

由实部和虚部分别相等可得到如下方程组：

$$\begin{cases}(c+1)a^2+(c-1)b^2=1,\\ 2ab=2,\end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases}(c+1)a^4-a^2+(c-1)=0,\\ b=\dfrac{1}{a}.\end{cases} \qquad ①$$

则原方程有复数解 z_0 当且仅当关于 a，b 的方程组①有实数解，考虑到 b 由 a 决定且 $a^2>0$，这又等价于关于 x 的一元二次方程

$$(c+1)x^2-x+(c-1)=0 \qquad ②$$

存在正数解.

(1) 若 $c\leqslant-1$，因为 $(c+1)x^2\leqslant0$，$c-1<0$，故方程②显然没有正数解；

(2) 若 $c>-1$，由于方程②中二次项系数大于0，一次项系数小于0，根据根与系数的关系知：②存在正数解当且仅当判别式 $\Delta=1-4(c+1)(c-1)\geqslant0$，即 $4c^2\leqslant5$，解得 $-1<c\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

综上可知，实数 c 的取值范围是 $\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

注 例 1 运用了三角代换转化问题，通过换元，把原来的问题转化成另一类相对容易解决的问题，而例 2 则是先运用实部与虚部分离，将一个复数方程解的存在性问题转化为实数方程组①的解的存在性，又进一步转化为一元二次方程②的正数解的存在性，每一步的转化都很自然，且不断地使问题简单化，熟悉化. 事实上，化归就是把复杂问题化为简单问题；把陌生的问题化为熟悉的问题；将一个问题转化为另一个问题；将一种形式转化为另一种形式等等.

下面我们再通过几个具体的例子来说明这种解题策略的运用.

例 3 (1) 13 个小朋友围成一个圆圈，从圈上至多能选出几个人，使得他们互不相邻？

(2) 从 1, 2, …, 13 这 13 个数中至多可以选出几个数,使得选出的数中,每两个数的差既不等于 5,也不等于 8?

解 (1) 把这 13 个小朋友依次编号为 1, 2, …, 13,如图 1-1 所示,那么选 6 个人是可以的,例如,选 1, 3, 5, 7, 9, 11 号这 6 位小朋友,他们是不相邻的.

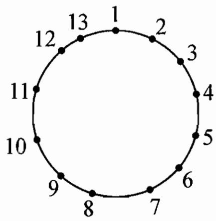


图 1-1

现在来说明至多可选 6 名. 先任意选定 1 个,不妨设为 1 号,这时候与他相邻的 2 号与 13 号不能选了. 把剩下的 10 位小朋友配成 5 对:(3, 4)、(5, 6)、(7, 8)、(9, 10)、(11, 12). 在这 5 对中,每一对中至多只能选出 1 个,连同 1 号在内,至多可选出 6 个人,他们互不相邻.

综上所述,从圈上至多能选出 6 个人,他们互不相邻.

(2) 我们把这题“化归”为题(1).

我们把 1, 2, …, 13 按如下规则排成一个圆圈:先排 1,在 1 的旁边放 9(与 1 的差为 8),在 9 的旁边放 4(与 9 的差为 5),……这样继续放下去,每个数旁边的数与它相差 8 或 5,最后得到图 1-2 所示的一个圈. 圈上的数满足:

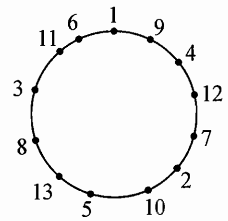


图 1-2

① 每两个相邻的数的差或是 8,或是 5;

② 两个不相邻的数的差既不等于 5,也不等于 8.

于是问题(2)就转化为:在这个圈上至多能选几个数,使每两个数在圈上不相邻? 由(1)的结论知,答案是 6. 例如,选 1, 4, 7, 10, 13, 3.

注 从题目上看,(1),(2)两个小题除了 13 这个数字外,没有任何相同的地方,如果直接解(2),是比较困难的,通过转化,把(2)化归为(1),问题就解决了.

例 4 求出所有满足下列条件的正整数数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$:

(1) 对每个 n, $x_n \leqslant n\sqrt{n}$;

(2) 对任意不同的正整数 m、n, $(m-n) \mid (x_m - x_n)$.

证明 由(1)知, $x_1 \leqslant 1$, $x_2 \leqslant 2\sqrt{2}$,所以 $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ 或 2.

① 若 $x_2 = 1$,由(2)知, $n-1 \mid x_n - x_1$, $n-2 \mid x_n - x_2$,即

$$n-1 \mid x_n - 1,\ n-2 \mid x_n - 1,$$

由于 $(n-1, n-2) = 1$,所以 $(n-1)(n-2) \mid x_n - 1$.

若 $x_n \neq 1$,则

$$x_n \geqslant (n-1)(n-2) + 1 = n^2 - 3n + 3.$$

当 $n \geqslant 9$ 时，$x_n \geqslant n^2-3n+3>n(n-3)>n\sqrt{n}$，这与(1)矛盾，从而当 $n \geqslant 9$ 时，$x_n=1$.

于是对每个 $n\ (\geqslant 9)$，$n-i \mid 1-x_i(i=3, 4, \cdots, 8)$；所以 $x_3=x_4=\cdots=x_8=1$.

因此，数列 1，1，1，…是满足题意的一个数列.

② 若 $x_2=2$，令 $x'_n=x_n-(n-1)$，$n=1, 2, \cdots$. 那么数列 $\{x'_n\}$ 是满足题设条件(1)，(2)的.

事实上，对每个 n，$x'_n=x_n-(n-1) \leqslant n\sqrt{n}-(n-1) \leqslant n\sqrt{n}$，对任意不同的正整数 m、n，$x'_n-x'_n=x_m-(m-1)-x_n+(n-1)=(x_m-x_n)-(m-n)$，从而 $m-n \mid x'_m-x'_n$.

由于 $x'_1=1$，$x'_2=1$，由①知，$\{x'_n\}$ 是常数列 $1, 1, 1 \cdots$. 所以，$x_n=n$.

综上所述，满足题设的正整数数列有 2 个，它们是

$$1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots,$$
$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots.$$

注　本题的第①种情形是容易解的. 对于第②种情形，我们通过一个代换，把它化归为第①种情形，也就是我们曾解决的一个问题，进而求得解答，这是一种常用的手法.

例 5　设 $n(>4)$ 是给定的整数，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0, 1]$，求证：

$$2(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)-(x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots x_n^2x_1) \leqslant n.$$

证明　我们先证明一个简单的命题：若 x，$y \in [0, 1]$，则 $x^3+y^3 \leqslant x^2y+1$.

事实上，当 $x \leqslant y$ 时，$x^3 \leqslant x^2y$，$y^3 \leqslant 1$，所以 $x^3+y^3 \leqslant x^2y+1$；

当 $x>y$ 时，$x^3 \leqslant 1$，$y^3 \leqslant x^2y$，所以 $x^3+y^3 \leqslant x^2y+1$.

于是
$$x_1^3+x_2^3 \leqslant x_1^2x_2+1,$$
$$x_2^3+x_3^3 \leqslant x_2^2x_3+1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n^3+x_1^3 \leqslant x_n^2x_1+1.$$

把上面这 n 个不等式相加，便得到要证明的命题.

注　化归，有时是将一个问题转化为与它等价的问题，有时，新的问题与原来的问题并不等价，但是，从新的问题可以很容易得到原问题的解. 这种不等价的化归并不鲜见，在不等式的证明中常常用到.

例 6　设 a、b、c 为三角形三边长，证明如下一组结论：

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$；

(2) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc$；

(3) $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant 8a^2b^2c^2$.

解 (1) 结论是显然的，事实上，根据基本不等式有

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc.$$

(2) 由已知条件，可令 $\begin{cases}a=y+z,\\ b=z+x,\\ c=x+y,\end{cases}$ 则 $x、y、z>0$. ①

要证的式子转化为 $2z\cdot 2x\cdot 2y\leqslant(y+z)(z+x)(x+y)$，这正是(1)的结论.

(3) 沿用(2)中的符号，则要证的式子转化为

$$xyz(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)\leqslant(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2. \quad ②$$

由于

$$\begin{aligned}xy(x+y+2z)^2&=xy(x+y)^2+4xyz(x+y+z)\\&\leqslant xy(x+y)^2+(x+y)^2\cdot z(x+y+z)\\&=(x+y)^2(xy+z(x+y+z))\\&=(x+y)^2(x+z)(y+z),\end{aligned}$$

同理有 $$yz(2x+y+z)^2\leqslant(x+y)(z+x)(y+z)^2,$$ $$zx(x+2y+z)^2\leqslant(x+y)(z+x)^2(y+z),$$

以上三式相乘，开方即得②，故原不等式成立.

注一 在证明与三角形边长 $a、b、c$ 有关的不等式时，有隐含约束条件 $\begin{cases}a+b>c,\\ b+c>a,\\ c+a>b.\end{cases}$ 这些条件有时不便使用，因而可通过代换①，将原问题化归为关于正数 $x、y、z$ 的代数不等式问题，这是一种将条件规范化的转化命题的技巧.

注二 第(2)问是不等式证明中的一个典型例子. 也可以这样证明：

$$(a+b-c)(b+c-a)=b^2-(a-c)^2\leqslant b^2,$$

同理得 $$(b+c-a)(c+a-b)\leqslant c^2,$$ $$(c+a-b)(a+b-c)\leqslant a^2,$$

三式相乘并开方即可.

值得一提的是第(3)问中对②的证明恰好借鉴了这种轮换相乘的手法，另一个趣向则是由(1)、(3)可以证明(2).

注三　本题中，每一小问的条件均可削弱为 a、b、$c>0$(此时，第(1)问证明过程不需修改，读者不妨对(2)、(3)的证明过程进行适当补充，使得对 a、b、$c>0$ 的一般情形成立).

例 7　设 $0<a<b$，证明：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

证明　原不等式等价于 $\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$，即 $\ln\dfrac{b}{a}<\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

令 $b=at^2(t>1)$，进一步将上述不等式转化为 $2\ln t<t-\dfrac{1}{t}$.

设 $F(t)=2\ln t-\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$，则 $F(1)=0$，$F'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=-\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2<0\ (t>1)$，因此当 $t>1$ 时 $F(t)$ 单调递减，故 $F(t)<F(1)=0(t>1)$，即 $2\ln t<t-\dfrac{1}{t}\ (t>1)$，从而原不等式成立.

注　本例是 2002 年全国硕士研究生入学考试的一个试题. 在证明原不等式时，先通过等价变形和换元，化归为关于 t 的一个不等式，同时起到了减少字母和简化约束条件的作用；此后构造函数 $F(t)=2\ln t-\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$，将问题进一步化归为对函数单调性的讨论，而 $F(t)$ 的单调性又通过求导得以判断. 本题的求解很简短，化归思想却蕴含在多个步骤中. 正如美籍匈牙利数学家 G・波利亚所说，“不断地变换你的问题”，“我们必须一再地变换它，重新叙述它，变换它，直到最后成功地找到某些有用的东西为止”. 由此可见，问题转化的思想在数学解题中的重要性.

例 8　20 个方块分别标有 1，2，3，…，20，排成一个圈，每四个连续的方块可以颠倒次序(如 20，1，2，3 可以变为 3，2，1，20). 如果原来的方块依照数的大小顺序排列，问：能否通过多次颠倒次序，将它的次序变为：

(1) 5，1，2，3，4，6，7，…，20；

(2) 6，1，2，3，4，5，7，…，20.

解　题(1)的答案是肯定的. 下面是一个具体的操作方式：

$$1\underline{2345}\to\underline{1543}2\to3\underline{4512}\to\underline{3215}4\to51234$$

我们就是把 1，2，3，4，5 这 5 个数字进行 4 次颠倒次序，其余数字的位置不

动，就变成了 5，1，2，3，4，6，7，…，20.

题(2)的答案也是肯定的.

我们也是利用(1)所得的结论：每一方块可经过 4 次颠倒次序前移四位，而其他方块顺序不变.

如图 1-3 所示，把数字 6 依次移到 1，2 之间，17，18 之间，14，13 之间，10，9 之间，4，5 之间，20，1 之间，此时，其他的数字的位置不动，从而，经过这些颠倒次序后，就变成了 6，1，2，3，4，5，7，…，20.

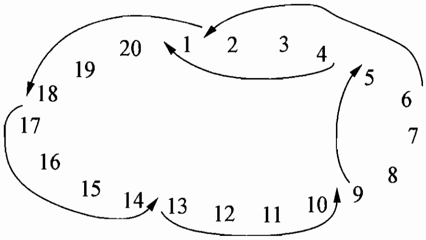


图 1-3

例 9　记 $F=\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|$. 当 a、b、c 取遍所有实数时，求 F 的最小值(2001 年国家集训队选拔考试题).

解　令 $f(x)=(x+2)^3-a(x+2)^2-b(x+2)-c$，原问题可转化为求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ 的最小值，其中

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+(6-a)x^2+(12-4a-b)x+(8-4a-2b-c) \\ &= x^3+a_1x^2+b_1x+c_1. \end{aligned}$$

将 $6-a$、$12-4a-b$、$8-4a-2b-c$ 分别简记为 a_1、b_1、c_1，易见 a、b、c 取遍所有实数当且仅当 a_1、b_1、c_1 取遍所有实数.

先证明 $F=\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\geqslant\dfrac{1}{4}$：在 $f(x)$ 表达式中分别取 $x=\pm 1,\pm\dfrac{1}{2}$，可得

$$f(1)=1+a_1+b_1+c_1\leqslant F, \tag{①}$$

$$f(-1)=-1+a_1-b_1+c_1\leqslant F, \tag{②}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{a_1}{4}+\frac{b_1}{2}+c_1\leqslant F, \tag{③}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{a_1}{4}-\frac{b_1}{2}+c_1\leqslant F, \tag{④}$$

由①，②得　　$$f(1)-f(-1)=2+2b_1,$$

由③，④得　　$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+b_1,$$

所以　　$$f(1)-f(-1)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2+2b_1-2\left(\frac{1}{4}+b_1\right)=\frac{3}{2},$$

又
$$f(1)-f(-1)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(-\frac{1}{2}\right)\leqslant 6F,$$

因此 $F\geqslant\frac{1}{4}$.

另一方面，假定 $F=\frac{1}{4}$，从上式看出必有

$$f(1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},$$

可确定 $a_1=c_1=0$，$b_1=-\frac{3}{4}$，故而使 $F=\frac{1}{4}$ 的函数 $f(x)$ 是存在的：$f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$，因此 F 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

注　相应地，原问题中使 F 取到最小值的数组 $(a, b, c)=\left(6, -\frac{45}{4}, \frac{13}{2}\right)$.

若记 $x^3-ax^2-bx-c=F(x)$，那么本题开始所做的工作实质上是将“求 $\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|F(x)|$ 最小值”的问题化归为“求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|F(x+2)|$ 最小值”，即“求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ 最小值”的问题. 这样的转化虽不是必须的，然而，一旦化归为关于原点对称的区间$[-1, 1]$考虑问题，经过适当取点得到(1)至(4)式后，较易观察出如何对 F 进行估计，运算量也控制在较小的程度(读者不妨尝试写出不做代换但实质相同的解法，并比较一下运算量和直观性).

习　题　1

1 求 $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ 的最大值.

2 设 $b>a>e$，证明：$a^b>b^a$.

3 5 这个数，可以写成 3 个正整数之和，如果计入不同的顺序，则有 6 种方式，即

$$5=1+1+3=1+3+1=3+1+1=1+2+2=2+1+2=2+2+1.$$

设 m、n 都是正整数，且 $m\leqslant n$，问 n 可以用多少种方式写为 m 个正整数之和(计入顺序)？

4 设实数 x、y、z 大于或等于 1，求证：

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2)\leqslant(xyz)^2-2xyz+2.$$

（2009 年中国女子数学奥林匹克试题）

5 已知 n 个实数 x_1，x_2，…，x_n 的算术平均值为 a，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-a|\right)^2.$$

6 设 P 是三角形 ABC 内部的一个点，D、E、F 分别是由 P 向线段 BC、CA、AB 作垂线所得的垂足，求使

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

达到最小时点 P 的位置.（1981 年国际数学奥林匹克试题）

7 已知 t 为一元二次方程 $x^2-3x+1=0$ 的根.

(1) 对任一给定的有理数 a，求有理数 b，c，使得 $(t+a)(bt+c)=1$ 成立；

(2) 将 $\frac{1}{t^2+2}$ 表示成 $dt+e$ 的形式，其中 d，e 为有理数.

8 设 x_1，x_2，…，x_n 是整数，并且满足：

(1) $-1\leqslant x_i\leqslant 2$，$i=1$，2，…，$n$；

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_n=19$；

(3) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=99$.

求 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$ 的最大值和最小值.

9 设 x，y 为非负整数，使得 $x+2y$ 是 5 的倍数，$x+y$ 是 3 的倍数，且 $2x+y\geqslant 99$，求 $7x+5y$ 的最小值.

10 设 x、y、z 是正实数，且满足 $xyz+x+z=y$，求

$$p=\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}+\frac{3}{z^2+1}$$

的最大值.（1999 年越南数学奥林匹克试题）

2 反证法

反证法是一种重要的数学证题方法.反证法的基本思想是:先提出一个与命题的结论相反的假设,然后利用一些公理、定理、定义等作出一系列正确、严密的逻辑推理,由此引出一个新的结论,而这个新的结论或者与所给的已知条件矛盾,或者与已知为真的结论矛盾,从而肯定原结论是正确的.

因此,用反证法证明一个命题的步骤,大体上分为:(1)反设;(2)归谬;(3)结论.反设是反证法的基础,归谬是反证法的关键.导出矛盾的过程没有固定的模式,但必须从反设出发,否则推导将成为无源之水,无本之木.推理必须严谨.导出的矛盾有如下几种类型:与已知条件矛盾;与已知的公理、定义、定理、公式矛盾;与反设矛盾;自相矛盾等.解题中,我们无须对这些矛盾进行细分,而应将重点放在怎样导出矛盾.

下面是一些常用反证法证明的情形:

(1) 结论为否定的一些命题,如结论中含有“不是……”、“不存在……”、“不等于……”、“不能……”等文字;

(2) 关于个数的命题,如结论中含有“至多”、“至少”、“有限”、“无穷”、“唯一”等文字;

(3) 由题设条件所能推得的结论甚少,或解题方向暂不明朗的一些命题.

例1 九名数学家在一次国际数学会议上相遇,发现他们中的任意三个人中,至少有两个人可以用同一种语言对话.如果每个数学家至多可说三种语言,证明这些数学家中,至少有三人可以用同一种语言对话.

证明 假定不存在三人能说同一种语言,那么每种语言最多只有两人能说,于是每个人用一种语言最多只能与另一个人对话.

设这九名数学家是 A_1, A_2, $\cdots$, A_9,由于 A_1 最多能说三种语言,因此至少将与另外五个人,不妨设是 A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 不能对话,又因为 A_2 也最多能说三种语言,因而他至少与 A_3, A_4, A_5, A_6 中的一个人不能对话,不妨设是 A_3,于是 A_1, A_2, A_3 三个人互相之间都不能对话,这与题设

矛盾.

所以,原结论正确.

注　本例结论中“至少三人”的反面是“至多两人”. 反设是反证法的基础,为了正确地作出反设,熟练掌握一些常用的互为否定的表述形式是有必要的,例如:是/不是;都是/不都是;存在/不存在;大于/不大于;至少有一个/一个也没有;至多有一个/至少有两个;存在一个……满足……/对任意……都不满足……等等. 还有一些表面上为肯定,实质上为否定的表述也应注意到,例如:“互素”即“不存在大于 1 的公因数”;“无理数”即“不能表示为两个互素的整数之商的数”等等.

例 2　证明:对任意三角形,一定存在它的两条边长 a, b,满足

$$1\leqslant \frac{a}{b}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

证明　若结论不成立,则对于$\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,于是

$$\frac{a}{b}\geqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{b}{c}\geqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

即 $\dfrac{b}{a}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\dfrac{c}{b}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

从而

$$\frac{b+c}{a}=\frac{b}{a}\left(1+\frac{c}{b}\right)\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1,$$

但这与$\triangle ABC$ 中 $b+c>a$ 矛盾! 从而命题得证.

例 3　已知 5 根细棍中任意 3 根都可以首尾相接得到一个三角形. 证明:这些三角形中必存在锐角三角形.

证明　用反证法,假设 a, b, c, d, e $(0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e)$ 为 5 根细棍的长度,且它们中任意三根首尾相接得到的是钝角或直角三角形.

由 a、b、e 为三角形的三边长知:$a+b>e$;

由 a、b、c 为钝角或直角三角形的三边长知:$a^2+b^2\leqslant c^2$;

由 c、d、e 为钝角或直角三角形的三边长知:$c^2+d^2\leqslant e^2$,

于是

$$c^2+d^2\leqslant e^2<(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)\leqslant 2c^2\leqslant c^2+d^2,$$

矛盾！

故假设不成立，从而命题得证.

注　本例中可供利用的信息甚少，若能通过反证法的假设获得较多可供利用的信息，则有利于打开局面. 上述解法在反证法假设之下，再辅以对 5 根细棍的长度排序，这样就创设了大量明确的条件，容易从中大做文章，直到矛盾产生为止（上述解答已经过“修枝剪叶”，将不需要用来导出矛盾的条件全都去除了，故而显得相对精简）.

例 4　证明：$\triangle ABC$ 的六条内角三等分线中，不存在某三条共点.

证明　用反证法，假设有三条内角三等分线共点，则必然分别引自 A、B、C，设它们共点于 P，则

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle ABP}\cdot\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle BCP}\cdot\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle CAP}=\frac{BP}{AP}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{AP}{CP}=1.\qquad ①$$

设 $A=3\alpha,\ B=3\beta,\ C=3\gamma$，则 $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\frac{\pi}{3},\ \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$.

(1) 当 $\angle BAP=\alpha,\ \angle CBP=\beta,\ \angle ACP=\gamma$ 时，①即为

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin 2\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin 2\alpha}=1,$$

化简得
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{8},$$

但 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma>\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3=\frac{1}{8}$，矛盾！

(2) 当 $\angle BAP=\alpha,\ \angle CBP=\beta,\ \angle ACP=\gamma$ 中恰有两个成立时，不妨设 $\angle BAP=\alpha,\ \angle CBP=\beta,\ \angle ACP=2\gamma$，则①成为

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}=1,$$

化简得
$$\cos\gamma=2\cos\alpha\cos\beta,$$

但
$$\begin{aligned}1>\cos\gamma&=2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\\&>2\cos(\alpha+\beta)>2\cos\frac{\pi}{3}=1,\end{aligned}$$

矛盾！

(3) 当 $\angle BAP=\alpha,\ \angle CBP=\beta,\ \angle ACP=\gamma$ 中至多有一个成立时，转而考察 $\angle ABP,\ \angle BCP,\ \angle CAP$，与(1)、(2)类似，可推得矛盾！

综上，假设不成立，即不存在三条内角三等分线共点.

注　本例中"不存在某三条共点"是一种否定判断，作为其反面的肯定判断更为具体、明确，故采用反证法. 注意本题中结论的反面情形不止一种类型，但可以通过分类讨论逐一排除.

例 5　是否存在单位圆内接三角形 ABC，其三边长 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，且存在实数 p，使得关于 x 的方程 $x^3-2ax^2+bcx=p$ 有三个实根，且它们恰为 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$？

解　假定存在这样的三角形，则由韦达定理得：

$$\begin{cases}2a=\sin A+\sin B+\sin C,\\ bc=\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A.\end{cases} \quad ①$$

又根据题目条件及正弦定理得：

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{2R}=\frac{1}{2}. \quad ②$$

由① 、②可知：
$$\begin{cases}2a=\dfrac{1}{2}(a+b+c),\\ bc=\dfrac{1}{4}(ab+bc+ca),\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}3a=b+c,\\ 3bc=a(b+c),\end{cases}$$

所以
$$3bc=a(b+c)=3a^2,$$

故 $bc=a^2$.

在$\triangle ABC$中，由于 $b<a+c$，故 $3a=b+c<a+2c$，即 $a<c$；根据 $c<a+b$ 同理可推得 $a<b$. 所以 $a^2<bc=a^2$，矛盾！故不存在满足题目条件的三角形.

注　对此类"存在性"有待确定的问题，往往可以在"假定存在"的基础上进行正确、严密的逻辑推理，得到一系列必须满足的结论，以帮助搜索是否具有满足题意的例子，在此过程中一旦出现矛盾，则表明结论为"不存在"，如此与反证法的思想一致.

例 6　一个棱柱以五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 与 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 为上、下底，这两个五边形的每一条边及每条线段 A_iB_j(i，$j=1$，2，3，4，5)均染上红色或蓝色. 每一个以棱柱顶点为顶点，以已染色的线段为边的三角形均有两条边颜色不同. 求证：上、下底的 10 条边颜色一定相同.（1979 年国际数学奥林匹克试题）

证明　先证明上底的 5 条边颜色相同. 用反证法.

若不然，不妨设 A_1A_2 为红色，A_1A_5 为蓝色. 在 $A_1B_j(j=1, 2, 3, 4, 5)$ 这 5 条线段中，至少有三条颜色相同，且这三条线段在下底面上的端点必有两个是相邻的，不妨设 A_1B_1，A_1B_2 均为红色，其中 B_1，B_2 相邻.

考虑$\triangle A_1A_2B_1$，$\triangle A_1A_2B_2$，$\triangle A_1B_1B_2$，由于 A_1A_2，A_1B_1，A_1B_2 为红色，根据题意可得 A_2B_1，A_2B_2，B_1B_2 必为蓝色，但此时$\triangle A_2B_1B_2$ 三边都是蓝色，与已知矛盾！这就证明了上底的 5 条边颜色相同.

同理可得下底的 5 条边颜色相同. 故余下只要证明上、下底的颜色一样. 仍用反证法.

若不然，不妨假设 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 各边为红色，$B_1B_2B_3B_4B_5$ 各边为蓝色. 前面已证明在 $A_1B_j(j=1, 2, 3, 4, 5)$这 5 条线段中，必有两条同色线段在下底面上的端点相邻，不妨设 A_1B_1，A_1B_2 同色，其中由于 B_1B_2 为蓝边，故 A_1B_1，A_1B_2 均为红色，和前面完全一样导致矛盾.

所以上、下底的 10 条边颜色完全相同.

例 7 设 a_0，a_1，a_2，…为任意无穷正实数数列. 求证：不等式 $1+a_n>\sqrt[n]{2}a_{n-1}$ 对无穷多个正整数 n 成立.

证明 假设 $1+a_n>\sqrt[n]{2}a_{n-1}$ 仅对有限个正整数成立. 设这些正整数中最大的一个为 M，则对任意的正整数 $n>M$，上述不等式均不成立，即有

$$1+a_n\leqslant\sqrt[n]{2}a_{n-1}(n>M),$$

也就是
$$a_n\leqslant\sqrt[n]{2}a_{n-1}-1(n>M).$$

由伯努利不等式：

$$\sqrt[n]{2}=(1+1)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}\ (n\geqslant 2),$$

可得
$$a_n<\frac{n+1}{n}a_{n-1}-1(n>M).$$

下面对一切非负整数 n 用数学归纳法证明：

$$a_{M+n}\leqslant(M+n+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+n+1}\right). \quad ①$$

当 $n=0$ 时，不等式两边都等于 a_M，成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N})$ 时成立，即有

$$a_{M+k}\leqslant(M+k+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+k+1}\right).$$

于是得

$$\begin{aligned}a_{M+k+1} &\leqslant \frac{M+k+2}{M+k+1}a_{M+k}-1\\ &\leqslant \frac{M+k+2}{M+k+1}(M+k+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+k+1}\right)-1\\ &=(M+k+2)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+k+1}\right)-1\\ &=(M+k+2)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+k+1}-\right.\\ &\left.\frac{1}{M+k+2}\right).\end{aligned}$$

故由归纳假设知，在 $n=k+1$ 时，原不等式成立.

易知 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{M+2}+\frac{1}{M+3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty,$$

故存在正整数 $N_0\geqslant M+2$，满足 $\frac{1}{M+2}+\frac{1}{M+3}+\cdots+\frac{1}{N_0}>\frac{a_M}{M+1}$.

在式①中取 $n=N_0-M-1$，得 $a_{N_0-1}<0$，矛盾. 故原命题得证.

例8 如图，锐角三角形 ABC 的外心为 O，K 是边 BC 上一点(不是边 BC 的中点)，D 是线段 AK 延长线上一点，直线 BD 与 AC 交于点 N，直线 CD 与 AB 交于点 M. 求证：若 $OK\perp MN$，则 A，B，D，C 四点共圆.(2010 年全国高中数学联赛试题)

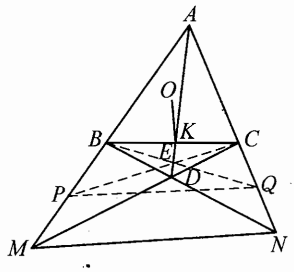


图 2-1

证明 用反证法. 若 A，B，D，C 不共圆，设三角形 ABC 的外接圆与射线 AD 交于点 E，连接 BE 并延长交直线 AN 于点 Q，连接 CE 并延长交直线 AM 于点 P，连接 PQ.

因为 $PK^2=P$ 的幂(关于$\odot O$)$+K$ 的幂(关于$\odot O$)(见注一)，所以

$$PK^2=(PO^2-r^2)+(KO^2-r^2),$$

同理

$$QK^2=(QO^2-r^2)+(KO^2-r^2),$$

所以 $$PO^2-PK^2=QO^2-QK^2,$$

故 $$OK\perp PQ.$$

由题设，$OK\perp MN$，所以 $PQ\,/\!/\,MN$，于是

$$\frac{AQ}{QN}=\frac{AP}{PM}. \tag{①}$$

由梅内劳斯(Menelaus)定理，得

$$\frac{NB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QN}=1, \tag{②}$$

$$\frac{MC}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}=1. \tag{③}$$

由①，②，③可得

$$\frac{NB}{BD}=\frac{MC}{CD},$$

所以 $\frac{ND}{BD}=\frac{MD}{DC}$，故 $\triangle DMN \backsim \triangle DCB$，于是 $\angle DMN=\angle DCB$，所以 $BC \parallel MN$，故 $OK\perp BC$，即 K 为 BC 的中点，矛盾！从而 A，B，D，C 四点共圆.

注一　"$PK^2=P$ 的幂(关于$\odot O$)$+K$ 的幂(关于$\odot O$)"的证明：延长 PK 至点 F(如图 2－2)，使得

$$PK\cdot KF=AK\cdot KE, \tag{④}$$

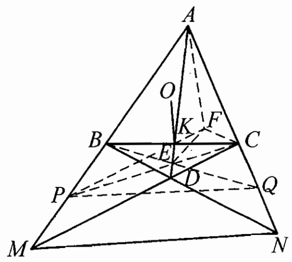


图 2－2

则 P，E，F，A 四点共圆，故

$$\angle PFE=\angle PAE=\angle BCE,$$

从而 E，C，F，K 四点共圆，于是

$$PK\cdot PF=PE\cdot PC, \tag{⑤}$$

⑤－④，得

$$\begin{aligned}PK^2&=PE\cdot PC-AK\cdot KE\\&=P\text{ 的幂(关于}\odot O)+K\text{ 的幂(关于}\odot O).\end{aligned}$$

注二　若点 E 在线段 AD 的延长线上，完全类似.

注三　本例有深刻的射影几何背景及较高的难度. 该结论虽有直接证法，但其逆命题是一个已有结果，相对而言"对结论反面的否定"易于"对结论本身的直接证明"，故而会想到采用反证法.

例 9　证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 r，且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$，使得 $\frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$.（2010 年全国高中数学联赛试题）

证明　令 $f(x)=2x^3+5x-2$，则 $f'(x)=6x^2+5>0$，所以 $f(x)$ 是严

格递增的. 又 $f(0)=-2<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}>0$，故 $f(x)$ 有唯一实数根 $r\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 所以

$$2r^3+5r-2=0,$$
$$\frac{2}{5}=\frac{r}{1-r^3}=r+r^4+r^7+r^{10}+\cdots.$$

故数列 $a_n=3n-2(n=1,2,\cdots)$ 是满足题设要求的数列.

若存在两个不同的正整数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 和 $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$ 满足

$$r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots=r^{b_1}+r^{b_2}+r^{b_3}+\cdots=\frac{2}{5},$$

去掉上面等式两边相同的项，有

$$r^{s_1}+r^{s_2}+r^{s_3}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+r^{t_3}+\cdots,$$

这里 $s_1<s_2<s_3<\cdots$，$t_1<t_2<t_3<\cdots$，所有的 s_i 与 t_j 都是不同的.

不妨设 $s_1<t_1$，则

$$r^{s_1}<r^{s_1}+r^{s_2}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+\cdots,$$
$$1<r^{t_1-s_1}+r^{t_2-s_1}+\cdots\leqslant r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}-1<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=1,$$

矛盾.

故满足题设的数列是唯一的.

例 10 设 n 是一个正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_k(k\geqslant 2)$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的互不相同的整数，使得对于 $i=1,\cdots,k-1$，都有 n 整除 $a_i(a_{i+1}-1)$. 证明：n 不整除 $a_k(a_1-1)$.（2009 年国际数学奥林匹克试题）

证明 用反证法. 假设 $n\mid a_k(a_1-1)$，则 $a_1a_k\equiv a_k(\bmod n)$.

由题设可知　$a_i\equiv a_ia_{i+1}(\bmod n)$，$i=1,2,\cdots,k-1$. 所以

$$a_1\equiv a_1a_2\equiv a_1a_2a_3\equiv\cdots\equiv a_1a_2\cdots a_k\equiv a_1a_2\cdots a_{k-2}a_k\equiv\cdots\equiv a_1a_k(\bmod n),$$

所以，
$$a_1\equiv a_k(\bmod n).$$

而 $0<|a_1-a_k|<n$，矛盾！

习　题　2

1 证明：对任何实数 x,y,z，下述三个不等式不可能同时成立：

$$|x|<|y-z|, |y|<|z-x|, |z|<|x-y|.$$

2 已知点 E, F, G, H 分别在单位正方形 $ABCD$ 的四条边上，求证：在四边形 $EFGH$ 中至少有一条边的长度不小于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 (1) 是否存在正整数 m、n，使得 $m(m+2)=n(n+1)$；
(2) 设 k ($\geqslant 3$)是给定的正整数，是否存在正整数 m、n，使得

$$m(m+k)=n(n+1).$$

4 已知 a, b, c 是实数，且 $a>2000$，证明：至多存在两个整数 x，使得

$$|ax^2+bx+c|\leqslant 1000.$$

5 是否存在三边长都为整数的三角形，满足以下条件：最短边长为 2007，且最大的角等于最小角的两倍？（2007 年中国西部数学奥林匹克试题）

6 已知集合 A 由全体正整数的倒数组成. 是否存在无限个 A 中的数 a_1, a_2, a_3, …(不必不同)，使得对任何 i, $j\in\mathbf{N}^*$，有 $\frac{a_i}{i}+\frac{a_j}{j}\in A$? 证明你的结论.

7 在 n 个元素组成的集合中取 $n+1$ 个两两不同的 3 元子集. 证明：其中必有两个子集，它们恰有一个公共元(1979 年美国奥林匹克试题).

8 设 a_1, a_2, …为全体正整数的一个排列. 证明：存在无穷多个正整数 i，使得 $(a_i, a_{i+1})\leqslant\frac{3}{4}i$.（2011 年国家集训队选拔考试试题）

3 数学归纳法

与正整数 n 有关的命题常常用到数学归纳法.

(1) 数学归纳法的基本形式(第一数学归纳法)是：

设 $P(n)$ 是一个含正整数 n 的命题，如果

(Ⅰ) $P(1)$ 成立；

(Ⅱ) 在 $P(k)$ 成立的假设下，可证明 $P(k+1)$ 成立，

那么 $P(n)$ 对任意正整数 n 成立.

通常我们将步骤(Ⅰ)称为归纳奠基，将步骤(Ⅱ)称为归纳过渡. 两者不可缺其一.

显然，第一数学归纳法可以推广为：

设 $p(n)$ 是一个含有正整数 n 的命题，如果

(Ⅰ) $p(n)$，当 $n=n_0$ 时成立；

(Ⅱ) 在 $p(k)$ $(k\geqslant n_0)$ 成立的假定下，可以证明 $p(k+1)$ 成立，

那么 $p(n)$ 对一切大于或等于 n_0 的正整数 n 都成立.

(2) 第二数学归纳法：设 $p(n)$ 是一个含正整数 n 的命题，如果

(Ⅰ) $P(1)$ 成立；

(Ⅱ) 在 $p(m)$ 对于所有适合 $m\leqslant k$ 的正整数 m 成立的假定下，可以证明 $p(k+1)$ 成立，

那么 $p(n)$ 对任意正整数 n 都成立.

第二数学归纳法也有类似的推广，即使命题 $p(n)$ 成立的起点可用某个正整数 n_0 代替.

(3) 反向数学归纳法，又称倒推数学归纳法，是法国著名数学家柯西首先使用的. 柯西利用反向数学归纳法证明了：n 个正数的算术平均大于或等于这 n 个正数的几何平均.

下面给出反向数学归纳法：

(Ⅰ) $p(n)$ 对无限多个正整数 n 成立；

(Ⅱ) 假设 $p(k+1)$ 成立，可推出 $p(k)$ 也成立，

那么 $p(n)$ 对一切正整数 n 都成立.

反向数学归纳法也可以推广为：

设 $p(n)$ 是一个含有正整数 n 的命题，如果

（Ⅰ）$p(n)$ 对某个正整数 $m_0(m_0 \geqslant 1)$ 成立；

（Ⅱ）假设 $p(k+1)$ 成立，可推出 $p(k)$ 也成立，

那么 $p(n)$ 对一切 不大于 m_0 的正整数 n 都成立.

(4) 双参数归纳法. 在证明与两个独立的正整数有关的命题 $p(n, m)$ 时，可以用如下形式进行：

（Ⅰ）证明 $p(1, m)$ 对任意正整数 m 成立，$p(n, 1)$ 对任意正整数 n 成立；

（Ⅱ）假设 $p(n+1, m)$ 和 $p(n, m+1)$ 成立，由此推出 $p(n+1, m+1)$ 成立，则对所有的正整数 n，m，$p(n, m)$ 成立.

数学归纳法的应用十分广泛，而在很多情况下，数学归纳法是以一些常见的“变体”实施的，另外也涉及一些技巧，如主动加强命题、灵活选取起点、灵活选取跨度等等.

例 1　设 $\{x_n\}$ 是一实数列，且对任一非负整数 n，满足

$$x_0^3+x_1^3+\cdots+x_n^3=(x_0+x_1+\cdots+x_n)^2.$$

证明：对所有非负整数 n，存在整数 m，使得 $x_0+x_1+\cdots+x_n=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

证明　我们用数学归纳法来证明结论. 当 $n=0$ 时，由题设，$x_0^3=x_0^2$，得 $x_0=0$ 或 1. 这时可取 $m=0$ 或 1，从而当 $n=0$ 时结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立，即当 $x_0^3+x_1^3+\cdots+x_k^3=(x_0+x_1+\cdots+x_k)^2$ 时，存在整数 m，使得 $x_0+x_1+\cdots+x_k=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

为方便书写，记 $\dfrac{m(m+1)}{2}=c$，则 $x_0^3+x_1^3+\cdots+x_k^3=c^2$.

对于 x_{k+1}，如果 $x_0^3+x_1^3+\cdots+x_k^3+x_{k+1}^3=(x_0+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})^2$，那么 $c^2+x_{k+1}^3=(c+x_{k+1})^2$，所以 $x_{k+1}(x_{k+1}^2-x_{k+1}-m(m+1))=0$，解得 $x_{k+1}=0, -m, m+1$.

当 $x_{k+1}=0$ 时，$x_0+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}=\dfrac{m(m+1)}{2}$；

当 $x_{k+1}=-m$ 时，$x_0+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}=\dfrac{m(m+1)}{2}-m=\dfrac{m(m-1)}{2}$；

当 $x_{k+1}=m+1$ 时，$x_0+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}=\dfrac{m(m+1)}{2}+m+1=$

$\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$.

即结论在 $n=k+1$ 时也成立，从而对一切非负整数 n，结论成立.

注 运用数学归纳法时，证明的核心与难点多数情况下在于如何实现归纳过渡. 此时应设法使 $P(k)$ 与 $P(k+1)$ 的关系充分显露出来，根据题目的特点，或是从 $P(k)$ 出发，过渡到 $P(k+1)$，或是先从 $P(k+1)$ 入手，从中分离出 $P(k)$ 的形式，某些时候还需对一些代数式和命题进行反复变形转化. 总之应当创设条件，使归纳假设得以充分利用.

例 2 设有 2^n 个球分成了许多堆，我们可以任意选取甲、乙两堆按如下规则挪动：若甲堆中的球数 p 不小于乙堆中的球数 q，则从甲堆中拿出 q 球放入乙堆，这算是挪动一次. 证明可以经过有限次挪动把所有球并成一堆.

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，只有两个球，至多挪动一次即可，结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立. 在 $n=k+1$ 的情形下，首先注意到总球数为偶数，所以球数为奇数的堆必有偶数个，先将它们两两配对，并在每对的两堆球之间进行一次挪动，其中对每对球堆，设球数分别为奇数 p 和 q $(p\geqslant q)$，那么挪动后两堆球的个数分别为偶数 $p-q$, $2q$. 因此一系列挪动后可使所有这些堆中的球数都变为偶数(球数变为 0 个的球堆就消失了). 这时将每堆中的球两两捆绑起来视为一个“球”，于是总“球”数变为 2^k，由归纳假设知可以在有限步挪动后全部并为一堆，所以 $n=k+1$ 的情形结论也成立.

由数学归纳法得：对一切正整数 n 结论成立.

注 本题中 $P(k)$ 与 $P(k+1)$ 的关系是球数的 2 倍关系. 如果我们能在 $n=k+1$ 的情形下找到某些球堆，它们的总球数为 2^k，那么剩下的球堆的总球数也是 2^k，归纳过渡自然能实现，遗憾的是这种有利情况并不必然发生. 如何利用好归纳假设实现过渡呢？上述解法中，我们是先通过操作调整使所有球堆都含有偶数个球，然后只需将 2^{k+1} 个球两两捆绑看成一些新的“球”，这样“球”数就回到了 2^k 个，从而找到了 $P(k)$ 和 $P(k+1)$ 的过渡. 特别注意本题中命题 $P(k)$ 所涉及的对象是球，而归纳假设则是作用在新的载体——捆绑以后的 2^k 个“球”上.

例 3 求证：第 n 个素数(将素数从小到大编上序号，2 算作第一个素数) p_n 小于 2^{2^n}.

解 当 $n=1$ 时，$p_1=2<2^{2^1}$，结论成立.

设当 $n\leqslant k$ 时，结论成立，即 $p_i<2^{2^i}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$，于是将这 k 个不等式两边分别相乘，得

$$p_1p_2\cdots p_k < 2^{2^1+2^2+\cdots+2^k},$$

所以
$$p_1p_2\cdots p_k+1 \leqslant 2^{2^1+2^2+\cdots+2^k} = 2^{2^{k+1}-2} < 2^{2^{k+1}}.$$

因为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 都不能整除 $p_1p_2\cdots p_k+1$，所以 $p_1p_2\cdots p_k+1$ 的素因数 q 不可能是 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，而只能大于或等于 p_{k+1}.

于是，我们有 $p_{k+1} \leqslant q \leqslant p_1p_2\cdots p_k+1 < 2^{2^{k+1}}$.

这就是说，当 $n=k+1$ 时，结论也成立. 根据数学归纳原理，对于任意正整数 n，都有 $p_n < 2^{2^n}$.

注 在运用数学归纳法证明本题的过程中，我们将“假设 $n=k$ 时结论成立”改为更有力的“假设 $n\leqslant k$ 时结论成立”. 在这样的变通之下，很容易对第 $k+1$ 个素数给出所需的上界估计.

例 4 设 $0<a<1$，$x_0=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n}+a(n\in \mathbf{N})$. 证明：对一切 $n\in \mathbf{N}^*$，有 $x_n>1$.

证法 1 我们用数学归纳法证明结论.

当 $n=1, 2$ 时，$x_1=1+a>1$，$x_2=\dfrac{1}{1+a}+a=\dfrac{1+a+a^2}{1+a}>1$，命题成立.

设 $n=k$ 时命题成立，则 $n=k+2$ 时，根据归纳假设和递推关系得

$$0<x_{k+1}=\frac{1}{x_k}+a<1+a,$$

继而有

$$x_{k+2}=\frac{1}{x_{k+1}}+a>\frac{1}{1+a}+a=\frac{1+a+a^2}{1+a}>1,$$

所以 $n=k+2$ 时命题成立.

因此对任意 $n\in \mathbf{N}^*$，有 $x_n>1$.

证法 2 我们主动加强命题，证明 $1<x_n\leqslant 1+a$.

当 $n=1$ 时，$1<x_1=1+a$ 显然成立.

设 $n=k$ 时命题成立，则 $n=k+1$ 时，由归纳假设得

$$\frac{1}{1+a}+a\leqslant \frac{1}{x_k}+a<1+a,$$

即 $1<\dfrac{1+a+a^2}{1+a}\leqslant x_{k+1}<1+a$，所以 $n=k+1$ 时命题也成立. 这样就证得了加强命题. 特别地，$x_n>1$ 成立.

注　本题若直接用 $x_k>1$ 来证明 $x_{k+1}>1$ 是不可能的. 上述两个证明展现了归纳法的两种典型的变通方式.

第一个证明是设置跨度 2 来证明一般的 n 成立，注意此时我们要验证的起点也应变为两个. 另有些问题虽可以用归纳法的基本形式给出证明，但若将设置适当跨度可使论证显著简化，此时只要确保起点都能逐一验证即可.

第二个证明是主动给 x_k 设置一个上限，根据递推关系，下一项 x_{k+1} 就自动得到一个下限. 第一步的验证固然要增多一点工作量，但实施归纳时，从归纳假设中获得的信息更强，这点有利于结论的证明. 应当注意的是，在加强命题之后，应对 $n=k+1$ 的情况也推出加强后的结论，例如本题中不应当仅推出 $x_{k+1}>1$ 完事，而应推出 $1<x_{k+1}\leqslant 1+a$，这样才能说明这个加强的性质具有继承性.

例 5　设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，求证：当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right).$$

证明　把命题加强为当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\frac{1}{n}.$$

当 $n=2$ 时，左边 $=a_2^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，右边 $=a_2+\frac{1}{2}=2$，命题成立.

假设命题在 $n=k$ 时成立，即

$$a_k^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{1}{k}.$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
a_{k+1}^2&=\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)^2=a_k^2+\frac{2a_k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{1}{k}+\frac{2}{k+1}\left(a_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\\
&>2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{1}{k+1},
\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时命题也成立.

所以,由数学归纳法知,加强的命题成立,从而原命题成立.

例6 有 2005 个青年围坐在一个大圆桌旁,其中男孩不多于 668 人. 如果一个女孩 G 从两个方向之一数到任何一个人(从自己的下一个人开始数起),女孩数目总是大于男孩数目,称 G 是在一个"好位置"上. 证明:无论怎样安排座位,总存在一个女孩在一个好位置上.(2005 年北欧数学竞赛试题)

证明 我们用数学归纳法证明一个更强的且具有一般形式的命题:

若 n 个男孩与 $2n+1$ 个女孩围坐在一个大圆桌旁,则一定存在一个女孩,从她开始逆时针数到任何一个人时,女孩总比男孩多.

将圆桌旁的座位按顺时针编号为 1 至 $3n+1$.

当 $n=1$ 时,不妨设 1、2、3 号为女孩,4 号为男孩,则 3 号女孩满足命题.

假设当 $n=k$ 时命题成立.

当 $n=k+1$ 时,由于女孩多于男孩,必有两个女孩相邻. 以这两个女孩为起点逆时针数到第一个男孩,不妨设在 1 号位置,则 2、3 号都是女孩.

当所有人坐好后,撤掉 1、2、3 号三人,由归纳假设知剩下的人中必有一个女孩,不妨记为 A,她处在 m 号位置,从她开始逆时针数,女孩总比男孩多.

再让 1、2、3 号三人坐回原处. 此时,根据 A 的取法,A 从 $m-1$ 号数到 4 号时知女孩一直比男孩多;当数到 3、2、1 号时,由于先数到两个女孩,因此仍是女孩比男孩多;再数下去时,根据 A 的取法,仍保持女孩比男孩多.

所以 $n=k+1$ 时命题成立.

故加强命题成立.

在原问题中取 $n=668$ 即得证(若男孩人数少于 668,则表明即便将某些女孩当做男孩计入,仍能满足命题,因此结论必定成立).

注 求解本题时,先观察出已知条件中的数字 2005 与 668 实际上是 $3n+1$和 n 的内在关系,不妨将问题一般化,便于抓住本质予以证明. 在试图归纳证明时,又发现,当考虑 $n=k+1$ 的情形时,若撤掉相邻 3 人后只是利用 $n=k$时"存在一个女孩,她可以从两个方向之一数到任何一个人,女孩总比男孩多"的归纳假设,那么归纳过渡会发生困难. 因此,为了获得更强的归纳假设,我们大胆加强命题,证明"存在一个女孩,当她逆时针数时,女孩总比男孩多",并且这种性质具有继承性,从而问题解决.

本题可谓加强命题并辅以结论一般化的典型.

有时候,我们把一个命题的结论加强或者一般化,表面上看起来命题由于结论加强了,问题更加难于处理,但是,恰恰相反,解起来反而比特殊的、具体的情况轻松容易. 这在用数学归纳法时尤其常见.

苏联数学家辛钦曾说过："在数学归纳法的证明中，假设命题当 $n-1$ 时成立，再来证明它当 n 时也成立，因此，命题越强，在 $n-1$ 的情况下所给的条件也越多，而对数 n，要证明的东西也越多，但是在许多问题中，条件较多显得更为重要."

例 7　证明：对一切正整数 n，不定方程 $x^2+y^2=z^n$ 都有正整数解.

证明　当 $n=1$ 时，取 $x=y=1$，$z=2$；当 $n=2$ 时，取 $x=3$，$y=4$，$z=5$，即可使它们满足方程，故知命题在 $n=1$ 和 2 时成立.

假定当 $n=k$ 时，$x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$ 是一组正整数解；那么当 $n=k+2$ 时，只要取 $x=x_0z_0$，$y=y_0z_0$，$z=z_0$，就有

$$(x_0z_0)^2+(y_0z_0)^2=z_0^2(x_0^2+y_0^2)=z_0^{k+2},$$

知它们恰为方程的一组正整数解.

所以当 $n=k+2$ 时，命题也成立.

由于我们采用了两个起点，所以可以用跨度 2 跳跃. 这表明对一切正整数 n，不定方程都有正整数解，证毕.

例 8　对怎样的正整数 n，集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 可以分成 5 个互不相交的子集，每个子集的元素和相等.

解　先找一个必要条件：如果 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 能分成 5 个互不相交的子集，各个子集的元素和相等，那么

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

能被 5 整除. 所以 $n=5k$ 或 $n=5k-1$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$.

显然，$k=1$ 时，上述条件不是充分的. 下用数学归纳法证明 $k\geqslant 2$ 时，条件是充分的.

当 $k=2$，即 $n=9$，10 时，我们把集合 $\{1, 2, \cdots, 9\}$ 和 $\{1, 2, \cdots, 10\}$ 作如下分拆：

$$\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{9\};$$
$$\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\};$$

当 $k=3$ 时，即 $n=14$，15 时，有

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7, 14\}, \{8, 13\}, \{9, 12\}, \{10, 11\};$$
$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}, \{4, 8, 12\}, \{9, 15\}, \{10, 14\}, \{11, 13\}.$$

因为若集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 能分成 5 个互不相交的子集，并且它们的元素和相等，那么 $\{1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots, n+10\}$ 也能分成 5 个元素和相等但互

不相交的子集. 事实上，如果

$$\{1, 2, \cdots, n\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,$$

令 $B_1 = A_1 \cup \{n+1, n+10\}$，$B_2 = A_2 \cup \{n+2, n+9\}$，$B_3 = A_3 \cup \{n+3, n+8\}$，$B_4 = A_4 \cup \{n+4, n+7\}$，$B_5 = A_5 \cup \{n+5, n+6\}$，那么

$$\{1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots, n+10\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5,$$

并且 $B_i \cap B_j = \varnothing$，$1 \leqslant i < j \leqslant 5$，$|B_1| = |B_2| = \cdots = |B_5|$.

假设命题对于 $5k-1$，$5k$ 成立. 由上面讨论知，命题对于 $5(k+2)-1$，$5(k+2)$ 也成立.

从而证明了对于 $k \geqslant 2$，当 $n = 5k-1$，$5k$ 时，集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 可以分成 5 个元素和相等的互不相交的子集.

注　本例中，我们选取起点 $k=3$ 来实施数学归纳法证明，并且是由 $P(k)$ 进到 $P(k+2)$，即以步长为 2 前进. 有时候，步子可能更大，视具体情况而定.

例 9　设 $f(x)$ 是定义在非负实数集上的函数，$f(0) = 0$，且对任意 $x \geqslant y \geqslant 0$，有 $|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)f(x)$. 求 $f(x)$.

解　我们用数学归纳法证明：对任意正整数 n，当 $\frac{n-1}{2} \leqslant x < \frac{n}{2}$ 时，有 $f(x) = 0$.

当 $n = 1$ 时，在条件中取 x，y 使 $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$，$y = 0$，得

$$|f(x)| \leqslant xf(x) \leqslant x|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|,$$

故 $|f(x)| = 0$，即 $f(x) = 0$，命题成立.

设 $n = k$ 时命题成立，则当 $n = k+1$ 时，取 x，y 使 $\frac{k}{2} \leqslant x < \frac{k+1}{2}$，$y = x - \frac{1}{2}$，此时 $\frac{k-1}{2} \leqslant y < \frac{k}{2}$，由归纳假设知 $f(y) = 0$，代入已知条件得 $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}f(x)$，类似前面的讨论可知 $f(x) = 0$，故 $n = k+1$ 时命题成立.

注意到当 n 取遍所有正整数时，$x \in \left[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ 取遍一切非负实数，从而由数学归纳法得：$f(x)$ 恒等于 0.

注　这是在实数情形下使用数学归纳法的一个例子. 与证明关于正整数的命题不同，由于正实数集是“不可列”的，换言之就是不存在一个数列取遍

一切正实数值(严格证明需要用到一点高等数学的知识)，因此我们势必对无穷多个起点进行验证. 本题中，我们的处理方式是将$[0, +\infty)$拆成“可列”个区间$\left[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right)$，通过对第一个区间的讨论统一完成了无穷个起点的验证过程，再设置“步长”为$\frac{1}{2}$进行证明.

例 10 设$f(m, n)$满足$f(1, n)=f(m, 1)=1(m, n\in\mathbf{N}^*)$，且当$m$, $n\geqslant 2$时有

$$f(m, n)\leqslant f(m, n-1)+f(m-1, n).$$

求证：$f(m, n)\leqslant C_{m+n-2}^{m-1}$.

证明 将命题$f(m, n)\leqslant C_{m+n-2}^{m-1}$记为$P(m, n)$. 下用数学归纳法证明$P(m, n)$.

因为对$m, n\in\mathbf{N}^*$，有$f(1, n)=1=C_{1+n-2}^{1-1}$, $f(m, 1)=1=C_{m+1-2}^{m-1}$，故$P(1, n)$与$P(m, 1)$成立.

当$m, n\geqslant 2$时，假设$P(m, n-1)$与$P(m-1, n)$成立，即

$$f(m, n-1)\leqslant C_{m+n-3}^{m-1},\ f(m-1, n)\leqslant C_{m+n-3}^{m-2},$$

则结合已知条件得

$$f(m, n)\leqslant f(m, n-1)+f(m-1, n)\leqslant C_{m+n-3}^{m-1}+C_{m+n-3}^{m-2}=C_{m+n-2}^{m-1},$$

即命题$P(m, n)$成立.

由双参数数学归纳法知，对任意$m, n\in\mathbf{N}^*$, $P(m, n)$成立.

注 本例给出的是双参数数学归纳法的一种基本证题模式. 双参数归纳法往往用来证明某个与正整数m, n有关的命题$P(m, n)$. 对双参数归纳法，也有各种灵活多样的形式.

例 11 设k是正整数，证明：可以将集合$\{0, 1, 2, 3, \cdots, 2^{k+1}-1\}$分成两个没有公共元素的子集$\{x_1, x_2, \cdots, x_{2^k}\}$和$\{y_1, y_2, \cdots, y_{2^k}\}$，使得$\sum_{i=1}^{2^k}x_i^m=\sum_{i=1}^{2^k}y_i^m$对任何$m\in\{1, 2, \cdots, k\}$都成立. (2005年中国国家集训队试题)

证明 对k用数学归纳法.

当$k=1$时，令$x_1=0$, $x_2=3$, $y_1=1$, $y_2=2$即可，命题成立.

假设命题在k时成立，考虑$k+1$时的情况.

由归纳假设知，可将$\{0, 1, 2, \cdots, 2^{k+1}-1\}$分成满足条件的子集$\{x_1, x_2, \cdots, x_{2^k}\}$和$\{y_1, y_2, \cdots, y_{2^k}\}$. 此时令

$$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_{2^k}, 2^{k+1}+y_1, 2^{k+1}+y_2, \cdots, 2^{k+1}+y_{2^k}\},$$
$$B=\{y_1, y_2, \cdots, y_{2^k}, 2^{k+1}+x_1, 2^{k+1}+x_2, \cdots, 2^{k+1}+x_{2^k}\},$$

则 $A\cup B=\{0, 1, 2, \cdots, 2^{k+2}-1\}$，$A\cap B=\varnothing$.

为证明 $k+1$ 时命题成立，需要验证的是：对 $m\in\{1, 2, \cdots, k+1\}$，有

$$\sum_{i=1}^{2^k}x_i^m+\sum_{i=1}^{2^k}(2^{k+1}+y_i)^m=\sum_{i=1}^{2^k}y_i^m+\sum_{i=1}^{2^k}(2^{k+1}+x_i)^m,$$

显然该式可依次等价变形为

$$\sum_{i=1}^{2^k}x_i^m+\sum_{i=1}^{2^k}\left(y_i^m+\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^j(2^{k+1})^{m-j}y_i^j\right)=\sum_{i=1}^{2^k}y_i^m+\sum_{i=1}^{2^k}\left(x_i^m+\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^j(2^{k+1})^{m-j}x_i^j\right);$$

$$\sum_{i=1}^{2^k}x_i^m+\sum_{i=1}^{2^k}y_i^m+\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^j(2^{k+1})^{m-j}\sum_{i=1}^{2^k}y_i^j=\sum_{i=1}^{2^k}y_i^m+\sum_{i=1}^{2^k}x_i^m+\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^j(2^{k+1})^{m-j}\sum_{i=1}^{2^k}x_i^j;$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^j(2^{k+1})^{m-j}\left(\sum_{i=1}^{2^k}x_i^j-\sum_{i=1}^{2^k}y_i^j\right)=0. \qquad ①$$

对任意给定的 $m\in\{1, 2, \cdots, k+1\}$，由于 $\sum\limits_{i=1}^{2^k}x_i^0=2^k=\sum\limits_{i=1}^{2^k}y_i^0$，且根据归纳假设知，当 $j\in\{1, 2, \cdots, k\}$ 时有 $\sum\limits_{i=1}^{2^k}x_i^j=\sum\limits_{i=1}^{2^k}y_i^j$，故对 $j=0, 1, \cdots, m-1$，有

$$\sum_{i=1}^{2^k}x_i^j-\sum_{i=1}^{2^k}y_i^j=0.$$

故①成立，进而命题在 $k+1$ 时成立.

由数学归纳法知，对任意正整数 k，存在满足条件的集合分法.

注　本例中，对满足条件的集合分法的存在性，很难给出非构造性的证明，然而直接构造又显得困难重重，因此从 $k=1$ 的简单情形着手，通过数学归纳法构造出在每个正整数 k 时集合的具体分法.

归纳构造实际上是借助数学归纳法的原理，将整个构造过程逐层分解为一些比较简单又具有统一规律的构造环节，这是一种典型的构造实现形式.

很多人用“推倒一系列多米诺骨牌”来形象地比喻“证明与正整数 n 有关的命题”的过程. 例如在第一数学归纳法中，将“归纳奠基”看成推倒第一块骨牌，将“归纳过渡”比作某种使之后的每块骨牌依次被前一块骨牌所推倒的连锁反应. 最后每块骨牌都能被推倒代表命题证完. 这里不妨借此进一步比喻数学归纳法的一些变通形式的证明流程：

第二数学归纳法：先推倒第一块骨牌，再依次对每个 n，借助前 n 块骨牌的效应推倒第 $n+1$ 块骨牌，直至所有骨牌被推倒；

反向归纳法：一要保证每块骨牌能反过来推倒所有在它之前的骨牌，二要说明可以推倒无穷块骨牌，从而无论多大号码的骨牌总能被推倒；

双参数归纳法或螺旋归纳法：在需要推倒的骨牌边放一系列辅助骨牌，先推倒起点处的骨牌，再把所有骨牌和辅助骨牌全部推倒（例如每块原有的骨牌推倒旁边的辅助骨牌，而辅助骨牌推倒下面的骨牌）；

后置起点：先独立推倒前 k 块骨牌，再说明第 k 块骨牌可以用来推倒后面所有的骨牌；

前置起点：放一些骨牌作“引子”来推倒一切骨牌（应当注意，在用数学归纳法证明一个关于确定数 n_0 的命题时，可以理解成设置了长为 n_0-1 的“引子”）；

选取跨度 k（$k\geqslant 2$，$k\in\mathbf{N}^*$）：把骨牌按模 k 分类，1 排变 k 排，每排中推倒第一块骨牌，再说明该骨牌可以推倒这一排中的一切骨牌；

加强命题：适当“加重”每块骨牌分量，稍稍费力地推倒第一块骨牌，再利用每块骨牌所加重的分量给予后面骨牌更强的作用，使全部骨牌推倒.

归根结底我们的目的是推倒所有骨牌，若不能独立推倒，那么总应当按一定秩序推，而不应无所适从乱做一气. 就此而言，各种形式的数学归纳法恰是为证明命题而设计的若干实用的秩序.

习　题　3

1 已知对一切正整数 n，都有 $a_n>0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2$，求证：$a_n=n$.

（1989 年全国高中数学联赛试题）

2 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=3$，$a_{n+1}=3^{a_n}$，$n=1,2,\cdots$，数列 $\{b_n\}$ 定义如下：$b_1=8$，$b_{n+1}=8^{b_n}$，$n=1,2,\cdots$. 求证：对一切正整数 n，有 $a_{n+1}>b_n$.

3 设 n 为不小于 6 的整数，证明：可将一个正方形分成 n 个较小的正方形.

4 设 $M=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_s}$，$n_1$，$n_2$，$\cdots$，$n_s$ 是互不相同的正整数，求证：

$$2^{\frac{n_1}{2}}+2^{\frac{n_2}{2}}+\cdots+2^{\frac{n_s}{2}}<(1+\sqrt{2})\sqrt{M}.$$

（2009 年全国高中数学联赛江苏省预赛试题）

5 已知数列 $\{a_n\}$ 中每项都是正整数且逐项递增，$a_2=2$. 若对任意 m，$n\in$

$\mathbf{N}^*$，有 $a_{mn}=a_m a_n$，证明：$a_n=n$.

6 证明：对任意给定正整数 $n\geqslant 3$，$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=y^3$ 有正整数解且所有 x_i 两两不等.

7 证明：数列 $\{2^n-3\}$，$n=2,3,4,\cdots$ 包含无穷多个两两互素的数.（1971年国际数学奥林匹克试题）

8 给定整数 $n>0$. 有一个天平和 n 个重量分别为 $2^0,2^1,\cdots,2^{n-1}$ 的砝码. 现通过 n 步操作逐个将所有砝码都放上天平，使得在操作过程中，右边的重量总不超过左边的重量. 每一步操作是从尚未放上天平的砝码中选择一个砝码，将其放到天平的左边或右边，直至所有砝码都被放上天平.
求整个操作过程的不同方法个数.（2011年国际数学奥林匹克试题）

9 设集合 A 的元素都是正整数，满足如下条件：
(1) A 的元素个数不小于 3；
(2) 若 $a\in A$，则 a 的所有因数都属于 A；
(3) 若 $a\in A$，$b\in A$，$1<a<b$，则 $1+ab\in A$.
证明：$A=\mathbf{N}^*$.

10 已知三角形 ABC 中，$\angle C=90°$. 证明：对于 $\triangle ABC$ 内任意 n 个点，必可适当地记为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，使得

$$P_1P_2^2+P_2P_3^2+\cdots+P_{n-1}P_n^2\leqslant AB^2.$$

11 寄宿制学校中有512名学生住256间宿舍，每间宿舍合住的两人称为室友. 这些学生共选修9门课. 已知任意两名同学所选课程都不完全相同. 证明：所有学生可以排成一圈满足：任意两个室友相邻；任意非室友相邻的两人中，一个所选的课程是另一人所选课程的子集，且恰少选一门课.（2010年俄罗斯数学奥林匹克试题）

4 抽屉原理

抽屉原理又称鸽巢原理，它是组合数学中的一个基本原理，最先是由德国数学家狄里克利明确地提出来的，因此，也称为狄里克利原理.

把 10 个苹果放到 9 个抽屉里，一定有一个抽屉里至少有 2 个苹果；把 10 个苹果放到 3 个抽屉里，一定有一个抽屉里至少有 4 个苹果；把 9 个苹果放到 3 个抽屉里，一定有一个抽屉里至少有 3 个苹果. 这些看似简单的道理，却是我们解决存在性问题的一个非常有用的方法. 抽屉原理的常用形式为：

抽屉原理 1：如果把 $n+1$ 件东西任意放入 n 个抽屉，那么必定有一个抽屉里至少有两件东西.

抽屉原理 2：如果把 m 件东西任意放入 n 个抽屉，那么必定有一个抽屉里至少有 $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 件东西，也必定有一个抽屉里至多有 $\left[\frac{m}{n}\right]$ 件东西，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

抽屉原理 3：如果把无穷多件东西放入 n 个抽屉，那么必定至少有一个抽屉里有无穷多件东西.

其实，抽屉原理 1 是抽屉原理 2 的特殊情况. 用抽屉原理解题，关键是设计“抽屉”，抽屉设计得好，题目就容易解决，设计得不好，反而使问题复杂化，甚至无法解决. 究竟如何设计，没有统一的套路，需对具体问题作具体分析.

运用抽屉原理解题时，有时用等价的“平均数原理”，在几何上则用“重叠原理”.

当处理存在性问题时，我们常常会用到抽屉原理. 下面的例 1 是一组由易到难的证明题.

例 1 已知集合 $S=\{1, 2, \cdots, 100\}$. 试证明：

(1) 若 A 是 S 的 51 元子集，则必存在 $i, j\in A$，使 $i-j=50$；

(2) 若 B 是 S 的 n 元子集 $(2\leqslant n\leqslant 100)$，则必存在 $i, j\in B$，使得

$$0<i-j<\frac{100}{n-1};$$

(3) 若 C 是 S 的 51 元子集，则必存在 $i, j \in C, i < j$，使得 $i|j$；

(4) 若 D 是 S 的 75 元子集，则 D 中必存在 4 个元素两两互素.

证明 (1) 令 $A_k = \{k, k+50\}, k = 1, 2, \cdots, 50$.

由于 $\bigcup_{k=1}^{50} A_k = S$，根据抽屉原理，51 元集合 A 中必存在两个元素属于同一个 A_k. 取 $i = k+50, j = k$，则 $i - j = 50$. 故结论成立.

(2) 记 $\frac{99}{n-1} = \alpha$，令 $B_k = \{x \in S \mid 1+(k-1)\alpha \leqslant x \leqslant 1+k\alpha\}, k = 1, 2, \cdots, n-1$.

由于 $\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k = S$，根据抽屉原理，$n$ 元集合 B 中必存在两个元素 $i, j(i > j)$ 属于同一个 B_k，从而 $0 < i - j \leqslant \alpha < \frac{100}{n-1}$. 故结论成立.

(3) 令 $C_k = \{x \in S \mid x = 2^p(2k-1), p \in \mathbf{N}\}, k = 1, 2, \cdots, 50$.

由于 $\bigcup_{k=1}^{50} C_k = S$，根据抽屉原理，51 元集合 C 中必存在两个元素 $i, j\ (i < j)$，它们属于同一个 C_k，由 C_k 的构造方法可得 $i|j$. 故结论成立.

(4) 令 $D_1 = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, \cdots, 89, 97\}$, $D_2 = \{2\times 47, 3\times 31, 5\times 19, 7\times 13\}$, $D_3 = \{2\times 43, 3\times 29, 5\times 17, 7\times 11\}$,

$D_4 = \{2\times 41, 3\times 23, 5\times 13, 7^2\}$，其中 D_1 包含 1 及所有 25 个不超过 100 的素数.

因 S 中除 $D_0 = \bigcup_{i=1}^{4} D_i$ 中的元素外剩下 62 个元素，故 75 元子集 D 中必有 13 个元素属于 D_0，根据抽屉原理，必有 4 个元素属于某个 $D_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$，显然它们两两互素. 故结论成立.

注 应用抽屉原理的关键就是找出适当的分类规则，用于证明存在性等结论，通俗地讲就是“制造抽屉”. 这组题目涉及到抽屉原理的简单应用，例如第(1)问是直接简单分组，第(2)问通过划分区间制造抽屉，这是最基本的手法；第(3)问是按最大奇因数来分类；第(4)问在素数上做文章，有较高的技巧，但这也是常用的手法，并且体现了抽屉原理解决问题的灵活性.

例 2 把 $1, 2, \cdots, 10$ 按任意次序排成一个圆圈.

(1) 证明：一定可以找到三个相邻的数，它们的和不小于 18；

(2) 证明：一定可以找到三个相邻的数，它们的和不大于 15.

证明 (1) 设这 10 个数在圆周上排列为 $1, a_1, a_2, \cdots, a_9$(图 4－1). 由于

$$(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9) = 2+3+\cdots+10 = 54,$$

所以 $a_1+a_2+a_3$，$a_4+a_5+a_6$，$a_7+a_8+a_9$ 这三个数中一定有一个数不小于 $\frac{54}{3}=18$.

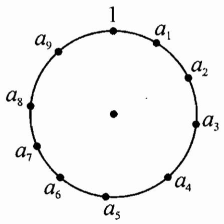


图 4－1

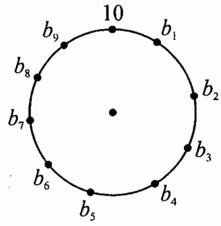


图 4－2

(2) 设这 10 个数在圆周上排列为 10，b_1，$b_2\cdots$，b_9(图 4－2). 由于

$$(b_1+b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6)+(b_7+b_8+b_9)=1+2+\cdots+9=45,$$

所以，$b_1+b_2+b_3$，$b_4+b_5+b_6$，$b_7+b_8+b_9$ 这三个数中一定有一个数不大于 $\frac{45}{3}=15$.

注　本例运用的是与抽屉原理本质相同的“平均数原理”.

例 3　设 m 为给定正整数. 证明：若集合 A_1，A_2，$\cdots$，A_m 两两交集为空，且满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=\mathbf{N}^*$，则必存在一个集合 $A_i(1\leqslant i\leqslant m)$，它含有任意正整数的倍数.

证明　我们考虑无穷数列 $\{n!\}$，其中 $n!\in\mathbf{N}^*$，即 $n!\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$. 根据抽屉原理，在有限个集合 A_1，A_2，$\cdots$，A_m 中，必存在一个集合，不妨设为 A_1，它含有上述数列中的无穷项. 此时，对任意正整数 N，必存在一个正整数 $N_1\geqslant N$，使 $N_1!\in A_1$，因而集合 A_1 含有 N 的倍数 $N_1!$. 由 N 的任意性知结论成立.

注　本例所使用的是着眼于无限形式的抽屉原理 3. 注意题目中的条件“两两交集为空”可以去掉而不影响结果.

例 4　从 1，2，3，$\cdots$，16 这 16 个数中，最多能选出多少个数，使得被选出的数中，任意三个数都不是两两互素的.

解　首先，取出 1，2，$\cdots$，16 中所有 2 或 3 的倍数，有

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16.$$

这 11 个数要么是 2 的倍数，要么是 3 的倍数. 由抽屉原理知，这 11 个数中的任意三个数，都必有两个数同为 2 或 3 的倍数，它们的最大公约数大于 1，也就是说这三个数是不两两互素的. 所以，从 1，2，$\cdots$，16 中可以选出 11

个数满足要求.

下面证明从 1，2，…，16 中任取 12(或 12 以上)个数，其中一定有 3 个数两两互素.

事实上，令数组 $A=\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. 数组 A 中有 7 个数，而且这 7 个数是两两互素的. 从 1，2，…，16 中任取 12 个数，由于 A 以外只有 9 个数，故 A 中至少有 3 个数被选出，这三个数是两两互素的.

综上可知，最多可以选出 11 个满足题设的数.

注　本例是例 1 第(4)问的同类问题. 相比之下，本例数据更简易，但多了一个举例说明“上界 11 可以达到”的步骤. 竞赛中经常会出现这种需要两方面论证的情况. 对例 1 第(4)问，也可以用类似本题的方法找出 $S=\{1, 2, \cdots, 100\}$ 的一个 74 元子集不满足题设，因而可证明 75 是满足题设的最小整数值. 请读者一试.

例 5　设 T 是由 60^{100} 的所有正因数组成的集合. S 是 T 的一个子集，其中没有一个数是另一个数的倍数. 求 S 的元素个数的最大值.

解　约定下文中的 a, b, c 都是非负整数. 因为 $60=2^2\cdot 3\cdot 5$，所以

$$T=\{2^a3^b5^c \mid 0\leqslant a\leqslant 200, 0\leqslant b, c\leqslant 100\}.$$

令
$$S=\{2^{200-b-c}3^b5^c \mid 0\leqslant b, c\leqslant 100\},$$

对任意 $0\leqslant b, c\leqslant 100$，有 $0\leqslant 200-b-c\leqslant 200$，所以 S 是 T 的一个子集且含 101^2 个元素. 下面我们证明 S 中没有一个数是另一个数的倍数，并且元素个数超过 101^2 的子集都不满足这个条件.

假设 $2^{200-b-c}3^b5^c$ 是 $2^{200-i-j}3^i5^j$ 的倍数，且 $(b, c)\neq(i, j)$，则

$$200-b-c\geqslant 200-i-j,\ b\geqslant i,\ c\geqslant j,$$

第一个不等式表明 $b+c\leqslant i+j$，与后两个不等式联立得 $b=i$, $c=j$. 矛盾. 所以 S 中没有一个元素是另一个的倍数.

设 U 是 T 的一个超过 101^2 个元素的子集. 因为只有 101^2 对互异的 (b, c)，由抽屉原理，U 中必有两个元素 $u_1=2^{a_1}3^{b_1}5^{c_1}$，$u_2=2^{a_2}3^{b_2}5^{c_2}$，其中 $b_1=b_2$, $c_1=c_2$，而 $a_1\neq a_2$. 若 $a_1>a_2$，则 u_1 是 u_2 的倍数；若 $a_1<a_2$，则 u_2 是 u_1 的倍数. 因此 U 不满足题设条件.

所以 T 的满足题设条件的子集最多可以含有 $101^2=10\,201$ 个元素.

注　本例中制造抽屉的手法与例 1 的第(3)问相似.

例 6　正实数 a_1, a_2, …, a_{2011} 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_{2011}$. 证明：其中一定存在两个数 a_i, a_j $(i<j)$，使得

$$a_j - a_i < \frac{(1+a_i)(1+a_j)}{2010}.$$

证明　令 $x_i = \dfrac{2010}{1+a_i}$，$i=1, 2, \cdots, 2011$. 则 $0 < x_{2011} < x_{2010} < \cdots < x_1 < 2010$，即 2011 个数 x_{2011}，x_{2010}，$\cdots$，x_1 在如下 2010 个区间里：

$$(0, 1], (1, 2], (2, 3], \cdots, (2008, 2009], (2009, 2010),$$

所以，由抽屉原理知，其中一定有两个数在同一个区间里，故一定存在 $1 \leqslant k \leqslant 2010$，使得 $x_k - x_{k+1} < 1$，从而

$$\frac{2010}{1+a_k} - \frac{2010}{1+a_{k+1}} < 1,$$

即
$$a_{k+1} - a_k < \frac{(1+a_k)(1+a_{k+1})}{2010},$$

故命题得证.

注　本例中制造抽屉的手法与例 1 的第(2)问相似，但需先作一个代换.

例 7　一位象棋大师为参加一次比赛将进行 77 天的练习，他准备每天至少下一局棋，而每周至多下 12 局棋. 证明存在一个正整数 n，使得他在这 77 天里有连续的 n 天共下了 21 局棋.

证明　设 a_i 是这位大师从第 1 天到第 i 天下棋的总局数，$i=1, 2, \cdots, 77$. 因为他每天至少下一局棋，所以

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{77}.$$

又因为每周至多下 12 局棋，所以 77 天中下棋的总局数 $a_{77} \leqslant 12 \times \dfrac{77}{7} = 132$.

考虑数列 a_1+21，a_2+21，$\cdots$，$a_{77}+21$，有

$$22 \leqslant a_1+21 < a_2+21 < \cdots < a_{77}+21 \leqslant 132+21 = 153.$$

考察数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{77}，a_1+21，a_2+21，$\cdots$，$a_{77}+21$. 该数列有 154 个项，每个数都是小于等于 153 的正整数. 由抽屉原理，必定存在 i，j 使得

$$a_i = a_j + 21.$$

令 $n = i - j$，那么该大师在第 $j+1$，$j+2$，$\cdots$，$j+21(=i)$ 的连续 n 天中共下了 21 局棋.

注　本问题中，假如考虑第 i 天下棋的局数 b_i，则很难设计适当的“抽屉”，保证一个抽屉中存在和为 21 且下标连续的若干个 b_i. 转而考察第 1 天到

第 i 天下棋的总局数 a_i，那么任意两个 a_i 之差总是连续若干天下棋的局数，因此对 a_i 就比较容易设计"抽屉"解决问题.

此外，本题也可直接把$\{1, 2, \cdots, 132\}$分成 63 个二元集 A_{pq} 及 6 个一元集 A_r 的并集，其中

$$A_{pq}=\{42p+q, 42p+q+21\}, p=0, 1, 2, q=1, 2, \cdots, 21,$$
$$A_r=\{r\}, r=127, 128, \cdots, 132.$$

根据抽屉原理可知 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 中必有两数在同一个 A_{pq} 中.

例 8　设 100 个非负实数的和为 1，证明：可将它们适当排列在圆周上，使得将每两个相邻数相乘后，所得的 100 个乘积之和不超过 0.01.

证明　记这 100 个数字为 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$，它们所能构成的圆排列共 99！种，记这 99！种情况所对应的相邻数乘积之和分别为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，其中 $n=99!$.

由于圆周上使 x_i, x_j 相邻可有两种次序，对每种次序，相应的 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$ 的圆排列个数等于其余 98 个数在直线上的全排列数，即 98！个，从而使 x_i, x_j 相邻的圆排列共 $2\cdot 98!$ 种.

考察式子 $M=\sum\limits_{i=1}^{n}S_i$.

根据上述讨论可知，每个乘积 $x_ix_j(1\leqslant i<j\leqslant 100)$ 在该式右端出现的次数为 $2\cdot 98!$，因此结合柯西不等式得

$$\begin{aligned}M&=2\cdot 98!\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 100}x_ix_j=98!\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{100}x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{100}x_i^2\right]\\&\leqslant 98!\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{100}x_i\right)^2-\frac{1}{100}\left(\sum_{i=1}^{100}x_i\right)^2\right]=\frac{99!}{100}.\end{aligned}$$

由平均值原理知，存在一个 $i\,(1\leqslant i\leqslant 99!)$ 使 $S_i\leqslant\dfrac{M}{99!}=\dfrac{1}{100}$，命题得证.

注　平均数原理就其证明方法而言，和抽屉原理几乎一样，但它可以进一步适用于非正整数的场合. 本题中对所有可能的排列所组成的整体应用平均数原理，说明了 100 个乘积之和"平均而言"不超过 0.01，因而结论成立. 平均数原理的应用往往也反映了从整体考虑问题的思想方法.

例 9　给定一个 n^2+1 项的实数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n^2+1}, \tag{①}$$

证明该数列中一定存在一个由 $n+1$ 数组成的子数列，这个子数列是递增的或

递减的.

证明 从数列①中的每一项 a_i，向后可选出若干个单调增子数列，其中有一个项数最多的单调增子数列，设其项数为 l_i，$i=1, 2, \cdots, n^2+1$. 于是得到另一个整数数列

$$l_1, l_2, l_3, \cdots, l_{n^2+1}. \quad ②$$

如果②中有一个数 $l_k \geqslant n+1$，那么命题已经获证，否则，即不存在项数超过 n 的单调增子数列，也就是 $0<l_i \leqslant n$，$i=1, 2, \cdots, n^2+1$.

根据抽屉原理，在 $l_1, l_2, l_3, \cdots, l_{n^2+1}$ 中有 $\left[\dfrac{n^2+1-1}{n}\right]+1=n+1$ 个数是相等的，不妨设为 $l_{k_1}=l_{k_2}=\cdots=l_{k_{n+1}}=l$，其中 $k_1<k_2<\cdots<k_{n+1}$.

由于所有 a_i 是不同的实数，所以对应的 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 必然满足

$$a_{k_1}>a_{k_2}>\cdots>a_{k_{n+1}}. \quad ③$$

否则，设 $k_i<k_j$，有 $a_{k_i}<a_{k_j}$，那么把 a_{k_i} 加到从 a_{k_j} 开始的长度为 l 的单调数列的前面，构成了从 a_{k_i} 开始的长度为 $l+1$ 的单调增数列，这和 l 的最大性矛盾.

由于数列③本身是一个单调减子数列，这就证明了如果不存在 $n+1$ 个项的单调增子数列，便一定存在有 $n+1$ 项的单调减子数列，同样可证，如果(1)不存在项数为 $n+1$ 的单调减子数列，那么必定存在项数为 $n+1$ 的单调增子数列.

注 本例是由数学家 P. Erdös 和 A. Szekeres 发现和证明的一个定理，其简单推广形式为：给定一个 $mn+1$ 项的实数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{mn+1}$，若该数列的每个单调增子数列至多含 m 项，则一定存在一个 $n+1$ 项的单调减子数列.

例 10 给出斐波那契数列$\{F_n\}$如下：1, 1, 2, 3, 5, 8, …(自第 3 项起，每项等于前两项之和). 试问，在数列的前一亿项中，是否会有某项是 10 000 的倍数？

解 结论是肯定的.

为方便起见，约定 $F_0=0$.

设 f_n 是 F_n 除以 10 000 所得的余数($n\in\mathbf{N}$)，则 $0\leqslant f_n\leqslant 9999$，因此根据抽屉原理，在 $10\,000^2+1=10^8+1$ 对整数对(f_n, f_{n+1}) $(0\leqslant n\leqslant 10^8)$ 中必有两对相同，不妨设$(f_p, f_{p+1})=(f_q, f_{q+1})$，其中 $p, q\in\mathbf{N}$，$0\leqslant p<q\leqslant 10^8$，此时 $F_p\equiv F_q$，$F_{p+1}\equiv F_{q+1} \pmod{10\,000}$.

若 $p\geqslant 1$，则根据递推关系得

$$F_{q-1}=F_{q+1}-F_q\equiv F_{p+1}-F_p=F_{p-1}(\bmod 10\,000),$$

以下依次有

$$F_{q-2}\equiv F_{p-2},\ \cdots,\ F_{q-p+1}\equiv F_1,\ F_{q-p}\equiv F_0=0(\bmod 10\,000).$$

若 $p=0$，则 $F_{q-p}\equiv F_0=0(\bmod 10\,000)$ 仍成立.

显然 $F_{q-p}>0$，故 F_{q-p} 是 10 000 的倍数，且 $1\leqslant q-p\leqslant 10^8$，说明 F_{q-p} 的确是前一亿项中的一项. 结论成立.

注　本例若直接递推或构造出某项是 10 000 的倍数固然直截了当，但显然困难重重，而作为一个存在性命题，抽屉原理也许是解决的办法之一. 本例中用的是通过剩余类制造抽屉的方法，然而若单纯地证明存在两项关于模 10 000同余并无多大用处，关键在于如何使同余关系不断"前置"，最终得到某项与 $F_0=0$ 同余. 考虑到有 $F_{n-1}=F_{n+1}-F_n$，我们只需说明存在两个数组 $(F_n,\ F_{n+1})$，它们每个分量对应同余即可，而这点仍可用抽屉原理给出证明.

例 11　某次考试有 5 道选择题，每题都有 4 个不同的答案供选择，每人每题恰选 1 个答案. 在 2000 份答卷中发现存在一个 n，使得任何 n 份答卷中都存在 4 份，其中每两份的答案都至多有 3 道题相同. 求 n 的最小可能值. (2000 年中国数学奥林匹克试题)

解　将每题的四个选项依次记为 1，2，3，4，每份答案记为$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$，其中 $a,\ b,\ c,\ d,\ e\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

对给定数组$(a,\ b,\ c,\ d)$，$a,\ b,\ c,\ d\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，将 2000 份答卷中答案为$(a,\ b,\ c,\ d,\ 1)$，$(a,\ b,\ c,\ d,\ 2)$，$(a,\ b,\ c,\ d,\ 3)$，$(a,\ b,\ c,\ d,\ 4)$的答卷归为一类，这样共 $4^4=256$ 类. 由抽屉原理，至少有 $\left\lceil\frac{2000}{256}\right\rceil=8$ 份答卷属于一类.

不妨取其中 8 份答卷作为 A 组答卷；在剩下的答卷中，同理至少可取出 $\left\lceil\frac{1992}{256}\right\rceil=8$ 份，作为 B 组答卷；剩下的答卷中仍至少可取出 $\left\lceil\frac{1984}{256}\right\rceil=8$ 份，作为 C 组答卷. 在 $A,\ B,\ C$ 组这 24 份答卷中，根据抽屉原理，任意 4 份答卷必有两份在一组，则它们至少有 4 题答案相同. 所以 $n\geqslant 25$.

另一方面，当 $n=25$ 时，构造如下 2000 份答卷：

取 250 组不同的数组$(a,\ b,\ c,\ d)$，$a,\ b,\ c,\ d\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，对其中每个数组，取 $e\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$使得 $a+b+c+d+e$ 是 4 的倍数，对这样一组$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$，令 8 份答卷写有这样的答案，共 2000 份答卷. 任取其中 25 份答卷，必有 4 份答案两两不同，再根据数组$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$的取法可知，其中任何两份答卷至多只有 3 题答案相同.

综上可知，n 的最小可能值为 25.

注　本题的表述比较复杂，应先仔细分析题目要求. 一方面我们要构造 2000 份答卷，尽可能使比较小的 n 满足题意；另一方面又要找到尽可能大的 k，使得任意 2000 份答卷都不满足题意，即存在 k 份答卷，使得其中任何 4 份答卷中，总有两份的答案至少有 4 题一致.

在上述两方面的讨论中，“任何 n 份答卷”、“任意 2000 份答卷”、“任何 4 份答卷”这些表述均涉及到答卷的任意性，而要处理的又是存在性问题，于是抽屉原理便有了用武之地(注意在解答最后一步验证“25 份答卷中必有 4 份答案两两不同”时，也用了抽屉原理：假设 25 份答卷中只出现 3 种不同的答案，那么必有一种答案出现超过 8 次).

抽屉原理是解决存在性问题的有力工具. 抽屉原理本身并不难，难在如何运用它去解决问题. 在具体问题中如何制造抽屉，希望本节的例题对读者能有所启示.

习　题　4

1 从 1，2，…，$2n$ 这 $2n$ 个正整数中任取 $n+1$ 个数，证明其中一定存在两个数是互素的.

2 在 1，2，3，…，100 这 100 个正整数中任取 11 个数，证明其中一定有两个数的比值不超过 $\frac{3}{2}$.

3 任给 7 个实数，求证：其中必有两个数 x，y，满足 $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} < \frac{\sqrt{3}}{3}$.（1984 年加拿大数学奥林匹克试题）

4 在 3×4 的长方形中，任意放置 6 个点，证明：一定可以找到两个点，它们的距离不大于 $\sqrt{5}$.（1981 年全苏数学奥林匹克试题）

5 已知集合 A 与 B 是 $\{1, 2, \cdots, 100\}$ 的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且 $A\cap B$ 为空集，且 $n\in A$ 时，总有 $2n+2\in B$. 求集合 $A\cup B$ 的元素个数最大值.（2007 年全国高中数学联赛试题）

6 某年级 n 位同学参加语文和数学两门课的考试，每门课的考分从 0 到 100 分. 假如考试的结果没有两位同学的成绩是完全相同的(即至少有一门课的成绩不同). 另外，“甲比乙好”是指同学甲的语文和数学的考分均分别高于同学乙的语文和数学的考分. 试问：当 n 最小为何值时，必存在三位同学(设为甲、乙、丙)，有甲比乙好，乙比丙好？（2010 年全国高中数学联

赛山东省预赛试题)

7 在 50×50 表格中,每格写有一个正整数,使整个表格中 1, 2, …, 50 各出现 50 次. 证明:存在某行或某列至少包含 8 个不同数.

8 设正整数构成的数列$\{a_n\}$使得

$$a_{10k-9}+a_{10k-8}+\cdots+a_{10k}\leqslant 19$$

对一切 $k\in\mathbf{N}^*$ 恒成立. 记该数列若干连续项的和 $\sum\limits_{p=i+1}^{j}a_p$ 为 $S(i, j)$,其中 $i, j\in\mathbf{N}^*$ 且 $i<j$. 求证:所有 $S(i, j)$构成的集合等于 $\mathbf{N}^*$. (2009 年上海市高中数学竞赛试题)

9 已知无穷数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=3$, $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+a_{n-3}$, $n=4, 5, \cdots$. 求证:对任何正整数 m,存在某个正整数 n 使得 $m\mid a_n$.

10 将圆周上的所有点染为 N 种颜色之一.

(1) 若 $N=2$,证明:必存在一个等腰三角形,其顶点同色;

(2) 证明:对任意给定正整数 $N\geqslant 2$,必存在一个梯形,它的四个顶点同色. (2007 年白俄罗斯数学奥林匹克试题)

5 容斥原理

我们知道加法原理是一个重要的计数原理，然而应用加法原理时，须将集合分划成若干个两两不交的子集，以便达到分别计数的目的. 但有时候要做出便于计数的分划并不容易. 这就需要把加法原理加以推广.

我们允许一些元素被重复计数，然后将重复计数的予以排除，再将多被排除的补上，如此反复地排除与补充，最终得出精确的结果. 这个计数的过程体现于如下的容斥原理.

容斥原理Ⅰ：对 n 个有限集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|,$$

其中，$|X|$表示有限集合 X 的元素个数.

该结论可用数学归纳法或“贡献法”来证明.

在本节中，我们用符号$\overline{X}$表示集合 X 在某个给定全集 I 下的补集，用$|X|$表示有限集 X 的元素个数.

注意到对 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有如下的交、并对偶律：

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}=\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n},$$

故当全集 I 为有限集时，有

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=|I|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|.$$

这样，容斥原理Ⅰ即与下面的容斥原理Ⅱ(或称为逐步淘汰原理)等价.

容斥原理Ⅱ：对有限集 I 的 n 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=|I|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

上述两种形式的容斥原理在 $n=2$，3 的情形是基本且重要的.

例 1　在不大于 1000 的正整数中，有多少个数既不被 5 整除又不被 7 整除？这些正整数的和是多少？

解　设不大于 1000 的正整数组成集合 I，对 $k=5,7,35$，设 I 中所有 k 的倍数组成集合 A_k，其中 $A_{35}=A_5\cap A_7$.

由容斥原理得，所求正整数的个数为

$$\begin{aligned}|\overline{A_5}\cap\overline{A_7}|&=|I|-|A_5|-|A_7|+|A_{35}|\\&=1000-\left[\frac{1000}{5}\right]-\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{35}\right]\\&=1000-200-142+28=686.\end{aligned}$$

这些正整数的和为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{1000}i-\sum_{i\in A_5}i-\sum_{i\in A_7}i+\sum_{i\in A_{35}}i=\sum_{i=1}^{1000}i-\sum_{i=1}^{200}5i-\sum_{i=1}^{142}7i+\sum_{i=1}^{28}35i\\=&\frac{1000\times1001}{2}-\frac{5\times200\times201}{2}-\frac{7\times142\times143}{2}+\frac{35\times28\times29}{2}\\=&343\,139.\end{aligned}$$

注　在求元素个数时，我们直截了当地应用容斥原理；在求元素之和时，则采用了与容斥原理同样的思想.

例 2　设 $0<a_1<a_2<\cdots<a_{3n-2}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$. 证明：对 $(a_1,a_2,\cdots,a_{3n-2})$ 的任意两个排列 $(b_1,b_2,\cdots,b_{3n-2})$，$(c_1,c_2,\cdots,c_{3n-2})$，必存在某个 $i\in\{1,2,\cdots,3n-2\}$，使得 $a_ib_ic_i\geqslant a_n^3$.

证明　记 $A=\{i\mid a_i\geqslant a_n\}$，$B=\{i\mid b_i\geqslant a_n\}$，$C=\{i\mid c_i\geqslant a_n\}$，则 A，B，C 均为 $2n-1$ 元集合. 从而根据容斥原理，依次可得

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|\geqslant2(2n-1)-(3n-2)=n,$$

$$\begin{aligned}|A\cap B\cap C|&=|A\cap B|+|C|-|(A\cap B)\cup C|\\&\geqslant n+(2n-1)-(3n-2)=1.\end{aligned}$$

不妨设 $i\in A\cap B\cap C$，则 $a_ib_ic_i\geqslant a_n^3$.

注　本题是用容斥原理证明存在性的一个例子. 如果注意到下述例 7 的结论，本题也可以这样证明 $|A\cap B\cap C|\geqslant1$：

$$\begin{aligned}|A\cap B\cap C|=&|A|+|B|+|C|-|A\cup B|-|B\cup C|-|C\cup A|+\\&|A\cup B\cup C|\\=&3\times(2n-1)+(|A\cup B\cup C|-|A\cup B|)-|B\cup C|-\end{aligned}$$

$$|C\cup A|$$
$$\geqslant 3\times(2n-1)+0-(3n-2)-(3n-2)\geqslant 1.$$

例 3 在$(1, 2, \cdots, n)$的一个排列$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$中，如果 $a_i\neq i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，则称这种排列为一个错位排列(也称更列). 求错位排列的个数 D_n.

解 设$(1, 2, \cdots, n)$的所有排列组成集合 I，并将 I 中满足条件 $a_i=i$ 的排列全体记为 A_i. 显然 $D_n=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|$. 易知

$$|I|=\mathrm{P}_n^n=n!,\ |A_i|=\mathrm{P}_{n-1}^{n-1}=(n-1)!\ (1\leqslant i\leqslant n),$$

同理，对 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$ 可得

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_s}|=\mathrm{P}_{n-s}^{n-s}=(n-s)!.$$

由容斥原理得

$$D_n=|I|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k(n-k)!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

注 本题是“错位排列”计数问题. 由于所设的集合 A_i 恰好含有那些需被排除的排列，且每个$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_s}|$都很容易计算，故采用容斥原理计数条理清晰，确保不重复不遗漏.

例 4 求 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数字满足如下性质的排列的种数：第 1 个到第 i $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 个位置不能由 $1, 2, \cdots, i$ 组成.

解 令 A_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$为 1, 2, 3, 4, 5 排列组成的集合，它的任意一个元素的前 i 个数是 $1, 2, \cdots, i$ 的一个排列. 则

$$|A_1|=4!=24,\ |A_2|=2!\times 3!=12,\ |A_3|=3!\times 2!=12,$$
$$|A_4|=4!=24,\ |A_1\cap A_2|=3!=6,\ |A_1\cap A_3|=2!\times 2!=4,$$
$$|A_1\cap A_4|=3!=6,\ |A_2\cap A_3|=2!\times 2!=4,\ |A_2\cap A_4|=$$
$$2!\times 2!=4,\ |A_3\cap A_4|=3!=6,\ |A_1\cap A_2\cap A_3|=$$
$$2!=2,\ |A_1\cap A_2\cap A_4|=2!=2,\ |A_1\cap A_3\cap A_4|=2!=2,$$
$$|A_2\cap A_3\cap A_4|=2!=2,\ |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=1.$$

所以，由容斥原理得

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|-|A_1\cap$$
$$A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_4|-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_4|-$$

$$|A_3 \cap A_4|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_1 \cap A_3 \cap A_4|+ |A_2 \cap A_3 \cap A_4|-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$=24+12+12+24-6-4-6-4-4-6+2+2+2+2-1=49,$$

所以，满足题意的排列有 $5!-49=120-49=71$.

例 5　给定正整数 n，某个协会中恰好有 n 个人，他们属于 6 个委员会，每个委员会至少由 $\frac{n}{4}$ 个人组成. 证明：必有两个委员会，他们的公共成员数不小于 $\frac{n}{30}$.

证明　设 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 表示 6 个委员会的成员集合. 则

$$n=|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6| \geqslant \sum_{i=1}^{6}|A_i|-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 6}|A_i \cap A_j|, \qquad ①$$

所以 $$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 6}|A_i \cap A_j| \geqslant \sum_{i=1}^{6}|A_i|-n \geqslant 6 \times \frac{n}{4}-n=\frac{n}{2},$$

于是，必存在 $1 \leqslant i<j \leqslant 6$，使得

$$|A_i \cap A_j| \geqslant \frac{1}{C_6^2} \times \frac{n}{2}=\frac{n}{30}.$$

注　上述证明中①式的一般情形如下：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \geqslant \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n}|A_i \cap A_j|.$$

该式常用于估计某些集合的元素个数(请思考该式的正确性).

例 6　设 $n \in \mathbf{N}^*$，我们称集合 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ 的一个排列 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ 具有性质 P，是指在 $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ 中至少有一个 i，使得 $|x_i-x_{i+1}|=n$. 证明：具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多. (1989 年国际数学奥林匹克试题)

证明　设 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ 的排列中，使 k 与 $k+n$ 相邻的排列组成集合 A_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$，则 $A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 是有性质 P 的排列的集合.

由容斥原理得

$$|A| \geqslant \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n}|A_i \cap A_j|. \qquad ①$$

上式中，有

$$|A_i|=2 \cdot (2n-1)!,\ |A_i \cap A_j|=2^2 \cdot (2n-2)!$$

(将 i 与 $i+n$，j 与 $j+n$ 并在一起各有两种位置顺序，又将这 2 个数对与剩下的 $2n-4$ 个数进行全排列，排列数为$(2n-2)!$). 所以

$$|A| \geqslant 2n \cdot (2n-1)! - C_n^2 \cdot 2^2 \cdot (2n-2)! = (2n)! \cdot \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2} \cdot (2n)!,$$

即 A 中元素数超过总排列数的一半. 故具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多.

注 在找到集合 A_k 后，根据①式可以对$|A|$作出下界估计. 如果完整地应用容斥原理的等式，我们则可进一步将$|A|$表示成关于 n 的求和式

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} 2^k C_n^k (2n-k)!.$$

例 7 证明：对 n 个有限集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |A_i \cup A_j| + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

证明 取一个包含 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 的有限集 I 为全集. 注意到 A_i 与$\overline{A_i}$ 互为补集，由容斥原理可得

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = |I| - \sum_{i=1}^{n} |\overline{A_i}| + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |\overline{A_i} \cap \overline{A_j}| - \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} |\overline{A_i} \cap \overline{A_j} \cap \overline{A_k}| + \cdots + (-1)^n |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|. \quad ①$$

对任意 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant n$，有

$$\begin{aligned} |\overline{A_{i_1}} \cap \overline{A_{i_2}} \cap \cdots \cap \overline{A_{i_s}}| &= |\overline{A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_s}}| \\ &= |I| - |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_s}|, \end{aligned}$$

故对这样的 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 求和可知

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1, i_2, \cdots, i_s} |\overline{A_{i_1}} \cap \overline{A_{i_2}} \cap \cdots \cap \overline{A_{i_s}}| \\ &= C_n^s \cdot |I| - \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_s} |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_s}|. \end{aligned} \quad ②$$

记须证等式的右端为 S，则由①，②得

$$\begin{aligned} &|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= |I| - (C_n^1 \cdot |I| - \sum_{i=1}^{n} |A_i|) + (C_n^2 \cdot |I| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |A_i \cap A_j|) - \end{aligned}$$

$$(\mathrm{C}_n^3\cdot|I|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|)+\cdots+(-1)^n(\mathrm{C}_n^n\cdot|I|-|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|).$$

$$=|I|(\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2-\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n)+S=S.$$

证毕.

注　本题结论由容斥原理推得，并与容斥原理形式互为对偶. 这个结论并不具有容斥原理或逐步淘汰原理那样明显的计数意义，但仍给出了关于 n 个有限集及其交、并形式之间的一个计数关系. 对本题也可给出直接的证明，做法类似于容斥原理本身的推导过程.

从上述几个例子可以看出，容斥原理在计数方面以及在证明存在性、恒等关系、不等关系等方面具有广泛的应用.

在本节最后，我们介绍一个技巧性较强的例子.

例 8　设有限集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足

$$|A_i\cap A_{i+1}|>\frac{n-2}{n-1}|A_{i+1}|,\ i=1,2,\cdots,n\ (A_{n+1}=A_1).$$

证明：$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\neq\varnothing$.（2007 年中国国家队培训题）

证明　对 $k=2, 3, \cdots, n$，令 $B_k=\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i$. 下面证明：当 $k=2, 3, \cdots, n$ 时，有

$$|B_k|>\frac{n-2}{n-1}|A_k|-\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{k-1}|A_i|. \qquad ①$$

用数学归纳法. 当 $k=2$ 时，$|B_2|=|A_1\cap A_2|>\dfrac{n-2}{n-1}|A_2|$，①成立.

设①已对 k 成立，并且 $2\leqslant k<n$，考虑 $k+1$ 的情形.

对 B_k 和 $A_k\cap A_{k+1}$ 用容斥原理得

$$|B_k\cup(A_k\cap A_{k+1})|=|B_k|+|A_k\cap A_{k+1}|-|B_k\cap(A_k\cap A_{k+1})|. \qquad ②$$

显然 $B_k, A_k\cap A_{k+1}\subseteq A_k$，故 $B_k\cup(A_k\cap A_{k+1})\subseteq A_k$，因此②的左端满足

$$|B_k\cup(A_k\cap A_{k+1})|\leqslant|A_k|.$$

对②的右端，注意①已对 k 成立，又由已知得 $|A_k\cap A_{k+1}|>\dfrac{n-2}{n-1}|A_{k+1}|$，并且 $B_k\cap(A_k\cap A_{k+1})=B_{k+1}$.

综合以上各方面可得

$$|A_k| > \frac{n-2}{n-1}|A_k| - \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{k-1}|A_i| + \frac{n-2}{n-1}|A_{k+1}| - |B_{k+1}|,$$

整理即得①对 $k+1$ 成立.

由数学归纳法可知,特别地,①对 n 成立,即

$$|B_n| > \frac{n-2}{n-1}|A_n| - \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}|A_i|.$$

不失一般性,不妨一开始就设 $|A_n| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|$,则由上式得 $|B_n|>0$,从而

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = B_n \neq \varnothing.$$

注　本例反复运用容斥原理在 $n=2$ 的情形,配合数学归纳法证明①式.考虑到已知条件具有轮换结构,故可得到 n 个形如①式的不等关系.因此,无论利用平均数原理还是上述证明中的极端原理,均可证得结论.

习　题　5

1 在所有 n 位数中,求数码 1, 2, 3 都出现,但其他数码均不出现的数的个数.

2 全体正整数中凡是 3 的倍数或 4 的倍数都划去,但其中 5 的倍数都保留(例如,15, 20, 30, 40, 60,…都保留).将留下的数,按从小到大的顺序写成了一个数列 $\{a_n\}$:$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=5$, …. 求 a_{2005}.

3 对有限集合 S,$n(S)$ 表示 S 的子集的个数.设 A、B、C 为三个集合,$n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$, $|A|=|B|=100$. 求 $|A\cap B\cap C|$ 的最小值.

4 将 $a\times b\times c$ ($a, b, c\in \mathbf{N}^*$) 的长方体分成 abc 个 $1\times1\times1$ 的小正方体.求长方体的一条对角线穿过的小正方体的个数.

5 在面积为 1001 的区域中,有 2001 个面积为 1 的区域 S_i($1\leqslant i\leqslant 2001$).求证,必有两个区域 S_i, S_j($1\leqslant i<j\leqslant 2001$),它们公共部分的面积不小于$\frac{1}{2001}$.

6 在一次实战军事演习中,红方的一条直线防线上设有 20 个岗位.为了试验 5 种不同的新式武器,打算安排 5 个岗位配备这些新式武器,要求第一个和最后一个岗位不配备,每相邻 5 个岗位至少有一个岗位配备,相邻 2

个岗位不同时配备.问:共有多少种配备新式武器的方案?(2005年全国高中数学联赛浙江省预赛试题)

7 对给定 $m, n \in \mathbf{N}^*$,设满足条件 $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的非空集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_m 的组数为 $f(m, n)$. 证明 $f(m, n)=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \mathrm{C}_m^k (2^{m-k}-1)^n$.

8 设 $a, b, c>1$,且满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$. 定义集合 $S(x)=\{[kx] \mid k \in \mathbf{N}^*\}$. 证明:在 $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ 中必有两个的交集是无限集.

6 极端原理

极端原理就是一种从特殊对象看问题的方法，它以对象数量上的极端情况，比如最大值、最小值、最长、最短等，为出发点，寻找解题的突破口和答案. 极端原理作为一种解题的思想，在几何、数论、组合、图论等方面都有着广泛的应用. 利用这个简单而又通俗的原理可以解决不少与**存在性**有关的数学问题和其他问题. 在具体解题中，需要我们作具体分析.

在应用极端原理时，我们应积极利用如下事实(1)、(2)，并注意事实(3)：

(1) 有限个数中一定有最大数和最小数；

(2) 无限个正整数中有最小数；

(3) 无限个实数不一定有最大数或最小数.

例 1 已知 $2n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 个星球两两之间距离不相等. 每个星球上的人都观察离该星球最近的一个星球. 求证：必存在一个星球未被观察.

证明 我们用数学归纳法证明结论.

当 $n=1$ 时，显然距离最近的一对星球相互观察，另一个星球未被观察，命题成立.

对 n $(n\geqslant 2)$ 的情况，因为 $2n+1$ 个星球两两之间距离是有限个数且两两不等，根据事实(1)，必有唯一的一对星球距离最近，它们必相互观察. 现在去掉这两个星球，根据归纳假设，必有一个星球没被观察到，因此对一般的 n 命题也成立.

注 在用数学归纳法证明中，需将 n 的情况转化为小于 n 的情况. 不难发现只要两个星球距离很近，以至于它们不去观察别的星球，那么就能将这两个星球去掉. 根据事实(1)，有限个距离中必有最小值，而距离的最小性足以保证上述目的可以达到.

一般地，在对元素个数 n 施行数学归纳法证明时，可以考虑具有某种极端性质的元素，试图将其去掉，从而将 n 的情况转化为小于 n 的情况.

例 2 平面上有 n $(n\geqslant 5)$ 个点. 将它们用红、蓝两色染色. 设任何 3 个同色点不共线. 求证：存在一个三角形使得

(1) 它的三个顶点染有相同颜色；

(2) 这三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点.

证明　由于点数 $n \geqslant 5$，且所有的点只染两种颜色，所以，至少有三点同色. 因此，存在三个顶点同色的三角形.

我们在这些顶点同色的三角形中取一个面积最小的三角形. 如果这个三角形的每一条边上都有一个另一种颜色的点，那么我们就找到了另一个三个顶点同色的三角形，而且，这个三角形具有更小的面积，这是不可能的.

因此题设的三角形一定存在.

注　本题证明中使用了极端原理. 我们考虑的是面积，是一种很好的想法，值得我们仔细体会.

例 3　证明不定方程 $x^3+2y^3=4z^3$ 没有正整数解(x, y, z).

证明　假设方程有正整数解(x_1, y_1, z_1). 由于

$$x_1^3+2y_1^3=4z_1^3,$$

所以 x_1^3 是偶数，故 x_1 是偶数. 设 $x_1=2x_2$，则

$$8x_2^3+2y_1^3=4z_1^3,$$

即

$$4x_2^3+y_1^3=2z_1^3,$$

故 y_1 是偶数. 设 $y_1=2y_2$，则

$$4x_2^3+8y_1^3=2z_1^3,$$

即

$$2x_2^3+4y_1^3=z_1^3,$$

故 z_1 是偶数. 设 $z_1=2z_2$，则

$$2x_2^3+4y_1^3=8z_2^3.$$

所以(x_2, y_2, z_2)也是方程的一组正整数解，且 $x_2<x_1$.

进而可得(x_3, y_3, z_3)，(x_4, y_4, z_4)，…也是方程的正整数解，且

$$x_1=2x_2=2^2x_3=\cdots,$$

根据事实(2)，无限个正整数中有最小数，而正整数不可能无限递减，矛盾.

所以原方程没有正整数解.

注　本题所采用的是无穷递降法. 这个方法的特点是：从所设条件出发，构造出某个无穷递降的过程，得到一系列具有某种性质的对象 a_1，a_2，a_3，…. 当需要用反证法证明这种对象不存在时，只需说明这个过程不能无穷延续，此时可能会涉及事实(2)等形式的极端原理.

在证明的陈述上，若将极端原理与反证法相结合，可写得更清晰简洁一些：假设方程有正整数解，不妨设(x_1, y_1, z_1)是使x_1最小的一组正整数解，然后照原证法推得(x_2, y_2, z_2)也是方程的一组正整数解，但$x_2 < x_1$，与x_1的最小性矛盾，所以原方程没有正整数解.

例 4 任给一个m行n列的实数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

一次操作指的是同时改变某一行或某一列的所有数的符号，其余数均不变.求证：可经过有限次操作，使得每一行、每一列的所有数之和均为非负数.

解 首先，无论经过多少次操作，矩阵中每个元素的绝对值不变，所以矩阵中所有mn个数之和S至多2^{mn}种可能的取值，故在操作所能达到的一切S的值中，必有最大者.

取一个使S达到最大的矩阵，我们证明此时每一行、每一列的所有数之和均为非负数.

不然的话，不妨设第i行各数之和小于0，则对该行再进行一次操作，新矩阵中第i行各数之和大于0，而其余数字保持不变，于是新矩阵中各数之和必大于S，与S的最大性矛盾！

故命题成立.

注 由于所给矩阵中的元素没有具体数值，要从正面入手直接证明经过多少步操作一定能达到要求并不可行，需另辟蹊径.

在上述证明中，我们考虑“使所有mn个数之和达到最大的矩阵”这种极端情形.一方面，根据事实(1)，这样的矩阵确实存在；另一方面，因为“每一行、每一列所有数之和均为非负数”与“矩阵中所有数之和尽可能大”本身是和谐一致的，因此我们试图对和最大的矩阵验证条件成立是一个自然合理的设想.大体上说，在找某种极端的对象时，应注意与解题目的和谐一致.

例 5 证明：任意一个四面体中总有一个顶点，使得从这个顶点引出的三条棱可构成一个三角形的三边.(1968年国际数学奥林匹克试题)

解 设四面体为$ABCD$，其中最长的棱为AB.我们证明自顶点A或顶点B所引出的三条棱可构成一个三角形的三边.

事实上，在$\triangle ABC$与$\triangle ABD$中分别有

$$AC + CB > AB,\ AD + DB > AB,$$

两式相加得

$$AC+CB+AD+DB>2AB,$$

重新组合得

$$(AC+AD)+(BC+BD)>2AB,$$

所以 $AC+AD>AB$ 与 $BC+BD>AB$ 中必有一项成立，不妨设 $AC+AD>AB$，由于已设 AB 是最长的棱，故从顶点 A 引出的三条棱可构成三角形的三边.

注 一般而言，若要考虑从某个顶点（比如点 A）所引出的三条棱可否构成三角形的三边，需考察三个条件，即 AB，AC，AD 是否满足任意两数之和大于第三者. 然而，一旦已知 AB 是最长的棱，就只需要集中精力考察 $AC+AD>AB$ 这一个条件了. 本题中，极端性假设所带来的效果正是使目标更为集中，最终证明了满足题意的顶点必能在 A 与 B 中选出.

例 6 设集合 A_1，A_2，…，A_n 与集合 B_1，B_2，…，B_n 是集合 M 的两个分划，且满足对任意两个交集为空集的集合 A_i，$B_j(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n)$，都有 $|A_i\cup B_j|\geqslant n$（其中 $|X|$ 表示集合 X 的元素个数）. 求证：$|M|\geqslant\frac{n^2}{2}$.

证明 不妨设 A_i，$B_j(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ 中元素个数最少的为 A_1，$|A_1|=p$.

若 $p\geqslant\frac{n}{2}$，则

$$|M|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|\geqslant np\geqslant\frac{n^2}{2}.$$

若 $p<\frac{n}{2}$，则将 B_1，B_2，…，B_n 分为两类：第一类是与 A_1 的交非空的，不妨设为 B_1，B_2，…，B_q，它们中每个集合的元素个数至少为 p；第二类是与 A_1 的交集为空集的，为 B_{q+1}，B_{q+2}，…，B_n，它们中每个集合与 A_1 的元素个数之和不小于 n，故每个集合所含元素至少为 $n-p$ 个.

因此

$$\begin{aligned}|M|&=|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_n|\geqslant pq+(n-p)(n-q)\\&=\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}(n-2p)(n-2q).\end{aligned}$$

由于 $|A_1|=p$，且 B_1，B_2，…，B_q 两两交集为空集，故 $q\leqslant p<\frac{n}{2}$，因

此

$$(n-2p)(n-2q)>0,$$

故 $|M|>\frac{n^2}{2}$.

综上可知 $|M|\geqslant\frac{n^2}{2}$.

注一 本题中所考虑的极端情形是“所有 A_i，B_j 中元素个数最少的集合”. 由于本题所要估计的是 $|M|$ 的下界，而“A_1 元素最少”实则导致如下几点“益处”：

(1) 与 A_1 不相交的集合 B_j 较多；

(2) 每个与 A_1 不相交的集合 B_j 满足 $|A_i\cup B_j|\geqslant n$，势必含有较多的元素；

(3) 与 A_1 相交的那些集合 B_j 不会很多；

(4) 每个与 A_1 相交的集合 B_j 所含元素个数不至于太小(不能小于 $|A_1|$). 因此，始终围绕元素最少的集合 A_1 进行讨论便在情理之中了.

解题中应充分挖掘极端元素的价值，而在寻找极端元素时也应注意角度的选取.

注二 1971 年国际数学奥林匹克第 6 题如下：

设

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个由非负整数组成的方阵. 已知如果 $a_{ij}=0$，那么

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geqslant n,$$

证明：方阵中的所有元素之和不小于 $\frac{n^2}{2}$.

这是本例的另一种表达形式.

例 7 设有 n $(\geqslant 7)$ 个圆，其中任意 3 个圆都不两两相交(包括相切)，求证：一定可以找到一个圆，它至多只能与 5 个圆相交.

证明 设 n 个圆的圆心分别为 O_1，O_2，…，O_n，取 n 个圆中半径最小的圆，设为 $\odot O_1$.

若 $\odot O_1$ 与 6 个(或多于 6 个圆)圆 O_2，O_3，…，O_7 相交，连接 O_1O_2，

O_1O_3, …, O_1O_7, 则 $\angle O_2O_1O_3$, $\angle O_3O_1O_4$, $\angle O_4O_1O_5$, $\angle O_5O_1O_6$, $\angle O_6O_1O_7$, $\angle O_7O_1O_2$ 中必有一个角不超过 $\frac{360°}{6}=60°$,不妨设 $\angle O_2O_1O_3\leqslant 60°$.

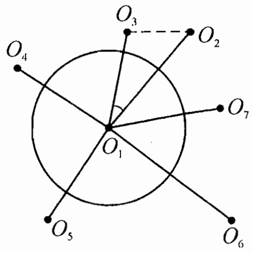


图 6－1

连接 O_2O_3,令 $\odot O_1$, $\odot O_2$, $\odot O_3$ 的半径是 r_1, r_2, r_3,则 $r_1\leqslant r_2$, $r_1\leqslant r_3$.

由 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交, $\odot O_1$ 与 $\odot O_3$ 相交,得 $r_1+r_2\geqslant O_1O_2$, $r_1+r_3\geqslant O_1O_3$,则

$$O_1O_2\leqslant r_1+r_2\leqslant r_2+r_3,$$
$$O_1O_3\leqslant r_1+r_3\leqslant r_2+r_3.$$

而 $\angle O_2O_1O_3\leqslant 60°$,那么其余两个角中必有一个角 $\geqslant 60°$,令 $\angle O_3\geqslant 60°$,就有 $O_1O_2\geqslant O_2O_3$,所以有

$$O_2O_3\leqslant r_1+r_2\leqslant r_2+r_3,$$

从而知 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 必相交,由此推得 $\odot O_1$, $\odot O_2$, $\odot O_3$ 两两相交,这与题中的条件是矛盾的.

所以一定存在一个圆至多只能与 5 个圆相交.

例 8 求所有的整数 k,使得存在正整数 a 和 b,满足 $\frac{b+1}{a}+\frac{a+1}{b}=k$. (2010 年中国西部数学奥林匹克试题)

解 对于固定的 k,在满足 $\frac{b+1}{a}+\frac{a+1}{b}=k$ 的数对 (a, b) 中,取一组 (a, b) 使得 b 最小,则

$$x^2+(1-kb)x+b^2+b=0$$

的一根为 $x=a$.

设另一根为 $x=a'$,则由 $a+a'=kb-1$ 知 $a'\in\mathbf{Z}$, 且 $a\cdot a'=b(b+1)$, 因此 $a'>0$.

又 $\frac{b+1}{a'}+\frac{a'+1}{b}=k$, 由 b 的假定知 $a\geqslant b$, $a'\geqslant b$, 因此 a, a'必为 b, $b+1$的一个排列. 这样就有 $k=\frac{a+a'+1}{b}=2+\frac{2}{b}$.

所以 $b=1, 2$,从而 $k=3, 4$.

取 $a=b=1$ 知 $k=4$ 可取到,取 $a=b=2$ 知 $k=3$ 可取到.

所以 $k=3, 4$.

例 9 给定平面上不全在一条直线上的 n 个点,则必有一条直线恰好通

过这 n 个点中的两个点.

证明 因为平面的 n 个点不全在同一条直线上，于是这 n 个点中任意两点所确定的直线外，都有这 n 点中的其他点. 对于每条直线，求出不在这条直线上的点到这条直线的距离. 这些距离的个数可能很多，但总是有限多个. 因此，根据事实(1)，其中必有一个最小的，不妨设为 d_0.

不妨设点 P 到点 A 和点 B 所确定的直线的距离是最小距离 d_0. 我们证明直线 AB 是通过 n 个点中的恰好两个点的直线. 下面我们用反证法.

设 $PH = d_0$. 如果在直线 AB 上还有 n 点中的点 C，则 A、B、C 至少有两个点落在垂足 H 的同侧，不妨设这两个点是 B 和 C，它们在直线 AB 上点 H 的同侧，如图 6 - 2. 作直线 PB，则直线 PB 也是通过 n 点组中两个点的一条直线. 我们过点 C 作直线 PB 的垂线 CD，垂足为 D，则有

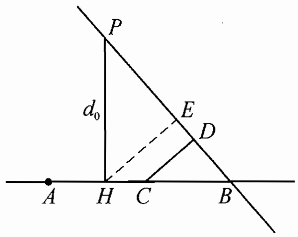


图 6 - 2

$$d_0 \geqslant HE \geqslant CD,$$

这与 PH 的最小性矛盾，所以直线 AB 上不能有 n 点组中的其他点. 直线 AB 就是我们要找的只通过两点的直线.

注 这个问题是英国数学家西尔维斯特提出的，故被称为西尔维斯特问题. 该问题看似简单，但西尔维斯特生前却没能解决它，尔后不少数学家也曾试图给以证明，也没能成功. 这种状况持续了 50 年之久.

本题证明的关键在于考察极端. 通常在解题过程中，一些极端性质是在操作调整的探索过程中发现并予以利用的，例如西尔维斯特问题中，一旦发现距离可以产生更小的距离，问题就解决了.

另有一个与西尔维斯特问题对偶的命题：在平面上给定 n 条两两不平行的直线，若对于他们中任何两条直线的交点，都有这 n 条直线中的另一条过这个点，则这 n 条直线共点. 证明过程相仿，留给读者练习.

例 10 设 $f(x)$是定义在非负实数上的函数，$f(0) = 0$，且对任意 $x \geqslant y \geqslant 0$，都有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y) f(x).$$

求 $f(x)$.

解 （参见第 3 节例 9 的解答）

注 这里另给出一个求解过程供读者辨析：

我们证明 $f(x)$恒等于 0.

假设 $f(x)$ 不恒等于 0，则存在最小的 $x_0 > 0$ 使 $f(x_0) \neq 0$.

令 $x=x_0$，$y=\max\left\{\dfrac{x_0}{2},\ x_0-\dfrac{1}{2}\right\}$，则 $x>y\geqslant 0$ 且 $x-y\leqslant\dfrac{1}{2}$，此时由 x_0 的最小性知 $f(y)=0$. 代入已知条件推得

$$|f(x_0)|\leqslant(x_0-y)f(x_0)\leqslant\frac{1}{2}|f(x_0)|<|f(x_0)|,$$

矛盾！从而 $f(x)$ 恒等于 0.

读者不妨核查一下，倘若将题目中的初始条件 $f(0)=0$ 改为 $f(0)=1$，并完全仿照上述思路求解，将"证出"$f(x)$ 恒等于 1 的结论（其中，x，y 的取法可以是 $x=x_0$，$y=\max\left\{\dfrac{x_0}{2},\ x_0-\dfrac{|f(x_0)-1|}{|f(x_0)|+1}\right\}$）. 然而，只要借助一点点微积分知识就能验证 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 是满足题意的一个解. 这显然是荒谬的！

那么问题究竟出在哪里呢？

实际上，求解过程中"存在最小的 $x_0>0$"这一步是对最小数原理的误用，因为对无限个正实数的情况并无相应的"最小数原理"（请读者回顾本节开头所指出的事实(3)）. 荒谬的结果正是由于对原理理解的偏差所导致的.

对本题而言，错误并非无法修正，但需改为对形如 $\left(\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{n}{2}\right]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的区间中的 n 应用极端原理.

习　题　6

1 在一次乒乓球循环赛中，n（$n\geqslant 3$）名选手中没有全胜的. 证明：一定可以从中找出三名选手 A，B，C，有 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A.

2 平面上给定 100 个点，已知其中任意两点的距离不超过 1，且任意三点所成的三角形是钝角三角形. 证明：这 100 个点被一个半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的圆覆盖.

3 空间中给出了 8 个点，其中任意 4 个点都不在同一平面上，在它们之间连以 17 条线段. 证明：这些线段至少形成了一个三角形.

4 若干个人聚会，其中某些人彼此认识，已知如果某两人在聚会者中有相同数目的熟人，那么他俩便没有共同的熟人. 证明：若聚会者中有人至少有 2012 个熟人，则必然也有人恰好有 2012 个熟人.

5 由凸多边形内任意一点向它的各边引垂线，证明：至少有一个垂足在多边形的某条边内（不含端点）.

6 在一个由若干个城市组成的国家中，其中某些城市之间有道路相连，满

足:所有道路互不相交;对任意两个城市都可以从一个城市出发沿道路走到另一个城市(中间可能通过其他城市).在每个城市中都设置了一个里程表,写有从这个城市出发开车途经所有城市所走过路程的最小值(同一城市可能经过几次).证明:任意两个城市里程表上的数字的比不超过$\frac{3}{2}$.(2009年俄罗斯数学奥林匹克试题)

7 平面直角坐标系内,证明不存在整点正n($n\geqslant 7$)边形.

8 将2007个整数放在一个圆周上,使得任意相邻的5个数中有三个的和等于另两个数的和的2倍.证明:这2007个数都是0.(2007年白俄罗斯数学奥林匹克试题)

9 已知正整数$n\geqslant 2$,且对于整数k,$0\leqslant k\leqslant\sqrt{\frac{n}{3}}$,$k^2+k+n$都是素数.求证:对于整数$k$,$0\leqslant k\leqslant n-2$,$k^2+k+n$也是素数.(1987年国际数学奥林匹克试题)

7 奇偶性

整数集可按照其元素能否被 2 整除划分为奇数集与偶数集. 关于奇偶性有如下基本性质:

性质 1:奇数不等于偶数.

性质 2:两个整数的和与差具有相同的奇偶性.

性质 3:$m\pm n$ 为偶数的充要条件是 m, n 具有相同的奇偶性;$m\pm n$ 为奇数的充要条件是 m, n 具有不同的奇偶性.

性质 4:奇数个奇数的和是奇数,偶数个奇数的和是偶数.

性质 5:一个整数为奇数的充要条件是它的约数都是奇数.

性质 6:任意一个正整数都可以表示为 $n=2^p\cdot q$ 的形式,这里 $p\in\mathbf{N}$, q 为奇数.

作为整数的属性而言,奇偶性是极基本的,但具体解题时,奇偶分析涉及的面很广,并且包含了许多重要的想法和处理问题的技巧.

例 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in\mathbf{Z}$,其中 n 为正奇数,$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的任一排列. 证明:$\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+|b_i|)$ 与 $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-|b_i|)$ 均为偶数.

证明 由于对整数 x,总有 $|x|\equiv x\equiv -x \pmod 2$,故由已知得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+|b_i|)\equiv\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\equiv\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i\equiv 0 \pmod 2,$$

又上式左边是奇数项(n 项)求和,因此必有某个 $a_i+|b_i|$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为偶数,从而 $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+|b_i|)$ 为偶数.

同理可证得 $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-|b_i|)$ 为偶数.

注 本题的各种特殊形式在竞赛题中并不少见. 纵观整个解题过程似乎平淡无奇,却已用到了前述多条奇偶性质. 这些性质虽然简单明显,却常常是我们平时解题的出发点. 尤其突出的一点是,当把奇偶性看成模 2 的一

种分类时，整数取绝对值相当于作恒等运算，加减实质上是同一种运算，乘法则等同于某种意义下的逻辑运算，这些事实给奇偶分析提供了极大的便利.

例 2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 4)$ 中的每一个值或等于 1，或等于 -1，且

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_{n-1}a_na_1a_2 + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

求证：$4 \mid n$.（1985 年国际数学奥林匹克预选题）

证明 不妨记 $a_{n+i} = a_i (i = 1, 2, 3)$，已知条件可以写为

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} = 0. \quad ①$$

由已知得，对 $k = 1, 2, \cdots, n$，有 $a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \in \{1, -1\}$，因此在①左边的和式中取 1 的项与取 -1 的项一样多，不妨记有 m 项为 1，m 项为 -1，故 n 为偶数，且 $n = 2m$.

进一步考虑到 $\prod_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} = (a_1a_2\cdots a_n)^4 = 1$ 恒成立，而该式左边的值为

$$1^m \cdot (-1)^m = (-1)^m,$$

因此 m 为偶数，故 $n = 2m$ 为 4 的倍数.

注 本题的证明分两步，各自体现了奇偶分析的想法：第一步是考虑到 n 个值为奇数（± 1）的项相加等于偶数（0），先推出 n 为偶数；第二步是用到积为正数的若干个数字中负数必有偶数个，从而得出 $m = \frac{n}{2}$ 仍是偶数.

例 3 设 a, b 是正整数，且满足关系式

$$(11\,111 + a)(11\,111 - b) = 123\,456\,789.$$

求证：$a-b$ 是 4 的倍数.

证明 由已知条件可得 $11\,111+a$ 与 $11\,111-b$ 均为奇数，所以 a, b 均为偶数，又由已知条件得

$$11\,111(a-b) = ab + 2468,$$

因为 ab 是 4 的倍数，$2468 = 4 \times 617$ 也是 4 的倍数，所以 $11\,111 \times (a-b)$ 是 4 的倍数，故 $a-b$ 是 4 的倍数.

注 本题通过奇偶性分析避免了过多的情况枚举. 另外，如从模 4 同余的角度考虑，可进一步减少运算量.

例 4 从集合 $\{0, 1, 2, \cdots, 13, 14\}$ 中选出 10 个不同的数填入图 7-1 中

圆圈内，使每两个用线相连的圆圈中的数所成差的绝对值各不相同，能否做到这一点？证明你的结论.

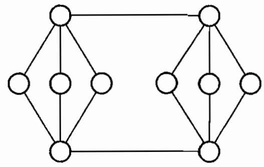


图 7－1

解　结论是否定的.

若不然，那么所说的差的绝对值共有 14 个，它们互不相同，并且均不大于 14，不小于 1，因此它们只能是 1，2，3，…，14，从而它们的和.

$$S=1+2+\cdots+14=7\times 15=105$$

是一个奇数.

另一方面，每个圆圈与偶数个(2 个或 4 个)圆圈相连，设填入的数为 a，那么 a 在 S 中出现偶数次(2 次或 4 次). 偶数个 a 用加、减号相连，运算结果必为偶数. 因此，S 是 10 个偶数的和，从而 S 是偶数.

从上面可知，S 既是奇数又要是偶数，矛盾！

例 5　已知直角坐标平面内有 n 个整点，满足任意三点不共线，且所构成的三角形面积不是整数. 求 n 的最大可能值.

解　将平面上的整点分成如下四个集合：

$$M_1=\{(x,\ y)\mid x\equiv y\equiv 0(\operatorname{mod} 2)\},$$
$$M_2=\{(x,\ y)\mid x\equiv 1(\operatorname{mod} 2),\ y\equiv 0(\operatorname{mod} 2)\},$$
$$M_3=\{(x,\ y)\mid x\equiv 0(\operatorname{mod} 2),\ y\equiv 1(\operatorname{mod} 2)\},$$
$$M_4=\{(x,\ y)\mid x\equiv y\equiv 1(\operatorname{mod} 2)\}.$$

假如 $n\geqslant 5$，由抽屉原理可知，必有两点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 属于上述同一集合，则 AB 中点 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$为整点. 任取 n 个点中的另一点 C，注意整点三角形面积的 2 倍必为整数，则 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AMC}\in\mathbf{Z}$，矛盾. 因此 $n\leqslant 4$.

另一方面，取(0，0)，(1，0)，(0，1)，(1，1)这四个点，易验证满足题意.

综上，n 的最大可能值为 4.

注　本例通过坐标的奇偶性来制造抽屉，这是研究整点问题的一种常用的技巧. 读者可以进一步思考如下两个稍难的问题：

(1) 已知直角坐标平面内有 n 个整点，满足任意三点不共线，且所构成的三角形面积为奇数. 求 n 的最大可能值.

(2) 已知直角坐标平面内有 n 个整点，满足任意三点不共线，且所构成的三角形面积不是偶数. 求 n 的最大可能值.

例 6　设 $n\in\mathbf{N}^*$，且使得 $37.5^n+26.5^n$ 为正整数，求 n 的值.（1998 年上

海市高中数学竞赛试题）

解 易知 $37.5^n+26.5^n=\frac{1}{2^n}(75^n+53^n)$.

当 n 为正偶数时，

$$75^n+53^n\equiv(-1)^n+1^n\equiv 2 \pmod 4,$$

即 $75^n+53^n=4m+2$，这里 $m\in\mathbf{N}^*$. 故 $37.5^n+26.5^n=\frac{1}{2^{n-1}}(2m+1)$ 不是正整数.

当 n 为正奇数时，

$$\begin{aligned}75^n+53^n&=(75+53)(75^{n-1}-75^{n-2}\cdot 53+\cdots-75\cdot 53^{n-2}+53^{n-1})\\&=2^7\cdot(75^{n-1}-75^{n-2}\cdot 53+\cdots-75\cdot 53^{n-2}+53^{n-1}).\end{aligned}$$

上式括号内有 n 项，每一项都是奇数，因而和为奇数.

由此可见，只有当 $n=1,3,5,7$ 时，$37.5^n+26.5^n$ 为正整数.

注 我们常常会遇到需对奇偶作分类讨论的情况，而分类讨论的本质是“加条件解题”，是求解数学问题的一种基本思想. 本题采用了对 n 的奇偶性分类讨论的解题策略，这与题目本身的特点有极大关系. 就 a^n+b^n（a，b 为整数，例如本题中 $a=75$，$b=53$）的结构而言，当 n 为奇数时便于因式分解，当 n 为偶数时则便于从模 4 的剩余类考虑问题. 在两种情形的讨论中，人为创设的前提条件“n 为奇数”或是“n 为偶数”均对进一步分析问题起到了重要的作用.

例 7 设 a，b，c，d 为奇数，$0<a<b<c<d$，且 $ad=bc$. 证明：如果 $a+d=2^k$，$b+c=2^m$（k，m 为整数），则 $a=1$.（1984 年国际数学奥林匹克试题）

证明 首先因为 $ad=bc$，且 $d-a>c-b>0$，所以

$$(a+d)^2=(d-a)^2+4ad>(c-b)^2+4bc=(b+c)^2,$$

故 $k>m$. 又

$$a(2^k-a)=ad=bc=b(2^m-b),$$

从而 $2^mb-2^ka=b^2-a^2$，即

$$2^m(b-2^{k-m}a)=(b+a)(b-a), \qquad ①$$

注意 a，b 为奇数，故 $b+a$ 与 $b-a$ 均为偶数，且它们的差为 $2a\equiv 2 \pmod 4$，故其中必有一个只能被 2 整除而不能被 4 整除，再注意 $b-2^{k-m}a$ 为奇数，故只有两类情形：

$$\begin{cases}b+a=2^{m-1}u,\\b-a=2v\end{cases}\text{或}\begin{cases}b+a=2v,\\b-a=2^{m-1}u,\end{cases}\quad u,\ v\in\mathbf{N}^*\tag{②}$$

在其中任一情形下均有 $uv=b-2^{k-m}a<b-a\leqslant 2v$,故 $u=1$，又由于

$$b-a<b<\frac{b+c}{2}=2^{m-1},$$

故第二类情形不会发生,故只可能

$$\begin{cases}b+a=2^{m-1},\\b-a=2(b-2^{k-m}a),\end{cases}$$

消去 b 得 $a=2^{2m-2-k}$,又 a 为奇数,故 $a=1$.

注　本题中,奇偶分析思想的重要性体现在解题的一个关键环节之中：在得到形如①的一个分解之后,根据 a，b 为奇数推得关于 $b+a$，$b-a$，$b-2^{k-m}a$ 的一系列奇偶性质,通过奇偶分析最终化整为零,归结为对②的两种情形的考察.当然①之前的铺垫与②之后的收尾还涉及到放缩的思想,整个问题具有较强的技巧性.

最后附带指出,本题中的整数 k，m 应满足 $k=2m-2$，$m\geqslant 3$,且 a，b，c，d 的值分别为 $a=1$，$b=2^{m-1}-1$，$c=2^{m-1}+1$，$d=2^{2m-2}-1$.

例 8　设有一个正 $2n+1$ 边形($n>1$). 两人按如下法则做游戏:轮流在该正多边形内画对角线;每人每次画一条新的(以前没有画过的)对角线,而它恰好与已画出的偶数条对角线相交(交点在正多边形内);凡无法按照要求画出对角线者即为负方. 问:谁有取胜策略?(2007 年俄罗斯数学奥林匹克试题)

解　将先开始的人称为甲,后开始的人称为乙. 我们断言:如果 n 为奇数,则乙必胜;如果 n 为偶数,则甲必胜.

对正 $2n+1$ 边形的任何一条对角线来说,它两侧的顶点个数和为奇数,必有一侧有偶数个顶点. 因此每条对角线与偶数条其他对角线相交.

假设到某个时刻游戏无法继续,那么此时每条未画出的对角线都与奇数条已画的对角线相交,也与奇数条未画的对角线相交. 这样的情况只能出现在未画的对角线条数为偶数的时刻(事实上,假设此时未画的对角线 d_i 共奇数条,由于每个 d_i 上共有奇数个它们相互之间的交点,因而从所有 d_i 上数得的交点总数为奇数,但每个交点恰被计数两次,数出的交点数理应为偶数,矛盾). 由此可知,甲能取胜当且仅当该正 $2n+1$ 边形的对角线总数为奇数.

在正 $2n+1$ 边形中,对角线共有 $\dfrac{(2n+1)(2n-2)}{2}=(n-1)(2n+1)$ 条,

所以当 n 为奇数时，对角线有偶数条，乙必胜；当 n 为偶数时，则甲必胜. 而且任何一方取胜不需要制定特别的策略.

注　本题不妨先对 $n=2,3$ 等较小情况予以探索，发现 $n=2$ 时甲必胜，$n=3$ 时乙必胜，同时也发现当 $n=3$ 时情况已经变得相当复杂，很难真正为乙设计一种合适的取胜策略，但另一方面又能发现，乙获胜似乎是自然而然的，无需特别的策略. 于是我们再回到题目条件，充分利用"正 $2n+1$ 边形"及"恰好与已画出的偶数条对角线相交"这些涉及奇偶性的信息来作分析，并结合了"算两次"的技巧，最终获知游戏必停止于"偶数条对角线未画"的时刻. 从而，一旦确定正 $2n+1$ 边形对角线条数的奇偶性，就能确定获胜方.

习　题　7

1 把 $1,2,3,4,\cdots,80,81$ 这 81 个数任意排列为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{81}$. 计算：

$$|a_1-a_2+a_3|,|a_4-a_5+a_6|,\cdots,|a_{79}-a_{80}+a_{81}|,$$

再将这 27 个数任意排列为 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{27}$. 计算出：

$$|b_1-b_2+b_3|,|b_4-b_5+b_6|,\cdots,|b_{25}-b_{26}+b_{27}|,$$

……如此继续下去，最后得到一个数 x，问：x 是奇数还是偶数？

2 若整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=n$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，证明：$4|n$.

3 代数式

$$rvz-rwy-suz+swx+tuy-tvx \qquad ①$$

中，r,s,t,u,v,w,x,y,z 可以分别取 $+1$ 或 -1.

(1) 证明：代数式的值都是偶数；

(2) 求这个代数式所能取到的最大值.

4 今有两张 3×3 方格表 A 与 B，现将数 $1,2,\cdots,9$ 按某种顺序填入 A 表（每格填写一个数），然后依照如下规则填写 B 表：使 B 表中第 i 行、第 j 列交叉处的方格内所填的数等于 A 表中第 i 行的各数和与第 j 列的各数和之差的绝对值；例如 B 表中的

$$b_{12}=|(a_{11}+a_{12}+a_{13})-(a_{12}+a_{22}+a_{32})|.$$

问：能否在 A 表适当填入 $1,2,\cdots,9$，使得在 B 表中也出现 $1,2,\cdots,9$

这九个数字?（2007 年国际城市青少年数学邀请赛试题）

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

（第 4 题表 A）

b_{11}	b_{12}	b_{13}
b_{21}	b_{22}	b_{23}
b_{31}	b_{32}	b_{33}

（第 4 题表 B）

5 设正整数 n 的所有正约数从小到大依次为 $d_1<d_2<\cdots<d_k(k\geqslant 4)$，且满足 $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=n$，求 n 的值.（1989 年巴尔干数学奥林匹克试题）

6 设 $s=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是前 $n(n\geqslant 2)$ 个正整数 $1, 2, \cdots, n$ 依任意次序的排列，$f(s)$ 为 s 中每两个相邻元素的差的绝对值的最小值. 求 $f(s)$ 的最大值.（第 30 届国际数学奥林匹克预选题）

7 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{3a_n}{2}\right]$，$n\in\mathbf{N}^*$（这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）. 证明：数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项为奇数，也有无穷多项为偶数.

8 设 n 为正整数. 证明：若 n 的所有正因子之和是 2 的整数次幂，则这些正因子的个数也是 2 的整数次幂.（2009 年中欧数学奥林匹克试题）

9 若干个球放在 $2n+1$ 个袋中，如果任意取走一个袋，总可以把剩下的 $2n$ 个袋分成两组，每组 n 个袋，并且这两组的球的个数相等. 证明：每个袋中的球的个数相等.

8 面积法

面积是平面几何中的一个重要概念.在处理一些几何问题时,以考虑面积作为计算或论证出发点的方法,称为面积方法.

面积公式不仅可用于计算面积或证明面积关系,还可用来证明与面积不明显相关的几何命题(平面几何中几乎所有的计算与证明都能用面积来解),有时候会收到事半功倍的效果.

三角形的面积公式是最基本的面积公式,且具有多种形态.借助这些公式,我们非但可以推导出其他图形的许多面积公式,也可以得到一些与面积有关的性质定理,例如等积变形定理、共角定理、共边定理等,由此使线段比和面积比相互转化.

例 1 在等腰直角$\triangle ABC$中,$\angle BAC=90^\circ$,点D是边AC的中点,过点A作BD的垂线与边BC交于点F.求证:$BF=2FC$.

解 如图,$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFC}}=\dfrac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABD}}\cdot\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AFC}}$,显然$\angle BAF=\angle ADB$,$\angle FAC=\angle ABD$,所以

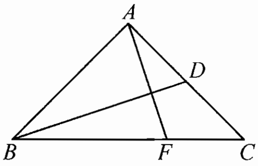


图 8-2

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{AB\cdot AF}{AD\cdot BD},$$
$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AFC}}=\frac{AB\cdot BD}{AF\cdot AC},$$

因此$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{AB}{AD}\cdot\dfrac{AB}{AC}=2$,即$BF=2FC$.

例 2 在凸四边形$ABCD$的边AB和BC上取点E、F,使得线段DE、DF分对角线AC为三等分.已知$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}$,证明:$ABCD$是平行四边形.(1990年俄罗斯数学奥林匹克试题)

证明 设DE、DF分别与AC交于P、Q.连接BD,交AC与M.

由$AP=QC$得$S_{\triangle ADP}=S_{\triangle CDQ}$,又$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$,所以$S_{\triangle AEP}=S_{\triangle CFQ}$.故$E$、$F$到$AC$的距离相等,因此$EF\parallel AC$.

设 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{CB}{CF}=k$，则

$$\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{AB}{AE}=k,\ \frac{S_{\triangle CDB}}{S_{\triangle CDF}}=\frac{CB}{CF}=k,$$

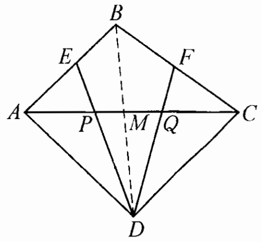


图 8-1

所以

$$\begin{aligned}S_{ABCD}&=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle CDB}=k(S_{\triangle ADE}+S_{\triangle CDF})\\&=k\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD},\end{aligned}$$

即 $k=2$. 因而$\dfrac{AQ}{AP}=\dfrac{AB}{AE}=2$，所以 $BQ\parallel EP$. 同理有 $BP\parallel FQ$. 因此 $BPDQ$ 为平行四边形，故 $BM=MD$，$PM=MQ$，又 $AP=QC$，所以 $AM=MC$，即 AC、BD 互相平分，故而 $ABCD$ 是平行四边形.

注　本题中一些重要的平行关系都是通过面积关系导出的：先是通过面积的运算得到 $EF\parallel AC$，再是通过图形关系列出 S_{ABCD} 满足的面积等式，为证明 $BQ\parallel EP$ 与 $BP\parallel FQ$ 起到桥梁作用. 面积法的特点是把各已知量和未知量用面积公式联系起来，使几何元素之间的关系变成数量关系，通过运算达到求证的结果，很多场合下这可以降低分析问题或添置补助线的难度，使证明简洁明快.

例 3　设$\triangle ABC$ 中，顶点 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，内心 I 到顶点 A，B，C 的距离分别为 m，n，l. 求证：

$$al^2+bm^2+cn^2=abc.$$

证明　设$\triangle ABC$ 内切圆与三边 BC，CA，AB 分别相切于 D，E，F.

由于$\angle AFI=\angle AEI=90^\circ$，故四边形 $AEIF$ 为圆内接四边形，且 AI 为该圆的直径. 又显然有 $AI\perp EF$，故由四边形面积公式可得

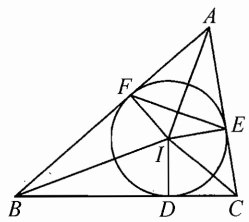


图 8-3

$$\begin{aligned}S_{AEIF}&=\frac{1}{2}AI\cdot EF=\frac{1}{2}AI\cdot AI\sin A\\&=\frac{1}{2}l^2\cdot\frac{a}{2R}=\frac{al^2}{4R},\end{aligned}$$

其中第 2、第 3 个等号分别是对$\triangle AEF$ 与$\triangle ABC$ 用了正弦定理，R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径.

同理可得 $S_{BFID}=\dfrac{bm^2}{4R}$，$S_{CDIE}=\dfrac{cn^2}{4R}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{AEIF}+S_{BFID}+S_{CDIE}=\dfrac{al^2+bm^2+cn^2}{4R}$.

但另一方面，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R}$，从而 $al^2+bm^2+cn^2=abc$.

注 用两种不同的方法计算同一个面积，得到的结果应当相等，这是面积法的一种基本思想（参看第 16 节"算两次"）. 本题中正是将$\triangle ABC$分割为 3 个四边形，建立了面积等式. 考虑到这 3 个四边形都有外接圆，且对角线相互垂直，因此在用已知量表示它们面积时没有实质的困难，而引入$\triangle ABC$的外接圆半径R又可以消去角的正弦，起到过渡作用.

三角形与四边形的面积公式揭示了边角等基本元素之间的内在关系，而三角形的面积又常常能和内心、外心等（及有关量）相联系，这是用面积证题时值得注意的一点. 例如就本题图形出发，读者不妨证一下另一个有趣的结论：$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}=\dfrac{2R}{r}$，其中 R，r 分别为 $\triangle ABC$ 外接圆半径与内切圆半径.

例 4 已知圆内接六边形 $ABCDEF$ 中，$AB\cdot CD\cdot EF=BC\cdot DE\cdot FA$，证明 AD，BE，CF 三线共点.

证明 连接 AC，CE，EA. 记 AC 交 BE 于点 P，CE 交 AD 于点 Q，EA 交 CE 于点 R.

在圆内接四边形 $ABCE$ 中，$\angle BAE$ 与 $\angle BCE$ 互补，故 $\sin\angle BAE=\sin\angle BCE$. 从而由共边定理和三角形面积公式可得：

$$\frac{AP}{PC}=\frac{S_{\triangle BAE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{AB\cdot AE}{BC\cdot CE}.$$

同理可得

$$\frac{CQ}{QE}=\frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle EAD}}=\frac{AC\cdot CD}{AE\cdot DE},$$

$$\frac{ER}{RA}=\frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{CE\cdot EF}{AC\cdot AF}.$$

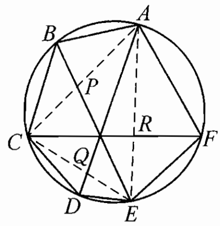


图 8 - 4

以上三式相乘可得

$$\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QE}\cdot\frac{ER}{RA}=\frac{AB\cdot AE}{BC\cdot CE}\cdot\frac{AC\cdot CD}{AE\cdot DE}\cdot\frac{CE\cdot EF}{AC\cdot AF}=\frac{AB\cdot CD\cdot EF}{BC\cdot DE\cdot FA}=1,$$

又 AD，BE，CF 不平行，故由 Ceva 定理的逆定理可得 AD，BE，CF 三线共点.

注 本题通过两种不同的方式表示$\dfrac{S_{\triangle BAE}}{S_{\triangle BCE}}$等三个面积比例式，建立了线

段的比例关系，最后用 Ceva 定理的逆定理证明三线共点. Ceva 定理有几种等价形式，使用时可选择适合的角度，例如本题用角元形式的 Ceva 定理书写会更为简洁，但其本质是一样的.

例 5　如图 8－5，延长凸四边形 $ABCD$ 的边 AB、DC 交于点 E，延长边 AD、BC 交于点 F. 求证：AC、BD、EF 的中点 M、N、L 这三点共线（这条线称为完全四边形 $ABCDEF$ 的"牛顿线"）.

证明　连接 MB、MD、ME、MF、NE、NF、MN.

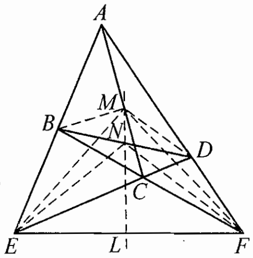


图 8－5

由 M、N 分别是 AC、BD 的中点可得：

$$S_{\triangle MDE}=S_{\triangle MNE}+S_{\triangle MDN}+S_{\triangle EDN}$$
$$=S_{\triangle MNE}+S_{\triangle MBN}+S_{\triangle EBN}=2S_{\triangle MNE}+S_{\triangle MBE},$$

故

$$S_{\triangle MNE}=\frac{S_{\triangle MDE}-S_{\triangle MBE}}{2}$$
$$=\frac{S_{\triangle ADE}-S_{\triangle CBE}}{4}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

同理可得

$$S_{\triangle MNF}=\frac{S_{\triangle MBF}-S_{\triangle MDF}}{2}=\frac{S_{\triangle ABF}-S_{\triangle CDF}}{4}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

从而 $S_{\triangle MNE}=S_{\triangle MNF}$.

由于 E、F 在直线 MN 异侧（在已知的图形关系下，有直线 MN 与线段 EF 相交），故直线 MN 平分线段 EF，即 M、N、L 三点共线.

注　本题中，我们先充分运用"M、N 为 AC、BD 中点"的条件进行面积转换. 最后，我们利用 $S_{\triangle MNE}=S_{\triangle MNF}$ 证得另一个中点 L 在直线 MN 上，事实上，这是基于以下定理：

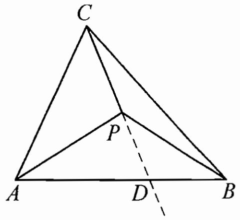


图 8－6

定理　设点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，直线 CP 与 AB（或其延长线）相交于点 D，如图 8－6，则 $\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle BPC}}=\frac{AD}{BD}$.

因此，若 P 在 $\triangle ABC$ 内，D 在线段 AB 上，且 $\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle BPC}}=\frac{AD}{BD}$，则 C、P、D 三点共线. 根据这个结论不难完成本题最后的证明步骤. 可见，面积方法是证明三点共线的方法之一.

在组合几何方面，也常常要从面积入手考虑一些问题. 下例是一个覆盖问题，证明中用到了**面积重叠原理**：

将 n 个面积为 $S_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的区域放入一个面积为 S_0 的区域 C，若这 n 个区域的面积总和大于 kS_0，则 C 中必有一点被其中至少 $k+1$ 个区域覆盖；若面积总和小于 kS_0，则 C 中必有一点被其中至多 $k-1$ 个区域覆盖.

例 6 在半径为 16 的圆中有 650 个红点，证明：可作一个内半径为 2、外半径为 3 的圆环 C，使 C 内(不含边界)至少含有 10 个红点.

证明 以 650 个红点中的每一点为中心，作内半径为 $2+\varepsilon$，外半径为 $3-\varepsilon$ 的圆环 $C_i(1\leqslant i\leqslant 650)$，每个 C_i 的面积为

$$S_i=\pi((3-\varepsilon)^2-(2+\varepsilon)^2)=5\pi(1-2\varepsilon),$$

其中 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

显然这些圆环都在一个半径为 19 的圆 C_0 内，其中 C_0 的面积 $S_0=361\pi$. 取定 $\varepsilon=0.0001$，则

$$\sum_{i=1}^{650}S_i=3250\pi\times 0.9998>3249\pi=9S_0,$$

故由面积重叠原理可知，C_0 中必有一点被不少于 10 个圆环 C_i 覆盖. 以这一点为中心，作一个内半径为 2、外半径为 3 的圆环 C，其内部必含有 10 个 C_i 的中心，故圆环 C 满足题意.

注 面积重叠原理可谓几何上的“抽屉原理”. 在考虑一些覆盖、嵌入、重叠问题时，常通过面积来证明一些存在性的结论(有时需辅以膨胀、收缩的技巧).

例 7 已知圆 O 在平面直角坐标系中，半径为 R，圆周上整点个数为 $n(n\geqslant 3)$. 证明：$n<2\pi\cdot\sqrt[3]{R^2}$.

证明 设圆周上的所有整点按逆时针排列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 3)$. 约定 $A_{n+1}=A_1, A_{n+2}=A_2$. 对 $i=1, 2, \cdots, n$，由于 $\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 为整点三角形，其面积 $S_{\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}}\geqslant\frac{1}{2}$.

另一方面，设 $\angle A_iOA_{i+1}=\theta_i, i=1, 2, \cdots, n$，则

$$|A_iA_{i+1}|=2R\sin\frac{\theta_i}{2},\ |A_{i+1}A_{i+2}|=2R\sin\frac{\theta_{i+1}}{2},$$

$$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}=\frac{\pi-\theta_i}{2}+\frac{\pi-\theta_{i+1}}{2}=\pi-\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2},$$

故

$$\begin{aligned}S_{\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}}&=\frac{1}{2}\cdot|A_iA_{i+1}|\cdot|A_{i+1}A_{i+2}|\cdot\sin\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta_i}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta_{i+1}}{2}\cdot\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\\&<2R^2\cdot\frac{\theta_i}{2}\cdot\frac{\theta_{i+1}}{2}\cdot\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}.\end{aligned}$$

所以
$$\frac{1}{2}<\frac{R^2}{4}\cdot\theta_i\theta_{i+1}(\theta_i+\theta_{i+1})\leqslant\frac{R^2}{16}(\theta_i+\theta_{i+1})^3,$$

从而
$$\theta_i+\theta_{i+1}>\frac{2}{\sqrt[3]{R^2}}.\qquad ①$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i=2\pi$，故①中令 $i=1,2,\cdots,n$，并将 n 个不等式相加得
$$4\pi>n\cdot\frac{2}{\sqrt[3]{R^2}},$$
即 $n<2\pi\cdot\sqrt[3]{R^2}$.

注　由于圆 O 的周长 $2\pi R$ 是 R 的一阶量，本例的结论 $n<2\pi\cdot\sqrt[3]{R^2}$，实际上说明了随着 R 的增大，圆周上的整点分布大致会越来越稀疏，也因如此，若能找到一个量来刻画这种特征，将有助于解决问题. 上述解法中所找的量是"整点三角形的面积"，它确实可以用来刻画这种稀疏性：在半径很大的圆周上，假设依次有三个整点 A，B，C 且它们十分临近，则 $\triangle ABC$ 的面积必然小于$\frac{1}{2}$，与 $\triangle ABC$ 为整点三角形矛盾. 利用这一点，我们可以估计每相邻两个圆心角之和 $\theta_i+\theta_{i+1}$ 的下界，最终得到整点个数 n 的上界. 一般的整点问题中有不少与数论有关，但本例中圆 O 的圆心位置和半径并未给出有效的信息，这里，整点三角形面积的"离散性"起了关键作用.

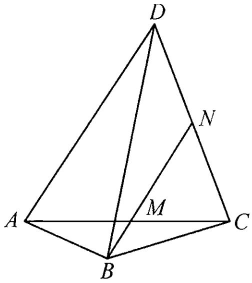
请读者思考如何把结论推广到椭圆的情形.

习　题　8

1 已知$\triangle P_1P_2P_3$ 及三角形内任意一点 P，直线 P_1P，P_2P，P_3P 分别交对边于 Q_1，Q_2，Q_3. 求证：在$\frac{P_1P}{PQ_1}$，$\frac{P_2P}{PQ_2}$，$\frac{P_3P}{PQ_3}$这三个比值中，至少有一个不大于 2，也至少有一个不小于 2.（1961 年国际数学奥林匹克试题）

2 求证：同时平分一个三角形的面积和周长的直线一定经过三角形的内心.

3 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle ABC$ 的面积之比为 $3:4:1$. 点 M，N 分别在 AC，CD 上，满足 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}$，并且 B，M，N 三点共线. 求证：M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点. （1983 年全国高中数学联赛试题）



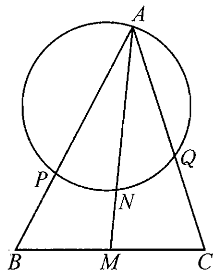
（第 3 题）

4 设直线 l 过 $\triangle ABC$ 的重心 G，与边 AB、AC 分别相交于点 B_1，C_1，$\frac{AB_1}{AB}=\lambda$，$\frac{AC_1}{AC}=\mu$. 求证：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$.

5 凸六边形 $ABCDEF$ 中，P，Q，R，S，T，U 分别为 AB，BC，CD，DE，EF，FA 的中点. 若 PS，QT，RU 均平分六边形 $ABCDEF$ 的面积，证明：PS，QT，RU 三线共点.

6 记凸四边形的面积为 S. 对它的每个顶点，都作其关于不经过它的对角线的对称点. 将所得到的四个像点组成的四边形的面积记作 S'. 证明：$\frac{S'}{S}<3$.（2005 年俄罗斯数学奥林匹克第 4 轮试题）

7 如图，在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 中点，N，P，Q 分别在线段 AM，AB，AC 内，使 A，P，N，Q 四点共圆. 证明：$AP\cdot AB+AQ\cdot AC=2AN\cdot AM$.



（第 7 题）

8 在凸五边形 $ABCDE$ 中，AD 与 BE 相交于 F，BE 与 CA 相交于 G，CA 与 DB 相交于 H，DB 与 EC 相交于 I，EC 与 AD 相交于 J. 设 A'、B'、C'、D'、E' 分别为 AI 与 BE、BJ 与 CA、CF 与 DB、DG 与 EC、EH 与 AD 的交点，求证：

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CD'}{D'E}\cdot\frac{EA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'D}\cdot\frac{DE'}{E'A}=1.$$

（2009 年国家集训队试题）

9 从整体考虑问题

在研究某些数学问题时，我们需从问题的整体考虑，通过研究整体结构、整体形式来把握问题的本质.

运用整体化思想解题的策略主要体现在以下两点：

第一，若某些问题的条件或结论具有整体性特征，则应加以利用使本质显现或问题简化；

第二，若问题的条件或结论是局部性的，但从局部难以入手，就不妨改从整体出发，把貌似散乱实则紧密联系的对象捏合起来，或者构造适当的整体结构，通过对问题的整体认识来解决问题.

我们先通过两个简单例子来感受一下整体性策略.

例 1　设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$，$b_1=3$，且

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n-\sqrt{a_n^2-a_nb_n+b_n^2}, \\ b_{n+1}=b_n+a_n+\sqrt{b_n^2-b_na_n+a_n^2}, \end{cases} n=1,2,\cdots.$$

求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解　由已知得：

$$a_{n+1}+b_{n+1}=2(a_n+b_n),$$
$$a_{n+1}b_{n+1}=(a_n+b_n)^2-(a_n^2-a_nb_n+b_n^2)=3a_nb_n.$$

从而

$$a_n+b_n=2^{n-1}(a_1+b_1)=2^{n+1},$$
$$a_nb_n=3^{n-1}a_1b_1=3^n,$$

故 a_n，b_n 是方程 $x^2-2^{n+1}x+3^n=0$ 的两个实根，且根据条件得 $a_n<b_n$，所以

$$a_n=2^n-\sqrt{4^n-3^n},\ b_n=2^n+\sqrt{4^n-3^n}.$$

注　本题中的两个递推式具有明显的对偶特征，故将它们联系起来整体考虑，求解十分简明. 由此反映出一个基本想法：对条件或结论中的整体性特

征，应积极加以利用.

例 2 已知：三元集 $A=\{ab, 2b, 3c\}$，$B=\{a, 2b^2, 3bc\}$，其中 a、b、c 是非零实数，使得 $A=B$. 求 b 的所有可能值.

解法一 设 $A=B$，由已知条件，对集合 B 中 a 的取值分三类情况讨论.

若 $a=ab$，则两边同除以非零常数 a，知：$b=1$.

若 $a=2b$，则 $ab=2b^2$，A 和 B 中分别剩下的还有 $3c$ 和 $3bc$，它们相等. 考虑到 c 是非零常数，有：$b=1$.

若 $a=3c$，则 $ab=3bc$，A 和 B 中分别剩下的还有 $2b$ 和 $2b^2$，它们相等. 考虑到 b 是非零常数，仍有：$b=1$.

最后检验一下：当 $b=1$ 时，$A=\{a, 2, 3c\}=B$，只要适当取非零的 a、c，使得 a、2、$3c$ 两两不等，即可保证 A、B 为满足条件的三元集. 故 $b=1$.

解法二 设 $A=B$，则它们各自的元素积相等，即 $ab\cdot 2b\cdot 3c=a\cdot 2b^2\cdot 3bc$. 考虑到 a、b、c 是非零实数，两边同除以 $6ab^2c$ 知：$b=1$.

以下检验过程同原解.

注 本题思路很宽，求解不难. 上述解法一已表达得十分清晰自然，但解法二明显更为精简.

对有限集合来说，可以用元素之和、元素之积等“轮换对称式”来考察两个具有待定参数的相等集合，这是因为轮换对称式中所有元素的“地位”相同，任意打乱元素的排列不影响它的值. 这里轮换对称式所反映的是集合整体的一种属性，而解法二正是从这个角度来考虑集合 A、B 的. 本题也可以通过 A、B 各自的元素之和相等列出方程求解，只不过解答会麻烦一些. 这样的整体性方法在特定情况下会取得良好的效果.

与上一个例子相比，本题虽不具有鲜明的整体结构特征，但仍能给我们一些启示：在解题中，如能将孤立的量捏合起来，得到一些有效的信息，则可避免过多纠缠于细枝末节，显著简化求解步骤.

例 3 设集合 $M=\{1, 2, \cdots, 19\}$，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}\subseteq M$. 求最小的正整数 k，使得对任意 $b\in M$，存在 a_i，$a_j\in A$，满足 $a_i=b$ 或 $a_i\pm a_j=b$（a_i，a_j 可以相同）.（2006 年中国女子数学奥林匹克试题）

解 按照题意，A 中元素至多给出 $k+k+2C_k^2=k(k+1)$ 种可能的运算结果，故 $k(k+1)\geqslant 19$，即 $k\geqslant 4$.

对 $k=4$，假定有 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 满足题意，不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4$. 由于在 $\{a_i \mid i=1, 2, 3, 4\}$，$\{2a_i \mid i=1, 2, 3, 4\}$ 及 $\{a_i\pm a_j \mid 1\leqslant j<i\leqslant 4, i, j\in \mathbf{N}^*\}$ 的所有数中，$2a_4$ 最大，故 $2a_4\geqslant 19$，从而必有 $2a_4\geqslant 20$.

于是，$a_i(i=1, 2, 3, 4)$，$2a_i(i=1, 2, 3)$，$a_i\pm a_j(1\leqslant j<i\leqslant 4)$ 这

19 个数应恰好表示出 M 中的所有元素 1，2，…，19，对它们求和并化简得

$$3a_1+5a_2+7a_3+7a_4=1+2+\cdots+19=190. \quad ①$$

注意这 19 个数中最大的显然是 $a_3+a_4=19$，故 $3a_1+5a_2=190-7\times19=57$，易知 $3\mid a_2$，又 $a_2<a_3\leqslant9$，故 $a_2\leqslant6$. 然而此时 $3a_1+5a_2<8a_2<57$，矛盾！

从而假设不成立，即 $k_{\min}\geqslant5$.

容易验证 $A=\{1,3,5,9,16\}$ 满足题目要求，从而 $k_{\min}=5$.

注　虽然这个问题难度上升，但求解思想完全可以与例 2 相对照.

原解法中为否定 $k=4$，对 a_4 的值进行分类讨论，共多达 8 种情形. 相比之下，上述解法从元素和的角度建立等式①是一种从整体考虑问题的思路，再辅以放缩与整除性，完全规避了分类讨论，是以成为解答本题的一条捷径.

例 4　正五边形的每个顶点对应一个整数，使得这五个整数的和为正. 若其中三个相邻顶点对应的整数依次为 x，y，z，而中间的 $y<0$，则要进行如下的变换：整数 x，y，z 分别换为 $x+y$，$-y$，$z+y$. 要是所得的五个整数中至少还有一个为负时，这种变换就继续进行. 问：这样的变换进行有限次是否必定终止？（1986 年国际数学奥林匹克试题）

解　答案是肯定的.

为了方便起见，我们把五个数的环列写成横列 v，w，x，y，z（这里 z 和 v 是相邻的）. 不妨设 $y<0$，经变换后得 v，w，$x+y$，$-y$，$z+y$. 这是一个局部的变化，考虑五个数的平方和再加上每相邻两数和的平方这一整体，那么变换前后的差是 $(v^2+w^2+(x+y)^2+(-y)^2+(z+y)^2+(v+w)^2+(w+x+y)^2+x^2+z^2+(z+y+v)^2)-(v^2+w^2+x^2+y^2+z^2+(v+w)^2+(w+x)^2+(x+y)^2+(y+z)^2+(z+v)^2)=2y(v+w+x+y+z)<0$.

由此可得，这一整体每经过一次变换都要减小，但最初这一整体是正整数，经变换后还是正整数，而正整数是不能无限减小的，所以变换必定有终止的时候.

注　题目所述的操作有两个明显的特征：一是整体上 5 个顶点上的数字之和不变；二是从局部看，若 $y<0$，则经过操作后变成 $y>0$，但两侧的数字也减小了，是否会产生新的负数未尝可知. 如此讨论下去无济于事.

上述解答中找到了"五个数的平方和再加上每相邻两数和的平方"这一整体结构，它比"5 个顶点上的数字之和"优越的地方在于：前者在操作中具有递减性（当然这依赖于后者在操作中的不变性），因此有助于判定操作的有限性.

本题中，也可借助下面的整体结构 f 来证明操作的有限性：

将 5 个整数依次写为 u_1, u_2, u_3, u_4, u_5，其中 u_1, u_5 也相邻. 令

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)=\sum_{i=1}^{5}|u_i|+\sum_{i=1}^{5}|u_i+u_{i+1}|+\sum_{i=1}^{5}|u_i+u_{i+1}+u_{i+2}|+\sum_{i=1}^{5}|u_i+u_{i+1}+u_{i+2}+u_{i+3}|,$$

其中 $u_{5+i}=u_i$，$i=1, 2, 3$. 可证明每次操作使 f 的值严格递减.

纵观两个方法，关键在于找到一个恰当的整体化的结构，这种结构往往具有一定的对称美.

例 5 在 $n\times n$ $(n\geqslant 4)$ 的表格的一条对角线上的每个方格内有一个“＋”，其余每个方格内有一个“－”. 将任一行或一列中所有的正负号变号称为一次操作. 证明：经过任意有限次操作后，表格中至少有 n 个“＋”.（2010 年俄罗斯数学奥林匹克试题）

证明 用 (i, j) 表示第 i 行第 j 列的方格.

不妨设一开始表格内 (i, i) 中有“＋”，$i=1, 2, \cdots, n$. 对每个组

$$\{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}, 1\leqslant a<b\leqslant n, 1\leqslant c<d\leqslant n, \quad ①$$

每次操作不改变这四个位置中“＋”的个数的奇偶性.

在①中取 $a=c=i$，$b\equiv i+1 \pmod n$，$d\equiv i+2 \pmod n$，$i=1, 2, \cdots, n$，由 $n\geqslant 4$ 易知每个组在初始时刻恰有一个位置含“＋”，故以后永远至少一个位置含“＋”，且这 n 个组两两不交，所以任何时刻表格中至少还有 n 个“＋”.

注 上述证法中，我们构建了 n 个两两不交的“小组”. 这些“小组”既是局部的整体，也是整体的局部：在每个小组中，“＋”号的个数具有整体奇偶不变性，因此任何时刻至少含有一个“＋”号；但从整个表格来讲，小组则是“局部”，最后是通过局部贡献足够的“＋”号使问题得以解决.

从中可以看出，整体与局部具有辩证统一性. 我们所要寻找的“恰当的整体”或许正是某些“恰当的局部”，解题时应当把握好这种灵活性.

例 6 求证：对任意 n 个实数 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，总能找到 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个子集 S，满足对任意 $i\in\{1, 2, \cdots, n-2\}$，有 $1\leqslant|S\cap\{i, i+1, i+2\}|\leqslant 2$（其中 $|X|$ 代表有限集 X 的元素个数），且 $\left|\sum_{i\in S}r_i\right|\geqslant\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}|r_i|$.

证明 记 $s=\sum_{i=1}^{n}|r_i|$，并设 $s_i=\sum_{\substack{r_j\geqslant 0,\\ j\equiv i \pmod 3}} r_j$，$t_i=\sum_{\substack{r_j<0,\\ j\equiv i \pmod 3}} r_j$，其中 $i=1, 2, 3$，则 $s=s_1+s_2+s_3-t_1-t_2-t_3$，故有

$$2s=(s_1+s_2)+(s_2+s_3)+(s_3+s_1)-(t_1+t_2)-(t_2+t_3)-(t_3+t_1).$$

从上式看出：存在 $a,\ b\in\{1,\ 2,\ 3\}$，$a\neq b$，使得 $s_a+s_b\geqslant\frac{s}{3}$ 与 $t_a+t_b\leqslant-\frac{s}{3}$ 中至少有一个成立. 不失一般性，设 $|s_a+s_b|\geqslant|t_a+t_b|$，则 $s_a+s_b\geqslant\frac{s}{3}$，因此

$$|s_a+s_b+t_a|+|s_a+s_b+t_b|=2(s_a+s_b)+(t_a+t_b)\geqslant\frac{s}{3}.$$

若 $|s_a+s_b+t_a|\geqslant|s_a+s_b+t_b|$，则 $|s_a+s_b+t_a|\geqslant\frac{s}{6}$，取集合

$S=\{j\mid j\equiv a(\bmod 3)1\leqslant j\leqslant n\}\cup\{j\mid r_j\geqslant 0,\ j\equiv b(\bmod 3)1\leqslant j\leqslant n\}$；

若 $|s_a+s_b+t_a|<|s_a+s_b+t_b|$，则 $|s_a+s_b+t_b|\geqslant\frac{s}{6}$，取集合

$S=\{j\mid r_j\geqslant 0,\ j\equiv a(\bmod 3)1\leqslant j\leqslant n\}\cup\{j\mid j\equiv b(\bmod 3)1\leqslant j\leqslant n\}$.

无论何种情形，$1\leqslant|S\cap\{i,\ i+1,\ i+2\}|\leqslant 2$ 对任何 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-2\}$ 成立，且此时 $\left|\sum\limits_{i\in S}r_i\right|\geqslant\frac{s}{6}=\frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{n}|r_i|$.

注　本题中，$1\leqslant|S\cap\{i,\ i+1,\ i+2\}|\leqslant 2$ 刻画了集合 S 的局部性质，而另一方面，$\left|\sum\limits_{i\in S}r_i\right|\geqslant\frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{n}|r_i|$ 的右端涉及 n 个实数 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$ 的整体性质. 这就势必要求我们处理好整体与局部的关系.

具体操作时，我们先将 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$ 按下标除以 3 的余数划分为 3 组，有利于构造满足局部性质的下标集 S，再按 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$ 的正负特性将上述 3 组分为 6 组，通过整体上 $s=s_1+s_2+s_3-t_1-t_2-t_3$ 的制约，设法找到几个组，它们含有的数 r_i（下标集为 S）进一步满足 $\left|\sum\limits_{i\in S}r_i\right|\geqslant\frac{s}{6}$.

从这个例子可以看出，整体与局部思想在解题中应当兼顾并有机结合.

习　题　9

1. 已给数表

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3 & 4\\ -1.2 & 0.5 & -3.9 & 9\\ \pi & -12 & 4 & -2.5\\ 63 & 1.4 & 7 & -9\end{pmatrix}$$

将它的任一行或任一列中的所有数同时变号，称为一次“变换”．问能否经过若干次变换，使表中的数全变为正数．

2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 都是非零实数，证明：下面的 6 个数：

$$a_1a_5a_9,\ a_2a_6a_7,\ a_3a_4a_8,\ -a_3a_5a_7,\ -a_1a_6a_8,\ -a_2a_4a_9$$

中至少有一个是负数．

3 已知：$S=\{1, 2, \cdots, 21\}$，有限集 $A\subseteq \mathbf{N}^*$，使得 S 中任一元素或者属于 A，或者等于 A 中两个不同元素的和．求满足条件的集合 A 元素个数的最小值．

4 若实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足方程组：

$$\begin{cases} x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5=-1, \\ x_2x_1+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5=-1, \\ x_3x_1+x_3x_2+x_3x_4+x_3x_5=-1, \\ x_4x_1+x_4x_2+x_4x_3+x_4x_5=-1, \\ x_5x_1+x_5x_2+x_5x_3+x_5x_4=-1. \end{cases}$$

求 x_1 的所有可能值．（2009 年日本数学奥林匹克预赛试题）

5 给定 $n\ (n>1)$ 个二次三项式 $x^2-a_ix+b_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$，其中 $2n$ 个实数 a_i, b_i 互不相同．试问：是否可能 $a_i, b_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 中的每个数都是其中某个多项式的根？（2006 年俄罗斯数学奥林匹克第 4 轮试题）

6 沿着圆周放着一些数，如果有依次相连的 4 个数 a, b, c, d 满足不等式 $(a-d)(b-c)>0$，那么就可以交换 b, c 的位置，这称为一次操作．

(1) 若圆周上依次放着数 1, 2, 3, 4, 5, 6，问：是否能经过有限次操作后，对圆周上任意依次相连的 4 个数 a, b, c, d，都有 $(a-d)(b-c)\leqslant 0$？请说明理由．

(2) 若圆周上从小到大按顺时针方向依次放着 2006 个正整数 $1, 2, \cdots, 2006$，问：是否能经过有限次操作后，对圆周上任意依次相连的 4 个数 a, b, c, d，都有 $(a-d)(b-c)\leqslant 0$？请说明理由．

7 在由实数构成的 $n\times n\ (n\geqslant 2)$ 数表中，第 i 行 n 个数之和为 s_i，第 j 列 n 个数之和为 t_j．记 $a_{ij}=s_i-t_j,\ i, j=1, 2, \cdots, n$，求 n^2 个数 $a_{ij}\ (i, j=1, 2, \cdots, n)$ 中正数个数的最大值．

10 选择合适的记号

在处理某些问题时，一开始就选择有效的记号，往往是解题的关键.

例如，整数具有各种表示方法，包括标准素因数分解，按模分类，各种进位制等等. 在解题时，我们可以根据问题的特征选用合适的表示数的方法，从而使思路变得明朗，或者使问题得以继续往下研究.

例 1 已知正整数 p, q, r, a 满足 $pq = ra^2$，其中 r 是素数，p, q 互素. 证明：p, q 中有一个是完全平方数.

证明 设 $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，$q = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l}$，$a = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \cdots a_m^{\gamma_m}$ 为 p, q, a 的标准素因数分解，则有

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l} = ra_1^{2\gamma_1} a_2^{2\gamma_2} \cdots a_m^{2\gamma_m}.$$

由于 p, q 互素且 r 是素数，故 p, q 中不被 r 整除的那个数每个素因子都具有偶数次幂，它一定是完全平方数.

注 算术基本定理指的是：任意一个大于 1 的整数 n 有唯一的素因数分解

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ 为不同的素数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbf{N}^*$（有时为便于考虑问题，会设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbf{N}$）.

这是一个极其重要的定理. 一旦将正整数表示为标准分解的形式，就可以考虑许多整除、互素、约数、方幂等问题，本题中，将 p, q, r 进行标准分解后，很便于利用素数的性质解决问题. 这里列举几个以标准分解为出发点的基本结果：

(1) 上述正整数 n 的正约数个数 $d(n) = \prod\limits_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$，特别地，$n$ 为完全平方数的充分必要条件是 $d(n)$ 为奇数；

(2) 上述正整数 n 的所有正约数之和 $\sigma(n) = \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$；

(3) 当 $n \geqslant 2$ 时，小于 n 且与 n 互素的正整数个数 $\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$.

例 2 (1) 如果 n 是一个正整数，使得 $2n+1$ 是一个完全平方数，证明：$n+1$ 是两个相邻的完全平方数之和.

(2) 如果 n 是一个正整数，使得 $3n+1$ 是一个完全平方数，证明：$n+1$ 是三个完全平方数之和.

证明 (1) 因 $2n+1$ 是一个完全平方，不妨设 $2n+1=a^2$. 其中 a 是整数，由于 a^2 是奇数，从而 a 是奇数，于是可设 $a=2k+1$，k 是整数，那么

$$2n+1=(2k+1)^2,$$

所以

$$n=2k^2+2k,$$

于是

$$n+1=2k^2+2k+1=k^2+(k+1)^2.$$

(2) 因 $3n+1$ 是完全平方数，设 $3n+1=a^2$，a 是整数. 显然，a 不是 3 的倍数，因此令 $a=3k\pm1$，k 是整数，于是

$$3n+1=(3k\pm1)^2,$$

所以

$$n=3k^2\pm2k.$$

于是

$$n+1=3k^2\pm2k+1=k^2+k^2+(k\pm1)^2.$$

注 在(1)的证明中，我们对 a 进行奇偶分类(即模 2)，然后给出它的表示 $(a=2k+1)$. 在(2)的证明中，对 a 用 $3k\pm1$(即模 3)表示. 这样便把原问题化为简单的代数问题了. 在处理有关整数问题时，我们往往根据题目的特征，按剩余类将整数分类，对每一种情况分别讨论，从而得到问题的解.

例 3 集合 $S=\{1, 2, \cdots, 3000\}$ 中是否包含一个具有 2000 个元素的子集 A，它满足下述性质：当 $x\in A$ 时，$2x\notin A$?

解 答案是否定的.

把每个正整数都表成 $2^s t$ 的形式，其中 s 是非负整数，t 是奇数.

如果集合 $A\subseteq S$ 具有性质：当 $x\in A$ 时，$2x\notin A$，那么在 $2^s t\in A$ 时，$2^{s+1}t\notin A$. 因此，对每个奇数 t，有

$$|A\cap\{t, 2t, 2^2t, \cdots\}|\leqslant|S\cap\{t, 2^2t, 2^4t, \cdots\}|,$$

其中 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数. 从而，$|A|$ 不大于下述集合的元素个数：

$$\{1, 3, \cdots, 2999, 1\times2^2, 3\times2^2, \cdots, 749\times2^2, 1\times2^4, 3\times2^4, \cdots, 187\times2^4,\\ 1\times2^6, 3\times2^6, \cdots, 45\times2^6, 1\times2^8, 3\times2^8, \cdots, 11\times2^8, 1\times2^{10}\}$$

即

$$|A| \leqslant 15\,000 + 375 + 94 + 23 + 6 + 1 = 1999 < 2000.$$

从而不存在含 2000 个元素的集合 A 满足题述性质.

注　本例中的条件涉及 x 及其两倍 $2x$ 关于集合 A 的从属关系,故而把正整数表成 $2^s t$（t 为奇数）的形式有助于讨论,使问题迎刃而解.

例 4　对正整数 m,定义 $f(m)$ 为 $m!$ 中因数 2 的个数（即满足 $2^k \mid m!$ 的最大整数 k）. 证明:有无穷多个正整数 m,满足

$$m - f(m) = 1000.$$

证明　把 m 写成二进制形式

$$m = \sum 2^{r_i} = 2^{r_n} + 2^{r_{n-1}} + \cdots + 2^{r_1},$$

其中 $r_n > r_{n-1} > \cdots > r_1 \geqslant 0$, $r_i \in \mathbf{Z}$.

于是

$$f(m) = \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{2^2}\right] + \left[\frac{m}{2^3}\right] + \cdots = \left[\frac{\sum 2^{r_i}}{2}\right] + \left[\frac{\sum 2^{r_i}}{2^2}\right] + \left[\frac{\sum 2^{r_i}}{2^3}\right] + \cdots$$
$$= \sum 2^{r_i - 1} + \sum 2^{r_i - 2} + \sum 2^{r_i - 3} + \cdots,$$

其中和号只对非负指数的项求和. 进一步有

$$f(m) = \sum (2^{r_i - 1} + 2^{r_i - 2} + \cdots + 1) = \sum (2^{r_i} - 1) = m - n.$$

所以 $m - f(m) = n$,即 $m - f(m)$ 等于 m 的二进制表示下非零数字的个数.

由于存在无穷个正整数 m,使得它们二进制表示中恰有 1000 个非零数字,从而命题得证.

注　由 $f(m)$ 的定义提示我们把 m 表为二进制的形式,这样也便于最终描述满足条件的 m 的性质. 用本题的方法可以得到一个推广的结论:

对正整数 m,定义 $f_p(m)$ 为 $m!$ 中素因数 p 的个数（即满足 $p^k \mid m!$ 的最大整数 k）,则 m 在 p 进制表示下的数码之和等于 $\dfrac{m - f_p(m)}{p - 1}$.

例 5　设 $f(n)$ 是 $\mathbf{N}^*$ 到 $\mathbf{N}^*$ 的函数, $f(1) = 1$,且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ 有

$$f(2n + \varepsilon) = 3f(n) + \varepsilon.$$

求函数 $f(n)$ 的值域.

解 先计算 $f(n)$ 的一些具体的数值：

n	1	2	3	4	5	6	…
$f(n)$	1	3	4	9	10	12	…

如果将 n 与 $f(n)$ 分别用二进制和三进制来表示，重新填写表格，即为

n	$(1)_2$	$(10)_2$	$(11)_2$	$(100)_2$	$(101)_2$	$(110)_2$	…
$f(n)$	$(1)_3$	$(10)_3$	$(11)_3$	$(100)_3$	$(101)_3$	$(110)_3$	…

因此猜测：对任意正整数 $n=(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1})_2$，有 $f(n)=(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1})_3$.

下面对 $n=(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1})_2$ 的位数 k 用数学归纳法证明上述结论.

当 $k=1$ 时显然成立.

设上述结论在 k 位数时成立，考虑任意一个 $k+1$ 位数 $n_1=(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_0})_2$.

在 $f(2n+\varepsilon)=3f(n)+\varepsilon$ 中令 $n=(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1})_2$，$\varepsilon=a_0\in\{0,1\}$，由于此时

$$2n+\varepsilon=2\cdot(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1})_2+a_0=(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0})_2=n_1,$$

故

$$f(n_1)=3f(n)+a_0=3\cdot(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1})_3+a_0=(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0})_3,$$

可见 $k+1$ 的情形也成立. 由数学归纳法可知结论成立.

因此函数 $f(n)$ 的值域是三进制表示中只含数码 0，1 的一切正整数集合，即

$$\{3^{r_1}+3^{r_2}+\cdots+3^{r_s}\mid s\in\mathbf{N}^*,\ r_1,r_2,\cdots,r_s\in\mathbf{N},\ r_1>r_2>\cdots>r_s\}.$$

注一 本题先进行探究，计算了 $f(n)$ 的一些具体的值. 一旦将 n 与 $f(n)$ 的十进制表示替换为适当的进位制（二进制和三进制），取值规律就在新的记号下显现无疑，在书写上也带来便利. 此后的证明是很容易的.

注二 在下述 1995 年中国数学奥林匹克的一道试题中，恰好可以引用本题的结论：

函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 适合条件 $f(1)=1$，且对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 有

$$3f(n)f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n)),\ f(2n)<6f(n).$$

试求方程 $f(k)+f(l)=293$，$k<l$ 的所有解.

下面再提一种正整数的表示方式——正整数的 Fibonacci 表示.

不妨规定$\{F_n\}$的定义如下：

$$F_1=1,\ F_2=2,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n.$$

我们考虑将正整数表示成$\{F_n\}$中某些不同项的和. 比如

$$10=8+2=F_5+F_2,$$
$$30=13+8+5+3+1=F_6+F_5+F_4+F_3+F_1,$$

但是30还可以表示成

$$30=21+8+1=F_7+F_5+F_1.$$

如果进一步要求将正整数表示成$\{F_n\}$中的某些两两不相邻项的和，那么正整数30的上述两种表示方法中，仅有后一种满足要求.

一般地，可以用数学归纳法证明如下重要的结论：

定理　每个正整数n均可唯一地表示成$\{F_n\}$中某些两两不相邻的项之和.

此时若$n=a_kF_k+a_{k-1}F_{k-1}+\cdots+a_1F_1$(其中$a_1, a_2, \cdots, a_k\in\{0, 1\}$且相邻两项不同时取1)，我们用$(\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_1})_F$来记$n$，称为$n$的“Fibonacci表示”.

用这种表示方法有时候可以很简明地处理一些问题：

例6　求集合$S=\{1, 2, \cdots, n\}$的不含两个相邻整数的非空子集的个数.

解　根据正整数Fibonacci表示的性质可知，S的每个不含两个相邻整数的非空子集A恰好对应一个小于$(\overline{1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}})_F=F_{n+1}$的正整数$m=(\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1})_F$，其中只需规定

$$a_i=\begin{cases}1, & i\in A,\\ 0, & i\notin A.\end{cases}$$

从而满足条件的非空子集个数为$F_{n+1}-1$，即$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]-1$.

在一些几何问题中，我们可能会采用解析法、复数法等求解，其中也涉及到如何选择合适的记号的问题. 下面举两例予以说明.

例7　证明：任意四边形四条边的平方和，等于两条对角线的平方和，加

上对角线中点连线的平方的 4 倍.

证明　设四边形四个顶点在直角坐标系中的坐标分别为 $A_i(x_i, y_i)$，$i=1, 2, 3, 4$,则 A_1A_3，A_2A_4 的中点 M，N 的坐标分别为 $\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$，$\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$.

由于

$$\begin{aligned}&4\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\\=&(x_1+x_3-x_2-x_4)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\\=&2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1)\\=&(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2,\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}&4\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_2+y_4}{2}\right)^2+(y_1-y_3)^2+(y_2-y_4)^2\\=&(y_1-y_2)^2+(y_2-y_3)^2+(y_3-y_4)^2+(y_4-y_1)^2,\end{aligned}$$

以上两式相加,根据两点距离公式就有

$$\begin{aligned}&4\mid MN\mid^2+\mid A_1A_3\mid^2+\mid A_2A_4\mid^2\\=&\mid A_1A_2\mid^2+\mid A_2A_3\mid^2+\mid A_3A_4\mid^2+\mid A_4A_1\mid^2,\end{aligned}$$

故命题成立.

注　本题用解析法求解. 大体来讲,解析法解题具有如下一些规律:

如果几何题中出现直角,可以考虑让坐标轴成为这个直角的两边;凡是涉及平方关系的问题,运用解析几何往往相对比较方便(本题是个鲜明的例子);有些问题,可以用数字代替字母而丝毫不影响问题的实质,反过来有时候也可以用字母代替数字,将内在结构明显化.

当然,如何选取记号更合适要视具体问题而定. 在本题中,我们选择最一般的坐标进行代数运算,这样容易保持算式的对称性,便于边观察边证明,并且由于横、纵坐标的对称关系,只需证明横坐标的等式,同理便可得到纵坐标的等式,又达到了事半功倍的效果.

例 8　锐角三角形 ABC 外接圆在 A 和 B 处的切线相交于 D,M 是 AB 中点,证明:$\angle ACM=\angle BCD$. (2007 年国家队培训题)

证明　用复数法.

不妨设$\triangle ABC$ 外接圆为复平面上的单位圆(O 为圆心),且射线 OM 方向

为实轴正向.

由已知条件易得 D 在 OM 延长线上，且 $OM\cdot OD=OA^2=1$.

不妨设 A，B 分别对应复数 z，$\bar{z}$，则点 M 对应的复数为 $\mathrm{Re}\,z$，点 D 对应的复数为 $\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,z}$. 又设点 C 对应复数 c.

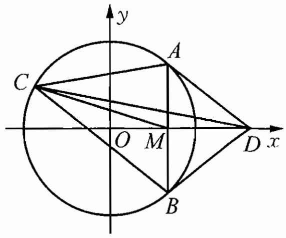


图 10－1

显然 $\angle ACM$ 与 $\angle BCD$ 均为锐角，故只需证明 $H=\dfrac{c-z}{c-\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,z}}:\dfrac{c-\mathrm{Re}\,z}{c-\bar{z}}\in\mathbf{R}$，即证 $\overline{H}=H$.

记 $(c-z)(c-\bar{z})=P$，$\left(c-\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,z}\right)(c-\mathrm{Re}\,z)=Q$，则 $H=\dfrac{P}{Q}$.

注意到 $z\cdot\bar{z}=c\cdot\bar{c}=1$，则

$$\overline{P}=(\bar{c}-\bar{z})(\bar{c}-z)=\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\bar{z}}\right)=\frac{1}{c^2}(z-c)(\bar{z}-c)=\frac{P}{c^2},$$

$$\begin{aligned}\overline{Q}&=\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\mathrm{Re}\,z}\right)\left(\frac{1}{c}-\mathrm{Re}\,z\right)=\frac{1}{c^2\mathrm{Re}\,z}(\mathrm{Re}\,z-c)(1-c\mathrm{Re}\,z)\\&=\frac{1}{c^2\mathrm{Re}\,z}\cdot Q\mathrm{Re}\,z=\frac{Q}{c^2},\end{aligned}$$

故 $\overline{H}=\dfrac{\overline{P}}{\overline{Q}}=\dfrac{P}{Q}=H$. 从而 $\angle ACM=\angle BCD$.

注　本题中 A，B 两点地位对称，而 D，M 两点与 A，B 关系密切，因此在不失一般性的前提下，将 A，B 分别对应单位圆上的复数 z，$\bar{z}$，并将需证的角相等的结论转化为“一个复数式取实数值”这样一类表述.

复数法是一种代数方法，然而复数的乘除在模、辐角等方面又具有清晰的几何意义，这是复数法的优点所在. 复数的几种表示形式(代数、三角、指数形式等)在解题中也可适当选用，它们揭示了代数、三角、几何等知识的联系. 凡与旋转、位似有关的问题，常常可以利用复数法求解.

例 9　从左到右编号为 B_1，B_2，…，B_n 的 n 个盒子共装有 n 个小球，每次可以选择一个盒子 B_k，进行如下操作：(1)若 $k=1$ 且 B_1 中至少有 1 个小球，则可从 B_1 中移 1 个小球至 B_2 中；(2) 若 $k=n$ 且 B_n 中至少有 1 个小球，则可从 B_n 中移 1 个小球至 B_{n-1} 中；(3) 若 $2\leqslant k\leqslant n-1$ 且 B_k 中至少有 2 个小球，则可从 B_k 中分别移 1 个小球至 B_{k+1} 和 B_{k-1} 中. 求证：无论初始时这些小球如何放置，总能经过有限次操作使得每个盒子中恰有 1 个小球.(2011 年中国女子数学奥林匹克试题)

证明 对于任意两个向量 $\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\vec{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，若存在 $1\leqslant k\leqslant n$ 使得 $x_1=y_1, \cdots, x_{k-1}=y_{k-1}, x_k>y_k$，则记 $\vec{x}>\vec{y}$. 用一非负整数向量 $\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示各盒子中的小球数目. 经过一次对 B_k 的操作后，各盒子中的小球数目从 $\vec{x}$ 变为 $\vec{x}+\alpha_k$，其中 $\alpha_1=(-1, 1, 0, \cdots, 0)$，$\alpha_k=(\underbrace{0, \cdots, 0}_{k-2\text{个}}, 1, -2, 1, 0, \cdots, 0)\ (2\leqslant k\leqslant n-1)$，$\alpha_n=(0, \cdots, 0, 1, -1)$. 当 $k\geqslant 2$ 时，总有 $\vec{x}+\alpha_k>\vec{x}$. 因此，对于任意初始状态，总可以通过一系列对 $B_2, \cdots, B_n$ 的操作（只要 $k\geqslant 2$ 且 B_k 中至少有两个小球，就对 B_k 施行操作），使得操作后的小球数目 $\vec{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 满足 $y_k\leqslant 1$, $\forall k\geqslant 2$. 若 $y_2=\cdots=y_n=1$，则已经满足题目要求；否则有 $y_1\geqslant 2$. 设 i 是满足 $y_i=0$ 的最小整数，通过一系列对 $B_1, \cdots, B_{i-1}$ 的操作，可以使得小球数目变为 $(y_1-1, 1, \cdots, 1, y_{i+1}, \cdots, y_n)$. 具体操作如下：

$$(y_1, 1, \cdots, 1, 0, y_{i+1}, \cdots, y_n)\xrightarrow{B_1, B_2, \cdots, B_{i-1}}(y_1, 1, \cdots, 1, 0, 1, y_{i+1}, \cdots, y_n)\xrightarrow{B_1, B_2, \cdots, B_{i-2}}(y_1, 1, \cdots, 1, 0, 1, 1, y_{i+1}, \cdots, y_n)\to\cdots\to(y_1, 0, 1, \cdots, 1, y_{i+1}, \cdots, y_n)\xrightarrow{B_1}(y_1-1, 1, \cdots, 1, y_{i+1}, \cdots, y_n).$$

重复以上操作，最终可使小球数目满足题目要求.

注 本题采用 n 维向量的记号，使表达准确且紧凑.

习 题 10

1 小明家电话号码原为六位数，第一次升位是在首位号码和第二位号码之间加上数字 8，成为一个七位数的电话号码；第二次升位是在首位号码前加上数字 2，成为一个八位数的电话号码. 小明发现，他家两次升位后的电话号码的八位数，恰是原来电话号码的六位数的 81 倍，问：小明家原来的电话号码是多少？

2 求集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 2009\}$ 的元素和为奇数的非空子集的个数.

3 证明：存在无穷多对正整数 (m, n)，满足方程

$$m^2+25n^2=10mn+7(m+n).$$

4 求所有正整数 n，使得 $n=d^2(n)$（$d(n)$ 表示正整数 n 的正约数个数）.（1999 年加拿大数学奥林匹克试题）

5 对给定实数 x，求表达式 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}$ 的值.

6 若 $a,b,c,x,y,z\in\mathbf{R}$，满足 $\begin{cases}\cos(x+y+z)=a\cos x+b\cos y+c\cos z,\\ \sin(x+y+z)=a\sin x+b\sin y+c\sin z,\end{cases}$

证明：$\begin{cases}a\cos(y+z)+b\cos(z+x)+c\cos(x+y)=1,\\ a\sin(y+z)+b\sin(z+x)+c\sin(x+y)=0.\end{cases}$

7 四边形 $ABCD$ 中，以边 AB，BC，CD，DA 为斜边分别向四边形外侧作等腰直角三角形 $\triangle ABE$，$\triangle BCF$，$\triangle CDG$，$\triangle DAH$. 证明 EG 与 FH 垂直且相等.

8 设 H 是锐角三角形 ABC 的垂心，由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP，AQ，切点分别为 P，Q. 求证：P，H，Q 三点共线.（1996 年中国数学奥林匹克试题）

9 对于正整数 n，令 $f_n=[2^n\cdot\sqrt{2008}]+[2^n\cdot\sqrt{2009}]$. 求证：数列 f_1，f_2，$\cdots$ 中有无穷多个奇数和无穷多个偶数（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）.（2008 年中国女子数学奥林匹克试题）

11 数形结合

数形结合思想是一个非常重要的思想，也是一个重要的解题策略.

“数”与“形”反映了事物两个方面的属性. 数形结合，就是通过数与形之间的对应和转化来解决数学问题，具体来说就是在解题时，把图形性质问题借助于数量关系的推演而具体量化，把数量关系问题借助于几何背景而直观形象化，它兼有数的严谨与形的直观之长. 通过“以形助数”或“以数解形”，可使复杂问题简单化，抽象问题具体化，有助于把握数学问题的本质，使问题迎刃而解.

例 1　设实系数一元二次方程 $x^2+ax+2b-2=0$ 有两个相异实根，其中一根在 $(0,1)$ 内，另一根在 $(1,2)$ 内，求 $\dfrac{b-4}{a-1}$ 的取值范围.（2008 年浙江省高中数学竞赛试题）

解　令 $f(x)=x^2+ax+2b-2$，则已知条件等价于 $f(0)>0$，$f(1)<0$，$f(2)>0$，化简即

$$\begin{cases} b>1, \\ a+2b<1, \\ a+b>-1. \end{cases}$$

如图，在直角坐标平面 aOb 内画出满足这个不等式组的区域，并观察该区域中每个点 (a,b) 与 $P(1,4)$ 的连线的斜率 $\dfrac{b-4}{a-1}$，可得 $\dfrac{b-4}{a-1}\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

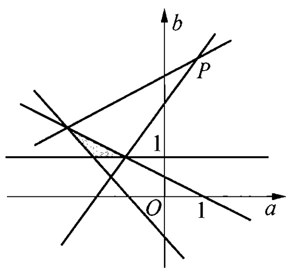


图 11-1

注　本题有 a，b 两个参数，约束条件较多且不直观，故先等价转化为 $f(0)>0$，$f(1)<0$，$f(2)>0$，再把这些抽象的数量关系对应为直观的几何图形位置关系，每一步都保持了命题的等价性，同时使问题简单化.

现另有一种解法同样可以求得结果，具体如下：

设两个相异实根为 x_1，x_2，且 $0<x_1<1<x_2<2$，则

$$1 < x_1 + x_2 = -a < 3,\ 0 < x_1 x_2 = 2b - 2 < 2.$$

于是 $-3 < a < -1$，$1 < b < 2$，即 $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{a-1} < -\dfrac{1}{4}$，$-3 < b-4 < -2$.

故有
$$\frac{1}{2} < \frac{b-4}{a-1} < \frac{3}{2}.$$

请有兴趣的读者找出该解法的不妥之处，并考虑为什么结论仍能保持正确.

例 2 圆 O_1 与圆 O_2 交于 A、B 两点. 过点 A 作直线 $CD \perp AB$，交圆 O_1 于 C，交圆 O_2 于 D. 过 C、D 分别作 CD 垂线 MC、MD，使 $MC = MB$，$ND = NB$. 连接 MN，过点 B 作 MN 的平行线，交圆 O_1 于 P，交圆 O_2 于 Q. 求证：$BP = BQ$.

证明 下面给出一个解析几何证法.

设 O_1O_2 交 AB 于原点 O，不妨设 $A(0, -1)$，$B(0, 1)$，$O_1(x_1, 0)$，$O_2(x_2, 0)$.

圆 O_1 方程为 $(x - x_1)^2 + y^2 = x_1^2 + 1$，即

$$x^2 - 2x_1 x + y^2 - 1 = 0. \qquad ①$$

同理，圆 O_2 方程为：

$$x^2 - 2x_2 x + y^2 - 1 = 0. \qquad ②$$

由已知条件及抛物线定义得：M、N 在以直线 CD（即直线 $y = -1$）为准线，以 B 为焦点的抛物线 $x^2 = 2py$ 上. 其中，p 为 B 到 CD 的距离，故 $p = 2$. 所以

$$x^2 = 4y. \qquad ③$$

因为 $CD \perp AB$，所以 BC 为圆 O_1 的直径，BD 为圆 O_2 的直径，易知 C、D 的坐标分别为 $(2x_1, -1)$，$(2x_2, -1)$.

又 $MC \perp CD$，$ND \perp CD$，所以 $x_M = x_C = 2x_1$，$x_N = x_D = 2x_2$. 考虑到 M、N 分别满足 ③ 式，有：$y_M = \dfrac{1}{4}x_M^2 = x_1^2$，$y_N = \dfrac{1}{4}x_N^2 = x_2^2$. 注意 $x_1 \neq x_2$，于是 MN 的斜率为 $k = \dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{2x_1 - 2x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，又 PQ 过点 B 且与 MN 平行，故其方程应为：

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2}x + 1. \qquad ④$$

联立①、④，舍去根 $x=0$，得：$x_P=\dfrac{x_1-x_2}{1+\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$. 同理得：$x_Q=\dfrac{x_2-x_1}{1+\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2}=-x_P$.

故 BP、BQ 在 x 轴上的投影长相等. 故 $BP=BQ$.

注 本题运用解析法证明，即：选择适当的坐标系，把几何问题转化为代数问题，经过计算和逻辑推理，得到有关的代数结论，再还原成题目所需证明的几何结论. 在对问题的处理上，例 1 是"以形助数"，本例是"由数解形"，这是相互对应的两种取向. 用解析法证明平面几何问题具有模型化、规律性强的特点，其案例屡见不鲜，这里不作赘述.

例 3 已知正数 a、b、c、A、B、C 满足 $a+A=b+B=c+C=k$. 求证：

$$aB+bC+cA<k^2.$$

证明 联想到三角形的面积，可以构造以 k 为边长的正三角形 PQR（如图 11－2），在边上取 L、M、N，根据已知条件，使 $QL=A$，$LR=a$，$RM=B$，$MP=b$，$PN=C$，$NQ=c$. 则

$$S_{\triangle LRM}=\frac{1}{2}aB\sin 60^\circ,\ S_{\triangle MPN}=\frac{1}{2}bC\sin 60^\circ,$$

$$S_{\triangle NQL}=\frac{1}{2}cA\sin 60^\circ,\ S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}k^2\sin 60^\circ.$$

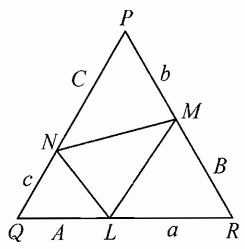


图 11－2

由图显然有

$$S_{\triangle LRM}+S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQL}<S_{\triangle PQR},$$

所以

$$\frac{1}{2}aB\sin 60^\circ+\frac{1}{2}bC\sin 60^\circ+\frac{1}{2}cA\sin 60^\circ<\frac{1}{2}k^2\sin 60^\circ.$$

即
$$aB+bC+cA<k^2.$$

例 4 设 p、q 为互素的正整数. 证明：

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2},$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解　考虑直角坐标平面的矩形 $OABC$，这里 O 为原点，A、B、C 的坐标分别为 $(q, 0)$，(q, p)，$(0, p)$，连接 OB. 由于 p、q 互素，所以对于区间 $(0, q)$ 内的整数 x，$y=\frac{p}{q}x$ 决不是整数. 也就是说线段 OB 上没有整点.

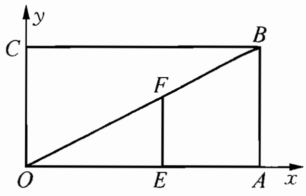


图 11－3

下面我们用两种方法计算△OAB 内部(不包括边界)的整点数目 s.

一方面，过 x 轴上的整点 $E(k, 0)$ $(0<k<q)$ 作 x 轴的垂线与 OB 相交于 F. 点 F 的纵坐标为 $y=\frac{kp}{q}$，所以在线段 EF 内部(不包括边界)有 $\left[\frac{kp}{q}\right]$ 个整点. 这样

$$s=\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right].$$

另一方面，矩形 $OABC$ 内部(不包括边界)共有 $(p-1)(q-1)$ 个整点. 线段 OB 内部没有整点，△OAB 和△BCO 内部的整点各占总数的一半，即

$$s=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

综合两方面即证.

注　本例亦可证明如下：

设 r 为正整数 $(1\leqslant r\leqslant q-1)$，则有 $\left[\frac{(q-r)p}{q}\right]=p-\left[\frac{rp}{q}\right]-1$. 这样

$$\begin{aligned}&\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{p}{q}\right]\\&=(p-1)(q-1)-\left(\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right).\end{aligned}$$

即证.

虽然这个证明篇幅较短，但前面的证明反映了整点计数的意义，很直观，其方法对很多与整点有关的问题都适用.

例 5　星期天电影院放映儿童专场，每张票价 5 元，每位小朋友限买一张. $2n$ 位小朋友在售票处门口排成一圈，其中正好有一半人只带 5 元一张的钞票，一半人只带 10 元一张的钞票. 开始买票前，售票处没有零钱找补. 售票员可以任选一位小朋友作为排头开始卖票，但不能打乱已排好的队伍. 问：售票员是否一定有办法顺利把票卖完，而用不着担心找不出零钱？

分析　题中不允许打乱已排好的队伍，即只能从某人开始一个接一个地

向后卖票.

我们帮售票员想一个办法.拿一张方格纸,在上面画出横轴和纵轴.先作一个调查:从队伍最前面的那个人开始,依次询问每个小朋友手中拿的是5元还是10元.遇上5元,就在一个小方格里画一条如"／"的对角线,称为上升线段;如遇到10元就在一个小方格画一条如"＼"的对角线,称为下降线段.画图是从原点开始的,但必须把各个小线段连成一条连续不断的折线.

因为上升线段和下降线段条数相同,所以折线终点一定在横轴上.

如果折线某个地方在横轴下方,就意味着从某个地方开始下降线条数多于上升线条数目.这时售票员如果从第一为小朋友开始卖票,必然会在某个时刻无钱找零.

在这种情况下,总可以在折线上找到"最低点",当这种最低点不止一个时,我们取最靠近纵轴的那个最低点.

若这个最低点的横坐标为k,则售票员应从队伍中第k个小朋友开始售票,这样做永远不会出现找不出零钱的情况.因为从这点开始任何时候上升线条数目必不少于下降线条数目(否则与最低点矛盾).

下面举一个例子来说明前面的证明.

设排好队的10为小朋友手中的钱依次为10,10,5,10,5,5,10,5,5,10,按前述作出折线:

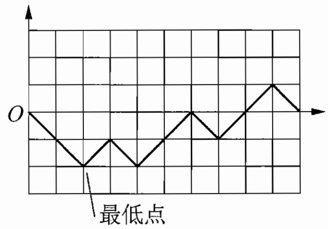


图 11－4

请读者自己验证我们前面的论述.

注　本问题构造折线图形,把所有条件都适当地转述为折线的特征,相当直观,在此基础上一看图形便知结论.

另一个问题与本题有相似之处:

一个环形轨道上有n个加油站,所有加油站的油量总和正好够车跑一圈.证明,总能找到其中一个加油站,使得初始时油箱为空的汽车从这里出发,能够顺利环行一圈回到起点.

例6　求证:对任意八个实数a_1,a_2,…,a_8下列6个数

$$a_1a_3+a_2a_4,\ a_1a_5+a_2a_6,\ a_1a_7+a_2a_8,\ a_3a_5+a_4a_6,\ a_3a_7+a_4a_8,\ a_5a_7+a_6a_8$$

中至少有一个是非负的,并举例说明这6个数可能恰有一个是非负的.

证明　取平面直角坐标系内的点$A(a_1,a_2)$,$B(a_3,a_4)$,$C(a_5,a_6)$,$D(a_7,a_8)$,设O为坐标原点.

若A,B,C,D中有某个点与O重合,例如A与O重合,则$a_1a_3+a_2a_4=0$为非负数.

以下假定 A，B，C，D 中任意一点不与 O 重合，不妨设射线 OA，OB，OC，OD 依逆时针顺序排列，根据抽屉原理，它们的夹角 $\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COD$，$\angle DOA$ 中必有一个不超过 $90°$，不妨设 $0° \leqslant \angle AOB \leqslant 90°$，则 $a_1a_3+a_2a_4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\geqslant 0$.

另外，取 $a_1=3$，$a_2=1$，$a_3=-1$，$a_4=2$，$a_5=-1$，$a_6=-2$，$a_7=3$，$a_8=-1$，其中仅有 $a_1a_7+a_2a_8=8>0$，则表明这 6 个数中可以恰有一个是非负的.

注　我们考虑形如 $ac+bd$ 的式子的几何意义：$ac+bd$ 可以看成平面直角坐标系中向量 (a, b)，(c, d) 的数量积，而数量积的符号恰能反映两个向量的夹角是否大于 $90°$. 有了这样的认识，本题便能构造几何模型证明结论.

在最后举例时，也不必盲目尝试，而只需使射线 OA，OB，OC，OD 中有且仅有一对夹角不超过 $90°$，即可找到相应的 a_1，a_2，$\cdots$，a_8 的值.

例 7　从空间一点最多可以引出多少条射线，使得其中每两条射线夹角均为钝角？

解　首先，若由正四面体的中心向它的 4 个顶点各引一条射线，这 4 条射线两两之间的夹角均为钝角，满足条件.

其次证明 5 条射线无法满足题目要求.

假设从点 O 引出的 5 条射线 OA_1，OA_2，$\cdots$，OA_5 两两夹角均为钝角.

我们用空间向量的坐标来表示射线方向，不妨设 $\overrightarrow{OA_5}=(0, 0, -1)$，而

$$\overrightarrow{OA_i}=(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2, 3, 4).$$

由 $\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_5}=-z_i$ 可知 $z_i>0$ $(i=1, 2, 3, 4)$.

记 A_i 在 xOy 平面内的射影为 P_i.

根据抽屉原理，在 $\overrightarrow{OP_i}=(x_i, y_i, 0)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 中必有两个向量夹角不大于 $90°$，不妨设它们是 $\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\overrightarrow{OP_2}$，则 $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=x_1x_2+y_1y_2\geqslant 0$，再结合 z_1，$z_2>0$ 可知 $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2>0$，即 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\overrightarrow{OA_2}$ 夹角为锐角，与条件矛盾！

综上所述，自空间一点最多只能引出 4 条射线，使其中每两条射线夹角均为钝角.

注　数量关系是对几何表象的一种内在支撑. 本题中，从直观上并不容易说清楚为何“5 条射线无法满足两两之间夹角为钝角”，于是引入空间向量，转而考虑代数问题. 此后，为了表明平面中四个投影向量 $\overrightarrow{OP_i}(i=1, 2, 3, 4)$ 必有两个的数量积非负，又回归几何关系，用与前一题类似的方式进行处理. 本题可谓先“由形及数”，再“由数及形”，相互转化，补充互助.

例 8　设 a，b，c，d 为整数，$a>b>c>d>0$，且

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c).$$

证明：$ab+cd$ 不是素数.（2001 年国际数学奥林匹克试题）

证明　由 $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)=(b+d)^2-(a-c)^2$ 可知 $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2$. 因此可构造凸四边形 $ABCD$，使得 $AB=a$，$AD=c$，$CB=d$，$CD=b$，且 $\angle BAD=60^\circ$，$\angle BCD=120^\circ$，此时 A，B，C，D 四点共圆，且

$$BD^2=a^2-ac+c^2. \qquad ①$$

设 $\angle ABC=\alpha$，则 $\angle ADC=180^\circ-\alpha$. 对 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 分别用余弦定理可得

$$AC^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos(180^\circ-\alpha)=b^2+c^2+2bc\cos\alpha.$$

解出 $2\cos\alpha=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc}$，所以

$$\begin{aligned}AC^2&=a^2+d^2-ad\cdot\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc}\\&=\frac{(a^2+d^2)(ad+bc)-ad(a^2+d^2-b^2-c^2)}{ad+bc} \qquad ②\\&=\frac{(a^2+d^2)bc+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.\end{aligned}$$

圆内接四边形 $ABCD$ 中，由托勒密定理得 $AC\cdot BD=a\cdot b+c\cdot d$，平方得

$$AC^2\cdot BD^2=(ab+cd)^2. \qquad ③$$

将①和②代入③，整理得 $(a^2-ac+c^2)(ac+bd)=(ab+cd)(ad+bc)$，所以

$$ac+bd\mid(ab+cd)(ad+bc). \qquad ④$$

因 $a>b>c>d$，所以 $ab+cd>ac+bd>ad+bc$，假如 $ab+cd$ 是素数，则 $ac+bd$ 与 $ab+cd$ 互素，结合④得 $ac+bd\mid ad+bc$，这又与 $ac+bd>ad+bc$ 矛盾！所以 $ab+cd$ 不是素数.

注　以上证法中，根据条件的特点巧妙地构造出圆内接四边形 $ABCD$，“以形助数”实施证明.

进一步，解题过程中发现有下面的结论成立：

若正数 a，b，c，d 满足 $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2=M$，则

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}=M.$$

这是个纯代数的结论，能否重新给出一个代数的证明？

其实不难发现，只要 $ac+bd\neq 0$，就有

$$\begin{aligned}\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}&=\frac{(a^2+c^2)bd+(b^2+d^2)ac}{ac+bd}\\&=\frac{(a^2-ac+c^2)bd+(b^2+bd+d^2)ac}{ac+bd}\\&=\frac{Mbd+Mac}{ac+bd}=M.\end{aligned}$$

用这样一段文字代替上述证明④式之前的部分，则使证明显著简化. 然而，在证明原题时，若要凭空联想到这个结论，诚然有一定困难.

可见本题中“数”与“形”相互转化，互受启发，最终优化了解题途径. 正如我国著名数学家华罗庚曾为数形结合所赋的一首诗：

数形本是相倚依，焉然分作两边飞。
数缺形时少直觉，形少数时难入微。
数形结合百般好，隔离分家万事休。
几何代数统一体，永远联系莫分离。

习 题 11

1 证明：对任意实数 x，均有

$$\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|<1.$$

2 某家电影院的票价为每张 5 元，现有 10 个人，其中 5 个人手持 5 元钞票，另外 5 个人手持 10 元钞票. 假设开始售票时售票处没有钱，这 10 个人随机排队买票. 求售票处不会出现找不开钱的局面的概率.（2010 年河北省高中数学竞赛试题）

3 在关于 x 的二次方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$ 中，z_1，z_2，m 均是复数，且 $z_1^2-4z_2=16+20\mathrm{i}$. 设这个方程的两根 α，β 满足 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$，求 $|m|$ 的最大值和最小值.（1994 年全国高中数学联赛试题）

4 已知函数 $f(x)=|\sin x|$ 的图像与直线 $y=kx\ (k>0)$ 有且仅有三个交点，交点的横坐标的最大值为 α，求证：$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\dfrac{1+\alpha^2}{4\alpha}$.（2008 年全

国高中数学联赛试题)

5 正实数 x, y, z 满足

$$\begin{cases}\frac{1}{3}y^2+z^2=9, & ①\\ x^2+xz+z^2=16, & ②\\ x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=25, & ③\end{cases}$$

试求代数式 $xy+2yz+3zx$ 的值.

6 给定实数 α,求最小实数 $\lambda=\lambda(\alpha)$,使得对任意复数 z_1, z_2 和实数 $x\in[0, 1]$,若 $|z_1|\leqslant\alpha|z_1-z_2|$,则 $|z_1-xz_2|\leqslant\lambda|z_1-z_2|$. (2011 年中国女子数学奥林匹克试题)

7 在空间直角坐标系内,点 A, B_1, B_2, …, B_6 与原点 O 这八个点中,任意三点不共线,点 A 的坐标 (a, b, c) 满足 $a+b+c=0$,点 B_1, B_2, …, B_6 的坐标依次为 (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2), (x_3, x_2, x_1). 证明:$\angle AOB_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 中锐角至少有两个.

8 设 $\triangle ABC$ 中 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, P 是 $\triangle ABC$ 内一点.

(1) 求证:$a\cdot PB\cdot PC+b\cdot PC\cdot PA+c\cdot PA\cdot PB\geqslant abc$;

(2) 求证:$a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2\geqslant abc$.

12 对应与配对

“对应”是一个基本而又重要的数学概念. 我们也常利用对应来解题. 这种方法的大致想法是这样的：对某个系统中的一个问题，找到一种对应法则，通过该法则的作用把这个问题转化成另一个系统中的相应问题，而该问题在新的系统中是可以解决的，并存在逆对应，再把新系统的解答逆反回去，从而求得原来那个问题的解答. 徐利治教授称这种方法为“关系映射反演原则”，简称 RMI 原则. “配对”是指将一些对象(例如数、元素、子集)按照某种适当的对应关系两两相配考虑问题，从而简化计算或使命题得以证明.

下面通过一些例题来介绍对应与配对方法的应用.

例 1　游戏“24 点”的规则是：随机抽出 4 个不大于 10 的正整数(数字可以有重复)，要用它们组成一个四则运算式，使运算结果等于 24(数字必须都用，有些情况下是无解的). 某同学为了备战学校的“24 点”比赛，提前列出所有可能出现的 4 个数的情况进行研究. 如果不计 4 个数的顺序，那么他共需列出多少种情况？

解法一　分以下几类讨论：

(1) 如果 4 个数全相同，则有 10 种情况.

(2) 如果 4 个数中出现两种数字，那么当有 3 个相同时，有 $P_{10}^2=90$ 种情况；当有两个相同，另两个也相同时，有 $C_{10}^2=45$ 种情况. 共 135 种情况.

(3) 如果 4 个数中出现三种数字，则必有一种出现两次，另两种各出现一次. 出现两次的数有 10 种选法，另两个数字有 $C_9^2=36$ 种选法，根据乘法原理可得共 360 种情况.

(4) 如果 4 个数两两不同，则有 $C_{10}^4=210$ 种情况.

综上，该同学共需列出 $10+135+360+210=715$ 种情况.

解法二　转化为求 4 元有序整数组 $(a, b, c, d)(1\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant 10)$ 的数目.

作映射 $f:(a, b, c, d)\mapsto(a, b+1, c+2, d+3)$，那么这个映射 f 是从集合

$$X=\{(a,\ b,\ c,\ d)\mid 1\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant 10\}$$

到集合

$$Y=\{(a',\ b',\ c',\ d')\mid 1\leqslant a'<b'<c'<d'\leqslant 13\}$$

的一一对应(双射)，所以 X 与 Y 元素个数相等.

显然 Y 的元素个数就是$\{1,\ 2,\ \cdots,\ 13\}$的四元子集个数 $C_{13}^{4}=715$，所以欲求的有序数组$(a,\ b,\ c,\ d)$的数目，即所需列出的情况数为 715.

注　解法一充分运用分类讨论与分步讨论的思想，其思路是很清楚的，但所需考虑的情况较多. 解法二则是利用一一对应关系，将问题转化为另一种较便于计算的模式.

在计数问题中常常要用到“对应”的方法. 一般地，若要计算有限集合 X 的元素个数$|X|$，可以考虑与 X 有关系的某个有限集合 Y(其中$|Y|$较易求得)：

如果可以在 X 与 Y 的元素间找到某种一一对应，那么 $|X|=|Y|$；

如果可以证明 X 中的每个元素与 Y 中的 k 个元素构成双向对应关系，那么有 $|X|=k|Y|$；

如果可以证明 Y 中的每个元素与 X 中的 k 个元素构成双向对应关系，那么有 $|X|=\dfrac{1}{k}|Y|$.

此外也可以通过考察单向的对应关系，对$|X|$的上下界进行估计.

例 2　甲乙两队各出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛，双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方的 2 号队员比赛，…，直到有一方队员被淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程. 求所有可能的比赛过程种数.(1988 年全国高中数学联赛试题)

解法一　在每种比赛过程中，不妨让负者按照告负的先后顺序走入一个通道，再让最后一局的胜者连同尚未出战的选手按事先排好的顺序跟进通道. 易见，每种比赛过程一一对应一种通道里的排队方式，使得每队 7 名队员的相对位置与事先排好的出场顺序一致. 这样的排队方式由甲队队员所占的 7 个位置唯一决定，故有 $C_{14}^{7}=3432$ 种排队方式，因此比赛过程种数为 3432.

解法二　设甲队 i 号队员获胜的场数为 $x_i(1\leqslant i\leqslant 7)$，易见，每种使甲队获胜的比赛过程与不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_7=7$ 的非负整数解$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_7)$构成一一对应. 因为方程 $x_1+x_2+\cdots+x_7=7$ 的非负整数解的组数为 $C_{7+6}^{6}=C_{13}^{6}$，故甲队获胜的比赛过程数为 $C_{13}^{6}=1716$. 同理可得，乙队获胜的比赛过程数为 1716. 因此所有可能的比赛过程共 3432 种.

注　上述两种解法均为对应方法，其中解法一将问题最为直接地对应到

一个组合选取问题. 解法二则是通过先建立半数情形与不定方程解的对应关系，最终求得结果. 对不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 而言，其非负整数解组数为 C_{m+n-1}^{n-1}，正整数解组数为 $C_{m-1}^{n-1}(m\geqslant n)$. 这是计数中的两个极为常用的结论(它们本身都可以用对应原理来证明).

例 3 对于数集 M，称 M 中最大数与最小数之和为 M 的“特征”，记作 $m(M)$. 求集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有非空子集的特征的平均数.

解 设 Y 是 X 的子集全体组成的集. 对于 $A\in Y$，令

$$A'=\{n+1-a \mid a\in A\},$$

那么 $A'\in Y$. 所以

$$f: A\mapsto A'$$

是集 Y 到 Y 自身的一一对应(双射).

特征的平均数

$$g=\frac{1}{|Y|}\sum_{A\in Y}m(A)=\frac{1}{2|Y|}\sum_{A\in Y}(m(A)+m(A')).$$

由于 A 中最大数是 A' 中的最小数，且它们的和为 $n+1$，A 中最小数是 A' 中的最大数，它们的和也为 $n+1$. 于是

$$g=\frac{1}{2|Y|}\sum_{A\in Y}2(n+1)=(n+1)\cdot\frac{1}{|Y|}\sum_{A\in Y}1=n+1.$$

注 善于使用配对技巧，常常能使一些表面看来很复杂甚至棘手的问题迎刃而解. 本题中须求“平均数”，我们将 A 与 $A'=\{n+1-a \mid a\in A\}$ 对应(也可以看成一种配对，只不过有时会与自身配对)，从而化简了计算. 这与等差数列求和的精神实质是一样的. 又如在考虑某些集合或排列问题时，可根据问题的特征采取“互补集合对”、“倒序排列”等配对方式，同样十分有效.

例 4 给定绝对值都不大于 10 的整数 a, b, c，三次多项式 x^3+ax^2+bx+c 满足条件 $|f(2+\sqrt{3})|<0.0001$，问：$2+\sqrt{3}$ 是否一定是这个多项式的根？(2007 年中国女子数学奥林匹克试题)

解 将 $2+\sqrt{3}$ 代入得

$$\begin{aligned}f(2+\sqrt{3})&=(2+\sqrt{3})^3+a(2+\sqrt{3})^2+b(2+\sqrt{3})+c\\&=(26+7a+2b+c)+(15+4a+b)\sqrt{3}.\end{aligned}$$

记 $26+7a+2b+c=m$, $15+4a+b=n$，则

$$|m+n\sqrt{3}|=|f(2+\sqrt{3})|<0.0001,$$

又 $m, n \in \mathbf{Z}$,且 $|m| \leqslant 126$, $|n| \leqslant 65$,所以

$$|m-n\sqrt{3}| \leqslant |m|+|n|\sqrt{3}<|m|+2|n| \leqslant 256.$$

故

$$|m^2-3n^2|=|m+n\sqrt{3}|\cdot|m-n\sqrt{3}|<0.0001\times 256<1,$$

又 m^2-3n^2 为整数,所以 $m^2-3n^2=0$,这样只能 $m=n=0$,从而 $f(2+\sqrt{3})=0$,即 $2+\sqrt{3}$ 是这个多项式的根.

注　一般而言,对于数的配对,可以采取相反数、倒数、有理化根式、共轭复数等配对方法.在本题中,将 $m+n\sqrt{3}$ 与其对偶式 $m-n\sqrt{3}$ 配对,利用整数的离散性进行估计,注意 $|m^2-3n^2|$ 若小于1,则必等于0.

例5　对 $n\in\mathbf{N}^*$,记不大于 n 且与 n 互素的所有正整数乘积为 $\pi(n)$,求证:

$$\pi(n)\equiv\pm 1(\bmod n).$$

证明　当 $n=1, 2$ 时,命题显然成立.以下设 $n\geqslant 3$.

设不大于 n 且与 n 互素的正整数构成集合 X_n.

引理:对任意 $t\in X_n$,必有唯一的 $t'\in X_n$,使 $t'\cdot t\equiv 1(\bmod n)$.

证明:由于 t, n 互素,则存在整数 p, q 使 $pt+qn=1$,且此时 p, n 互素.取 $t'\in X_n$ 使 $t'\equiv p(\bmod n)$,可见 $t'\cdot t\equiv 1(\bmod n)$.又假如 $t_1'\cdot t\equiv t_2'\cdot t\equiv 1(\bmod n)$,则 $t_1'\equiv t_1'\cdot t\cdot t_2'\equiv t_2'(\bmod n)$.因此这样的 $t'\in X_n$ 是唯一的.

(1) 当 $t\neq t'$ 时,将 t 与 t' 归为一组.设这样的组共有 i 组,其中每组两数之积 $t'\cdot t\equiv 1(\bmod n)$.

(2) 当 $t=t'$ 时,有 $t^2\equiv 1(\bmod n)$,则 $(n-t)^2\equiv n^2-2tn+t^2\equiv 1(\bmod n)$,故有 $n-t=(n-t)'$.将 t 与 $n-t$ 归为一组(其中 $t\neq n-t$,这是因为当 n 为奇数时显然 $t\neq n-t$,而当 n 为偶数时 t 不能取 $\frac{n}{2}$).设这样的组共有 j 组,其中每组两数之积 $t(n-t)\equiv -t^2\equiv -1(\bmod n)$.

由(1)、(2)可知, X_n 中所有元素经过配对后求积得

$$\pi(n)\equiv 1^i\cdot(-1)^j\equiv\pm 1(\bmod n).$$

综上,对一切正整数 $n(n=1, 2$ 或 $n\geqslant 3)$, $\pi(n)\equiv\pm 1(\bmod n)$.

注　本例采用的实质上是“数论倒数”及“模 n 的相反数”的配对方法.下面再对本题结果作深入一些的讨论.

对 $t\in X_n$,定义 t 关于 n 的阶是 $r_n(t)=r$,其中 r 是使 $t^r\equiv 1(\bmod n)$ 成

立的最小正整数. 注意到 $r_n(t)=1$ 当且仅当 $t=1$，$r_n(t)=2$ 当且仅当 $t=t'\neq 1$，本题的证明揭示了这样的事实：对 $n\geqslant 3$，当 X_n 中 2 阶元个数模 4 余 1 时，$\pi(n)\equiv -1 \pmod n$；当 X_n 中 2 阶元个数模 4 余 3 时，$\pi(n)\equiv 1 \pmod n$. 下面是两个推论：

推论 1 （**Wilson 定理**）：若 p 为素数，则 $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$.

事实上，对 $p=2$ 可直接验证；对任何奇素数 p，$p-1$ 是 X_p 中唯一的 2 阶元，因此 $\pi(p)=(p-1)!\equiv -1 \pmod p$.

推论 2 若 n 为偶数，则 $\pi(2n)\equiv 1 \pmod n$.

事实上，对 $i\in \mathbf{Z}$，i 与 $2n$ 互素当且仅当 i 与 n 互素，且 $n+i\equiv i \pmod n$，故有

$$\pi(2n)\equiv \pi^2(n)\equiv 1 \pmod n.$$

一个比推论 2 稍强些的结果是：若 $4\mid n$，$n\geqslant 8$，则 $\pi(n)\equiv 1 \pmod n$. 这是由于对每个不超过 2 阶的元 $t\in X_n$，$1\leqslant t<\frac{n}{4}$，四个数 t，$\frac{n}{2}-t$，$\frac{n}{2}+t$，$n-t$ 两两不同，可归为一大组，且它们的乘积在模 n 的意义下等于 1. 这也是配对思想的应用.

下面两个例题进一步体现了解题中建立对应的技巧.

例 6 一条直路上依次有 $2n+1$ 棵树 T_1，T_2，…，T_{2n+1}（n 为给定正整数）. 一个醉汉从中间位置的树 T_{n+1} 出发，并按以下规律在这些树之间随机游走 n 分钟：当他某一分钟末在树 T_i（$2\leqslant i\leqslant 2n$）位置时，下一分钟末他分别有 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ 的概率到达 T_{i-1}，T_i，T_{i+1} 位置. 求醉汉 n 分钟末处在每棵树 T_i（$1\leqslant i\leqslant 2n+1$）位置的概率 p_i.

解 不妨认为 $2n+1$ 棵树 T_1，T_2，…，T_{2n+1} 从左到右排列，每两棵树间距为 1 单位. 将“以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右走 0.5 个单位”定义为一次“随机游走”. 根据题目所述的概率分布特征，醉汉每分钟的运动状况恰可分解为两次“随机游走”. 故原问题等价于求醉汉从 T_{n+1} 出发，经 $2n$ 步“随机游走”后处在 T_i 位置的概率 p_i.

对某个 i（$1\leqslant i\leqslant 2n+1$），设从 T_{n+1} 出发经 $2n$ 步“随机游走”到达 T_i 的全过程中，“向右走 0.5 个单位”和“向左走 0.5 个单位”分别有 k 次和 $2n-k$ 次，则

$$n+1+\frac{k-(2n-k)}{2}=i,$$

解得 $k=i-1$，即在 $2n$ 步中 $i-1$ 次向右"游走"，$2n-(i-1)$ 次向左"游走"，而这样的情形共 C_{2n}^{i-1} 种，故所求概率 $p_i=\frac{C_{2n}^{i-1}}{2^{2n}}$ $(1\leqslant i\leqslant 2n+1)$.

注 本例通过"运动分解"的观点，把一个涉及概率分布的较复杂问题对应到一个较简单的组合计数问题. 若先研究 n 较小的情况，猜想出结论，并用递推方法证明，则不如上述方法简洁.

例 7 若数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $\sum\limits_{d|n}a_d=2^n$，证明：$n|a_n$.

证明 由条件易知 a_n 的值唯一确定.

定义一个 0—1 序列是"长为 k 的循环序列"，若它的项数为 k，且可由其前 d 项重复 $\frac{k}{d}$ 次写出来，其中 d 为某个小于 k 且整除 k 的正整数，同时，将 $\frac{k}{d}$ 的最大可能值称为该 0—1 序列的循环次数. 其余的 0—1 序列称为"不循环序列"，并将循环次数定义为 1.

考虑由长为 n 的 0—1 序列组成的集合 S 的元素个数.

一方面，S 的元素个数显然为 2^n.

另一方面，对 S 中所有序列按循环次数分类计数. 显然每个长为 n 的 0—1 序列有确定的循环次数 c，且 c 必须是 n 的正约数，对该正整数 c，记 $d=\frac{n}{c}$. 对每个长为 n 且循环次数是 c 的 0—1 序列，其前 d 项恰好对应一个长为 d 的"不循环序列"；反之亦然. 因此，若将长为 m 的"不循环序列"的个数记为 b_m，则 b_d 等于长为 n 且循环次数是 c 的 0—1 序列的个数. 对所有整除 n 的正整数 d 求和即得 $\sum\limits_{d|n}b_d=2^n$，特别地 $b_1=2=a_1$，根据 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 同样的递推关系可知，对一切正整数 n，均有 $b_n=a_n$.

注意到每个长为 n 的"不循环序列"在允许轮换的情况下恰好对应 n 个两两不同的"不循环序列"，因此 $n|b_n$，从而 $n|a_n$.

注 本题中引入长为 m 的"不循环序列"的个数 b_m，并证明 $b_n=a_n$ 及 $n\mid b_n$，十分巧妙. 证明中有两个关键之处涉及对应的思想方法：一是将长为 n 且循环次数是 c 的 0—1 序列与长为 $d=\frac{n}{c}$ 的"不循环序列"一一对应，得以给出 $\{b_n\}$ 的递推公式，最终证得 $b_n=a_n$；二是将每个长为 n 的"不循环序列"与通过轮换得到的一组"不循环序列"作"1 对 n"的对应，由此说明了 $n\mid b_n$.

例 8 设 a_n 为下述正整数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n，且每位数字只能取 1，3 或 4. 求证：对 $n\in\mathbf{N}^*$，a_{2n} 是完全平方数.（1991 年全国高中数学联赛试题）

证明　记 A 为数码仅有 1，3，4 的数的全体，$A_n=\{N\in A\mid N$ 的各位数码之和为 $n\}$，则 $|A_n|=a_n$. 欲证 a_{2n} 是完全平方数.

再记 B 为数码仅有 1，2 的数的全体，$B_n=\{N\in B\mid N$ 的各位数码之和为 $n\}$，令 $|B_n|=b_n$. 下证 $a_{2n}=b_n^2$.

作映射 f：$B\to\mathbf{N}^*$，对 $N\in B$，$f(N)$ 是由 N 按如下法则得到的一个数：把 N 的数码从左向右看，凡见到 2，把它与后面的一个数相加，用和代替，再继续看下去，直到不能做为止（例如，$f(1\,221\,212)=14\,132$，$f(21\,121\,221)=31\,341$）. 易知 f 是单射，于是

$$f(B_{2n})=A_{2n}\cup A'_{2n-2},$$

其中 $A'_{2n-2}=\{10k+2\mid k\in A_{2n-2}\}$. 所以

$$b_{2n}=a_{2n}+a_{2n-2}.$$

但 $b_{2n}=b_n^2+b_{n-1}^2$（这是因为 B_{2n} 中的数或是由两个 B_n 中的数拼接，或是由两个 B_{n-1} 中的数中间放 2 拼接而成），所以

$$a_{2n}+a_{2n-2}=b_n^2+b_{n-1}^2,\ n\geqslant 2.$$

因 $a_2=b_1^2=1$，由上式便知，对一切 $n\in N$，$a_{2n}=b_n^2$，即 a_{2n} 是完全平方数.

习　题　12

1 在一个圆周上如此选定 n 个点，使得它们两两之间连以弦之后，任何三条弦之间除端点外不交于同一个点，问：这时圆内一共有多少个交点？

2 对于集合 $\{1,2,\cdots,n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 和它的每个非空子集，我们定义“交替和”如下：把集合中的数按从大到小顺序排列，然后从最大的数开始交替地加减各数（例如 $\{1,2,4,6,9\}$ 的交替和是 $9-6+4-2+1=6$，而 $\{5\}$ 的交替和就是 5）. 求所有这些交替和的总和.

3 已知正整数 r、n 满足 $1\leqslant r\leqslant n$，求 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一切 r 元子集中最小数的算术平均值 $f(r,n)$.

4 设 A 是 X 的子集. 若 A 中所有数的和为奇数，则称 A 为 X 的奇子集. 若 A 中所有数的和为偶数，则称 A 为 X 的偶子集.

(1) 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 求 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的奇子集的个数与偶子集的个数；

(2) 对 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，求 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有奇子集的元素和的总和.

5 设 $n\equiv 1 \pmod 4$ 且 $n>1$，$P=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的任意排列，k_P 表示使不等式 $a_1+a_2+\cdots+a_k<a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n$ 成立的最大下标 k. 试对一切可能的不同排列 P，求对应的 k_P 的和.

6 设 n 为大于 2 的正整数，证明：在 $1, 2, \cdots, n$ 中，与 n 互素的数的立方和能被 n 整除.

7 对素数 $p\geqslant 3$，证明：p 整除 $\sum_{k=1}^{p-1} k^{k^2-k+1}$.

8 设 k 是给定的正整数. 证明：若 $A=k+\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}$，则对一切正整数 n，A^n 的整数部分 $[A^n]$ 能被 k 整除.

9 设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系，S 是空间中的有限点集，而 S_1，S_2，S_3 分别是 S 中所有的点在 Oyz，Ozx，Oxy 坐标平面上的投影所成的点集. 求证这些集合的点数之间有如下关系：

$$|S|^2\leqslant |S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|.$$

（1992 年国际数学奥林匹克试题）

13 递推方法

通过建立递归关系解决问题的方法称之为递推方法. 递推方法是探索数学规律和解题思路的重要方法之一，它对几乎所有的数学分支都有着重要作用. 随着计算机的广泛应用，这种方法越来越受到重视. 递推关系是从很多计数问题中产生的，它也是递推方法的数学描述. 利用递推关系计数的一般步骤是：

(1) 用 a_n 表示与 n 有关的欲计数的对象的个数；

(2) 计算一些初始值 a_1，a_2，a_3，…等；

(3) 建立 a_n 与 a_{n-1}，a_{n-2}，…，a_{n-k} 之间的递推关系；

(4) 求解递推关系.

例 1 设 $n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$. 求 1，2，…，n 的满足下列性质的排列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的个数：仅存在一个 $i\in\{1, 2, \cdots, n-1\}$，使得 $a_i>a_{i+1}$.

解 用 p_n 表示具有题设性质的排列的个数，$n\geqslant 2$. 易知，$p_2=1$.

对于 $n\geqslant 3$，若 $a_n=n$，则这样的排列个数有 p_{n-1} 个；

若 $a_i=n$，$1\leqslant i\leqslant n-1$，考虑所有这样的排列，可以从 $n-1$ 个数 1，2，…，$n-1$ 中选 $i-1$ 个数按从小到大的顺序排列成 a_1，a_2，…，a_{i-1}，其余的按从小到大的顺序排列在剩下的位置，于是有 C_{n-1}^{i-1} 种排法，所以

$$p_n=p_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^{i-1}=p_{n-1}+2^{n-1}-1.$$

即

$$p_n-p_{n-1}=2^{n-1}-1,$$
$$p_{n-1}-p_{n-2}=2^{n-2}-1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$p_2-p_1=2-1.$$

把上面这些式子相加，得

$$p_n=(2^{n-1}-1)+(2^{n-2}-1)+\cdots+(2-1)=2^n-n-1.$$

注 在解决一些计数问题时，往往题目并不给出明显表达式，需通过观

察、分析、归纳、猜想、论证等来确定递推关系. 本题中，将 p_n 分类计数，一类与 $n-1$ 个数的情形相联系，另一类可直接计数，从而得到了递推关系.

例 2 对一个边长互不相等的凸 n $(n\geqslant 3)$ 边形的边染色，每条边可以染红、黄、蓝三种颜色中的一种，但是不允许相邻的边有相同的颜色. 问：共有多少种不同的染色方法?

解 设不同的染色法有 p_n 种. 易知 $p_3=6$.

当 $n\geqslant 4$ 时，首先，对于边 a_1，有 3 种不同的染法，由于边 a_2 的颜色与边 a_1 的颜色不同，所以，对边 a_2 有 2 种不同的染法，类似地，对边 a_3，…，边 a_{n-1} 均有 2 种染法. 对于边 a_n，用与边 a_{n-1} 不同的 2 种颜色染色，但是，这样也包括了它与边 a_1 颜色相同的情况，而边 a_1 与边 a_n 颜色相同的不同染色方法数就是凸 $n-1$ 边形的不同染色方法数的种数 p_{n-1}，于是可得

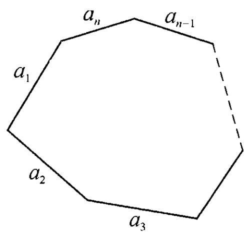


图 13－1

$$p_n=3\times 2^{n-1}-p_{n-1},$$
$$p_n-2^n=-(p_{n-1}-2^{n-1}).$$

于是
$$p_n-2^n=(-1)^{n-3}(p_3-2^3)=(-1)^{n-2}\cdot 2,$$
$$p_n=2^n+(-1)^n\cdot 2.$$

综上所述，不同的染色方法数为 $p_n=2^n+(-1)^n\cdot 2,\ n\geqslant 3$.

注 本例与前一例略有不同，是将计算 p_n 时需扣除的量与 p_{n-1} 建立联系.

例 3 在 $2\times n$ 的方格表的 $2n$ 个方格中，每格用黑、白两色之一染色. 若要求任何两个有公共边的方格不都染黑色，求不同的染色方案的数目.

解 用递推方法. 设满足条件的染色方案共有 a_n 种，其中在第 n 列中均染白色的染色方案共 b_n 种，因而第 n 列染不同色的染色方案数为 a_n-b_n.

当 $n\geqslant 2$ 时，方格表的前 $n-1$ 列一定是 $2\times(n-1)$ 方格表的一种满足要求的染色方案.

当第 $n-1$ 列均染白色时，第 n 列(从上到下，下同)对应有“白白”、“黑白”、“白黑”3 种染色方法；当第 $n-1$ 列染不同色时，不妨设为“黑白”，则第 n 列对应有“白白”、“白黑”2 种染色方法. 因此可建立递推关系：

$$a_n=3b_{n-1}+2(a_{n-1}-b_{n-1})=2a_{n-1}+b_{n-1}.$$

另一方面，$2\times(n-1)$ 方格表的每一种染色方案与 $2\times n$ 方格表每一种第 n 列染“白白”的染色方案一一对应，故 $b_n=a_{n-1}$.

因此 $n\geqslant 3$ 时，有 $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$，又验证知 $a_1=3,\ a_2=7$，故解得

$$a_n=\frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}).$$

注一　递推关系具有形式多样性. 比较多的问题中所利用的是单递推关系，但也有一些是利用多元递推关系. 本题中$\{a_n\}$的递推关系并不明显，因而将染色方案分为“第 n 列中均染白色”与“第 n 列染不同色”两种类型，引入辅助量 b_n 参与递推关系的建立，最后消去 b_n，即得到$\{a_n\}$的递推关系.

注二　与之等价的问题有：

设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$每项均为 0 或 1，且满足

$$a_ka_{k+1}=b_kb_{k+1}=a_kb_k=0\ (k\in\mathbf{N}^*).$$

对给定正整数 n，求 $2n$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的不同的取值方法总数.

例 4　在$(1,2,\cdots,n)$的一个排列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$中，如果 $a_i\neq i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则称这种排列为一个错位排列（也称更列）. 求错位排列的个数 D_n.

解　易知 $D_1=0$，$D_2=1$.

对于 $n\geqslant 3$ 及$(1,2,\cdots,n)$的任意一个错位排列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$中，a_1 可取除 1 以外的任一其他 $n-1$ 个数，设 $a_1=k\ (k\neq 1)$，于是

(1) 如果 $a_k=1$，这种错位排列数等于 $n-2$ 个元素的错位排列数 D_{n-2}；

(2) 如果 $a_k\neq 1$，则这种错位排列就是元素 $1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$ 在第 2 到第 n 这 $n-1$ 个位置上的一个排列，其中 1 不在第 k 个位置，其他元素都不在它自身所标记的位置上，这种排列相当于 $2,3,\cdots,n$ 这 $n-1$ 个元素的一个错位排列，所以共有 D_{n-1}个.

考虑到 $k=2,3,\cdots,n$ 共 $n-1$ 种这样的情况，我们得到

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})\ (n\geqslant 3).\qquad ①$$

令 $E_n=\dfrac{D_n}{n!}$，则 ① 可变形为 $E_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)E_{n-1}+\dfrac{1}{n}E_{n-2}$，所以

$$E_n-E_{n-1}=-\frac{1}{n}\cdot(E_{n-1}-E_{n-2}).\qquad ②$$

反复利用②，并注意到 $E_1=0$，$E_2=\dfrac{1}{2}$，对 $n\geqslant 2$，有

$$\begin{aligned}E_n-E_{n-1}&=\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdot(E_{n-2}-E_{n-3})=\cdots\\&=\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(E_2-E_1)=\frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

由此可得

$$E_n=\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{(-1)^2}{2!},$$

所以

$$D_n=n!\cdot\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

注　这是著名的“错位排列”计数问题的一种递推解法. 在建立递推关系时，对应原理是必不可少的，但有时候需要变通地找出对应关系，例如在上述解法讨论 $a_1=k$，$a_k\neq 1$ 的情况时，把元素 1 暂时视作 k，即对应到2，3，…，n 这 $n-1$ 个元素的一个错位排列.

例 5　一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个，同时在每个顶点处染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同. 问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置方案？（2010 年全国高中数学联赛试题）

解　设满足条件的密码设置方案共 a_n 种，其中，顶点 A_1，A_n 赋值与染色全同的方案有 b_n 种，其全体构成集合 B_n；A_1，A_n 赋值与染色恰有一项相同的方案有 c_n 种，其全体构成集合 C_n，则

$$a_n=b_n+c_n. \qquad ①$$

此外，若不考虑相邻顶点 A_1，A_n 间的赋值与染色是否兼容，首先设置 A_1 位置，有 4 种方式，再依次设置 A_2，…，A_n，各有 3 种方式，根据乘法原理，共$4\times 3^{n-1}$种方式，因此，若将 A_1，A_n 赋值与染色完全不同，但其余任意两个相邻顶点赋值与染色至少有一项相同的设置方式数记为 d_n，则

$$a_n+d_n=4\times 3^{n-1}. \qquad ②$$

对每种密码设置方案，考虑顶点 A_1，A_{n-1}的赋值与染色情况.

（1）若赋值与染色情况全同，这样的情况数为 b_{n-1}，每种情况恰可对应 B_n 中的一个元素及 C_n 中的两个元素（例如，若 A_1，A_{n-1}均为“0 红”，则 A_n 可为“0 红”、“0 蓝”或“1 红”，前者对应 B_n 中的方案，后两者对应 C_n 中的方案）.

（2）若赋值与染色恰有一项相同，这样的情况数为 c_{n-1}，每种情况恰可对应 B_n 中的一个元素及 C_n 中的一个元素（例如，若 A_1 为“0 红”，A_{n-1} 为“1 红”，则 A_n 可为“0 红”、“1 红”，前者对应 B_n 中的方案，后者对应 C_n 中的方案）.

（3）若赋值与染色均不同，这样的情况数为 d_{n-1}，每种情况恰可对应 C_n

中两个元素(例如,若 A_1 为"0 红", A_{n-1} 为"1 蓝",则 A_n 可为"0 蓝"、"1 红").

由此,可建立递推关系

$$b_n = b_{n-1} + c_{n-1}; \tag{③}$$

$$c_n = 2b_{n-1} + c_{n-1} + 2d_{n-1}. \tag{④}$$

由①和③知 $b_n = a_{n-1}$, $c_n = a_n - a_{n-1}$,结合②与④可整理得 $a_n = a_{n-2} + 8 \times 3^{n-2}$,又枚举得 $a_2 = 12$, $a_3 = 28$,所以

$$a_n = \begin{cases} 3^n + 1,\ n = 3,\ 5,\ 7,\ \cdots \\ 3^n + 3,\ n = 4,\ 6,\ 8,\ \cdots. \end{cases}$$

注 本题为 2010 年全国高中数学联赛加试最后一题,标准解法是直接计数,其中涉及组合式的化简. 上述解法为递推方法,虽不算很简洁,但体现了递推的思维特点:为了计算 a_n,可根据解题的实际需要引入一系列辅助量 b_n, c_n, d_n,通过计数原理清楚地列出它们之间的等量关系(如果是 k 个辅助量,等量关系通常应列出 $k+1$ 个),最后消去辅助量便可得到 $\{a_n\}$ 的递推关系.

下面的一些例子说明递推思想的运用不纯然得借助于递推式,而是可以有灵活多样的形式.

例 6 设非负实数数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足:对任意 i, $j \in \mathbf{N}^*$, $|i-j| \in \{2011,\ 2012\}$,都有 $a_i + b_j \leqslant a_i b_j$. 求证:$\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中的所有项不是全大于 1,就是全等于 0.

证明 如果对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,有 a_n, $b_n > 1$,则命题已成立. 以下考虑 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 中存在某项(不妨设为 a_k)小于 1 的情况.

因不等式 $a_i + b_j \leqslant a_i b_j$ 等价于 $(1-a_i)(1-b_j) \geqslant 1$,若 $0 \leqslant a_i < 1$,则

$$1 \geqslant 1 - b_j \geqslant \frac{1}{1-a_i} \geqslant 1,$$

可见不等号均为等号,所以 $a_i = b_j = 0$.

由于 $0 \leqslant a_k < 1$,故令 $(i, j) = (k,\ k+2011)$, $(k,\ k+2012)$,得

$$a_k = b_{k+2011} = b_{k+2012} = 0.$$

再令 $(i, j) = (k-1,\ k+2011)$, $(k+1,\ k+2012)$(若已有 $k=1$ 则省略前者),得

$$a_{k-1} = a_{k+1} = 0.$$

以此类推得

$$a_{k-2} = a_{k-3} = \cdots = a_1 = 0,\ a_{k+2} = a_{k+3} = \cdots = 0,$$

即$\{a_n\}$中每项都是0. 又$\{b_n\}$中已有一项是0，同样递推得$\{b_n\}$中每项都是0. 命题成立.

注　本题的大致求解思路是：若存在某项小于1，先确定它等于0，再充分利用条件证明它的前后相邻项都等于0，再往正向和逆向递推，就说明了所有项都是0. 对另一个数列同理可验证所有项为0.

在同样的求解思路下，本题可将条件中的"2011，2012"推广至更一般的情形：当正整数p，q互素，且不均为奇数时，命题仍能成立.

例7　设n为大于1的奇数，α是$P(x)=(x-1)^n-x^2$的零点，证明$\alpha>2+\frac{1}{n}$.

证明　若$\alpha<1$，由于n为奇数，则$P(\alpha)=(\alpha-1)^n-\alpha^2<0$，矛盾. 所以$\alpha\geqslant 1$.

若$1\leqslant\alpha<2$，则$(\alpha-1)^n<1\leqslant\alpha^2$，故$P(\alpha)<0$，矛盾. 所以$\alpha\geqslant 2$.

若$2\leqslant\alpha\leqslant 2+\frac{1}{n}$，则$(\alpha-1)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<4\leqslant\alpha^2$，故$P(\alpha)<0$，矛盾. 所以$\alpha>2+\frac{1}{n}$.

注　本题是个关于多项式零点分布的问题，但若简单用导数研究$P(x)$的单调性并不足以解决问题，因此我们通过三个步骤来递推讨论零点的范围：先选取第一个范围$\alpha<1$，此时非常容易证明α不是零点，这样就将所需考虑的范围缩小为$\alpha\geqslant 1$，故而为第二步讨论创设了有利条件$\alpha^2\geqslant 1$；对第二个范围$1\leqslant\alpha<2$的选取也是根据同样的策略，这样为第三步创设了条件$\alpha^2\geqslant 4$；到第三步时再发起总攻，把问题完全解决. 这种步步为营、层层推进的做法有利于降低推理难度，有时候反而能更快且干净地解决问题.

在解决某些数学问题时，我们还可采取"递归"的思想方法，粗略地讲，其中包括"回溯"和"递推"两个过程. 例如对某种规模为n的问题，将其降解成若干个规模小于n的问题，依次降解直到问题规模可求；再求出低阶规模的解，逐次代入高阶问题中，直至求出规模为n的问题的解.

例8　一开始桌上放着3堆火柴，其中一堆的根数是另两堆之和. 两人依次轮流做取火柴游戏：游戏者每次任意取走其中一堆，并把余下两堆中的任意一堆分成非空的两堆. 谁无法这样做，就算输了. 证明或否定：先取火柴的一方有必胜策略，并说明理由.

解　若3堆火柴根数分别为$2^{n_1}a_1$，$2^{n_2}a_2$，$2^{n_3}a_3$（其中n_1，n_2，$n_3\in\mathbf{N}$，a_1，a_2，a_3为奇数），那么当n_1，n_2，n_3不全相等时，定义这个状态为W；当$n_1=n_2=n_3$时，定义这个状态为L.

首先说明：在状态 W 下总可以进行游戏的下一步，并且能通过适当的策略得到某个状态 L. 事实上，不妨设 $n_1\leqslant n_2\leqslant n_3$，根据状态 W 的定义，有 $n_1<n_3$，注意此时第三堆火柴多于一根，必能分堆，并且可这样操作：取走第二堆火柴，再将第三堆分成根数为 2^{n_1}，$2^{n_1}(2^{n_3-n_1}a_3-1)$ 的两堆，那么三堆火柴根数可以写成 $2^{n_1}a_1$，2^{n_1}，$2^{n_1}(2^{n_3-n_1}a_3-1)$，其中 a_1，1，$2^{n_3-n_1}a_3-1$ 均为奇数，这是一个状态 L.

其次说明，状态 L 下若能进行操作，则操作后只能得到状态 W. 事实上，在状态 L 下三堆火柴根数可写成 2^na_1，2^na_2，2^na_3（$n\in\mathbf{N}$，a_1，a_2，a_3为奇数）的形式. 假设操作后仍得到一个状态 L，不妨设操作中第三堆火柴未动，那么新的三堆火柴根数必是 2^nb_1，2^nb_2，2^na_3（b_1，b_2，a_3为奇数）的形式，其中 b_1+b_2等于 a_1或 a_2，但这与 a_1，a_2，b_1，b_2 为奇数相矛盾. 故状态 L 操作后必变为状态 W.

最后说明游戏的初始状态为 W. 事实上，假设此时 $2^{n_1}a_1+2^{n_2}a_2=2^{n_3}a_3$ 且为状态 L，即 $n_1=n_2=n_3=n$，则 $a_1+a_2=a_3$，与 a_1，a_2，a_3为奇数矛盾.

考虑到每步操作都将使火柴数减少，故游戏必在有限步内结束，那么综上可知，本题的结论是肯定的，即先取火柴的一方有必胜策略.

注　数学竞赛中常常出现这样的双人博弈问题：博弈是有限的、零和的，对局双方依照规则轮流进行操作，直至判定胜负. 当双方均采取最佳方案时，须确定必胜的一方（有时候是要确定不败的一方）. 此类博弈问题的一般解决步骤为：

(1) 手推小数据，对“胜状态”（即可以采取适当操作使最终获胜的局面）和“负状态”（即无论进行何种操作，对方总能适当操作取胜的局面）作出合理猜测；

(2) 验证从每个胜状态确实可以适当操作得到一个负状态；

(3) 验证从每个负状态无论进行何种操作均只能得到胜状态.

这样就能确定每种初始状态下的胜负结果.

本题改编自 1994 年俄罗斯数学奥林匹克试题. 还可以进一步考虑这样的问题：如果初始状态是 4 堆火柴，其中一堆的根数是另外某两堆之和，那么按照同样规则进行游戏，先取火柴的一方是否仍有必胜策略（本节习题 8 也是一个与之有联系的问题）.

习　题　13

1 在银行的某个窗口前有 12 个人在排队，当该窗口因故关闭时，这 12 个人

都要到另一个窗口重新排队. 要使得这 12 个人中每个人的位置与原来所排的次序相差都不超过 1，问有多少种不同的排队方法？（2005 年瑞典数学奥林匹克试题）

2 A，B 两人轮流掷一个骰子，第一次由 A 先掷，若 A 掷到一点，下次仍由 A 掷. 若 A 掷不到一点，下次换 B 掷，对 B 同样适用规则. 如此依次投掷，记第 n 次由 A 掷的概率为 A_n. 求 A_n.

3 已知 n 位数的各位数字只能取集合$\{1, 2, 3, 4, 5\}$中的元素，设含有数字 5 且在 5 的前面不含 3 的 n 位数个数为 $f(n)$，求 $f(n)$.

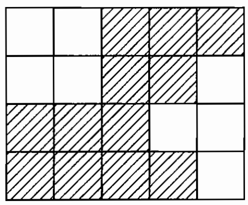
4 试求将如下表达式去括号和合并同类项之后所得的多项式中 x^2 的系数：

$$((\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2-2)^2\text{（共 } n \text{ 重括号）}.$$

5 一副纸牌共 52 张，其中“方块”、“梅花”、“红心”、“黑桃”每种花色的牌各 13 张，标号依次是 2，3，…，10，J，Q，K，A，其中相同花色、相邻标号的两张牌称为“同花顺牌”，并且 A 与 2 也算是顺牌（即 A 可以当成 1 使用）. 试确定，从这副牌中取出 13 张牌，使每种标号的牌都出现，并且不含“同花顺牌”的取牌方法数.

6 设非空集合 $S\subseteq \mathbf{N}^*$ 满足：若 $a, b\in S$（a, b 可以相同），则 $ab+3\in S$. 证明：S 中含有无穷多个 7 的倍数.

7 一个 $m\times n$ 的矩形，每个单位正方形要么被染为黑色，要么被染为白色. 对一个黑色的单位正方形，若在其所在行中，左边有某个单位正方形是白色的，且在其所在列中，上边有某个单位正方形是白色的，则称这个黑色的单位正方形为“搁浅的”. 图中给出的是一个 4×5 的矩形，且没有搁浅的黑格. 求没有搁浅的黑格的 $2\times n$ 的矩形的数目.（2009 年加拿大数学奥林匹克试题）



（第 7 题）

8 桌上放着 4 堆火柴，两人依次轮流做取火柴游戏：游戏者每次任意取走其中一堆，并把余下两堆中的任意一堆分成非空的两堆. 谁无法这样做，就算输了. 假如一开始 4 堆火柴中有 3 堆是 2 根，另一堆是 n 根，求正整数 n 的所有可能值，使先取火柴的一方有必胜策略.

14 染色法

有一些数学问题，例如操作问题、逻辑推理问题等，不便用通常的数学方法来解；还有一些实际问题，研究的是事物的某种状态或性质，其本身与数量无关，也不便用通常的数学方法来解. 这些非常规数学问题可能需要用特定的方法来解决，例如染色法，以及在下一节中将要介绍的赋值法等.

染色法是对问题所研究的对象进行分类的一种形象化的方法. 借助于染色手段，能使比较抽象的组合问题转化为一个具体的染色问题，有利于我们观察、分析对象之间的关系，再通过对染色图形的处理达到对原问题的解决. 常见的染色方式有：点染色、边染色、小方格染色和区域染色等.

下面通过一些例题来说明染色法的应用技巧.

例 1 证明：任意 6 人中，或者有 3 人互相认识，或者有 3 人互不相识.

证明 将 6 个人视为 6 个点 A_1，A_2，…，A_6，两人相识就在对应的顶点间连一条红边，否则就连一条蓝边. 这样构成一个图. 问题转化为证明：该图中必有同色三角形.

考虑 A_1 引出的 5 条边 A_1A_2，A_1A_3，…，A_1A_6，根据抽屉原理，必有 3 条边染有同一种颜色. 不妨设 A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4都染了红色. 若$\triangle A_2A_3A_4$三边均为蓝色，则结论已成立；若$\triangle A_2A_3A_4$三边中有一条红色，不妨设 A_2A_3 为红色，则$\triangle A_1A_2A_3$ 为红色三角形，结论仍成立.

注 这是染色问题中一个经典例子，它存在各种各样的变形. 通过对边进行染色，我们把问题转化为证明图论中一个著名的拉姆赛(Ramsey)型命题：2 色完全图 K_6 中必存在同色三角形.

此外，每条边既已染色，我们还可以从“同色角”(即由两条同色边组成的角)的计数出发，给出另一种证明如下：

设同色三角形个数为 n. 考虑图 K_6 中的同色角个数 S.

一方面，每个同色三角形有 3 个同色角，非同色三角形有一个同色角，所以 $S=3n+(\mathrm{C}_6^3-n)=2n+20$；另一方面，如果一个顶点引出 k 条红边，则它引出 $5-k$ 条蓝边，故以该点为顶点的同色角个数为 $\mathrm{C}_k^2+\mathrm{C}_{5-k}^2$，其最小值为 4，

从而 $S\geqslant 6\times 4=24$. 综合两方面可知 $n\geqslant 2$，即有更强的结论成立：2 色完全图 K_6 中至少有两个同色三角形.

以上的两种证明方法均可以视作证明图的染色问题的典型方法.

例 2　一只内空尺寸是 $6\times6\times6$ 的木箱最多能装多少件尺寸为 $1\times2\times4$ 的长方体货物？

解　如图 14－1，将 $6\times6\times6$ 的木箱分隔成 27 个 $2\times2\times2$ 的"中正方体"，并进行黑白相间染色，这样共有 14 个黑色的、13 个白色的中正方体. 再将每个中正方体分隔成 8 个小正方体，共 216 个小正方体，其中黑色小正方体 112 个，白色小正方体 104 个.

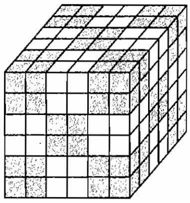


图 14－1

设最多能放 k 件货物. 显然 $k\leqslant\dfrac{216}{8}=27$.

假定 $k=27$，则木箱必被填满而不留空隙，此时每件货物恰好占据 4 个黑色小正方体和 4 个白色小正方体的空间，但黑、白小正方体的总个数不同，故得矛盾. 因此 $k\leqslant 26$.

另一方面又可以放入 26 件货物，只需注意到图中 27 个中正方体可以配成 13 个两两相邻的对(剩下一个黑色的中正方体)，每对提供了 $2\times2\times4$ 的空间，可容下两件货物. 故 $k=26$.

注　本题本身与染色无关，但若就 $1\times2\times4$ 长方体本身的形状作讨论，则难以取得进展. 我们通过染色将木箱的空间进行分类，说明了有一类空间不可能被填满，从而找到了解决问题的捷径.

例 3　有一张 4×8 的方格棋盘. 求证：一只"马"不能从一格出发，遍历这张棋盘的每一方格恰好一次，最后回到原出发点.

证明　假设存在一条满足题目所述条件的"马"的路径，那么不妨将左上角 A 格定为它的出发点，最后它又回到 A 格.

先将棋盘按黑白相间方式染色(如图 14－2，A 在白格). 每步"马"一定从一种颜色的格子跳入另一种颜色的格子，因此"马"奇数步走遍一切黑格，偶数步走遍一切白格.

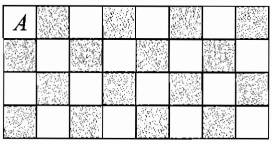


图 14－2

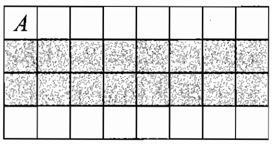


图 14－3

另一方面，若将第 1、4 行染为白色，第 2、3 行染为黑色(如图 14－3)，由

于“马”从白格只能跳入黑格，因此为了遍历每一格后恰好回到出发点，“马”每次在黑格时也必跳向白格，故“马”奇数步走遍一切黑格，偶数步走遍一切白格.

显然两种染色意义下的黑格全体不同，故假设不成立. 从而命题得证.

注　本例使用了两种染色方法. 第一种染色方法与国际象棋棋盘相似，这种黑白相间的染色方法往往称作“自然染色”，在解题中常与配对、奇偶性等有内在关系，可谓一种常规的染色方法；后一种染色方法则体现了求解具体问题的灵活性，可谓非常规方法. 在本题中，我们充分考虑棋盘与棋子的特性，将常规方法与非常规方法配套使用，每种方法各揭示了棋子遍历棋盘过程中的一种不变规律，再相互对比导致矛盾，使命题获证.

例 4　甲、乙两人在一张无限大的方格棋盘上一人一步轮流下棋，甲先走，乙后走，每步棋可将一枚棋子放入任意一个尚未棋子的方格中. 谁先在棋盘上横着或竖着连出 5 枚自己所放的棋子，判谁获胜. 问：甲是否有必胜策略？

解　我们证明乙存在一种使甲无法获胜的策略，因而甲没有必胜策略.

如图 14－4，将棋盘按 2×2 为一“大格”划分，然后将这些大格黑白相间染色.

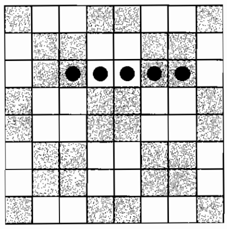
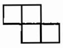
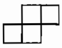


图 14－4

当甲在黑格中放一枚棋子时，乙就在横向相邻的黑格中也放一枚棋子；当甲在白格中放一枚棋子时，乙就在纵向相邻的白格中也放一枚棋子. 在这种策略下，显然当甲每步放棋子后，乙所需放棋子的位置必然空着，故乙的策略可以一直执行下去.

考虑到任何横向连出的 5 枚棋子中必有两枚在相邻黑格中，任何纵向连出的 5 枚棋子中必有两枚在相邻白格中，但这两种情形都被乙破坏，故甲无法获胜.

注　本题类似于“五子棋”游戏，只是斜向连出 5 枚棋子不算获胜，根据下五子棋的经验，不妨大胆预测甲没有必胜策略. 余下的问题是乙究竟怎样阻止甲获胜. 不妨考虑采用配对思想，例如将棋盘自然染色，并把相邻的黑格与白格两两配对，甲每下一子，乙就在旁边配对的位置放一子进行“防守”. 此时，为了兼顾横向和纵向的防守，须适当调整配对的秩序，为此引入“大格”的概念，对大格进行自然染色，在黑格与白格中分别进行“横向配对”与“纵向配对”，在此基础上便能构造出一种使乙不败的策略.

例 5　在一个 10×10 的方格表中有一个由 $4n$ 个 1×1 的小方格组成的图形，它既可被 n 个“”型的图形覆盖，也可被 n 个“”或“”型（可以旋转）的图形覆盖. 求正整数 n 的最小值.（2009 年中国女子数学奥林匹克

试题）

解　首先论证 n 是偶数. 用图 14－5 所示方法将平面网格染色.

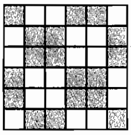
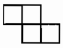
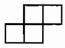


图 14－5

记“”型的图形为 A 形，“”或“”型（可以旋转）的图形为 B 形. 无论 A 形覆盖哪 4 个方格，其中黑格数必是偶数，而对于 B 形则是奇数. 如果 n 是奇数，n 个 A 形所覆盖的黑方格数必是偶数；而 n 个 B 形所覆盖的黑方格数必是奇数，矛盾. 所以 n 必是偶数.

如果 $n=2$，由 2 个 A 形拼成的图形只有如下所示的两种情形，但是它们都不能由 2 个 B 形拼成.

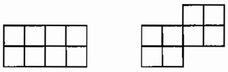


图 14－6

所以，$n\geqslant 4$. 下图是 $n=4$ 时的拼法.

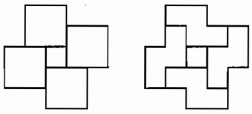


图 14－7

注　本题采用的染色方法与上一题相同，但从不同的角度考察染色的特性，因而解决了一个全然不同的问题.

例 6　平面上有一无穷大的方格棋盘，每格只允许放一枚棋子. 两枚棋子称为“相邻”，是指它们所在的格子有至少一个公共的顶点. 一开始棋子正好摆成一个 9×9 的正方形. 每一步可选择下述两种规则之一进行操作：

（1）如果一枚棋子 X 在水平或垂直方向有相邻的棋子 Y，并且 X 关于 Y 对称的格子是空的，则可在那个空格放一枚棋子，同时取出 X 和 Y 这两枚棋子；

（2）如果一枚棋子 X 没有相邻的棋子，那么可将它取出，并在所有相邻的 8 个格子中同时放上棋子.

问：能否通过有限步操作使棋盘上只剩一枚棋子？

解　结论是否定的.

将棋盘按图中方式分别染上 A，B，C 三种颜色.

对于每步操作，若是按规则(1)操作，则两种颜色的方格所含的棋子数减

少 1，另一种颜色的方格所含的棋子数增加 1；若是按规则(2)操作，不妨设这枚取出的棋子所在格为 A 色，由于 A 色格周围 8 格中恰有 2 个 A 色格，3 个 B 色格，3 个 C 色格，因此操作后 A 色格所含的棋子数增加 1，B 色格与 C 色格所含的棋子数各增加 3. 可见无论哪种操作规则，每步操作后每种颜色的方格所含棋子数的奇偶性都同时改变.

A	B	C	A	B
B	C	A	B	C
C	A	B	C	A
A	B	C	A	B

图 14－8

开始时在 A，B，C 三种颜色的方格内各有 27 枚棋子，其奇偶性相同. 假如若干步后棋盘上只剩一枚棋子，则三种颜色方格内的棋子数肯定分别为 1，0，0，其奇偶性不同，这不可能. 因此无法通过有限步操作使棋盘上只剩一枚棋子.

注　本题中运用“三染色”方法是解题的关键，这样便使操作的不变规律(即三类方格内棋子数总是同时改变奇偶性)直观地显示出来，使分析和处理问题变得明朗. 下面是关于本题的两点补充说明：

(1) 当题目中 9×9 改成一般的 $n\times n$ 时，可以证明当且仅当 n 不是 3 的倍数时，可通过有限步操作使棋盘上只剩一枚棋子(相应的操作步骤可以归纳构造).

(2) 从所采用的染色方法中不难发现，即便放宽规则(1)，允许被操作的棋子 X 与 Y 之间互为“左上——右下”的相邻关系，上述证明同样奏效. 又根据对称性，若规则(1)放宽为允许互为“左下——右上”的相邻关系，那么可将染色方法改为镜像，使证明仍有效. 但若将规则(1)同时作上述两种放宽，那么本题结论将变为肯定的，请读者自行验证.

例 7　15×15 的方格表中有一条非自交闭折线，该折线由若干条连接相邻小方格(两个有公共边的小方格称为相邻小方格)的中心的线段组成，且它关于方格表的某条对角线对称. 证明：这条闭折线的长度不大于 200.

解　显然，折线与对角线相交. 令 A 是一个这样的交点. 我们沿着折线运动，设 B 是第一个再次与对角线相交的点. 由对称性，如果我们沿着折线按另一方向运动，B 仍然是第一个与对角线的交点. 这样折线在 A 与 B 之间已经封闭起来. 这表明折线与该对角线有且只有两个交点.

现在将方格表中的小方格用黑白相间的方式染色，使得对角线上的小方格全为黑色. 注意到沿折线运动时，黑白格交替经过. 因此，经过的黑白格数目相等. 表中黑格比白格多一个. 由于对角线上都是黑格，折线与其中的 13 个不交，故折线至少与 12 个白格不交. 由此，折线的长度不超过 $15^2-13-12=200$.

例 8　已知圆周上有 $3k$（$k\in\mathbf{N}^*$）个分点，它们把圆周分成 $3k$ 段弧，其中长度为 1、2、3 的弧各有 k 条. 求证：这 $3k$ 个分点中必有两点为对径点（即这两点的连线为圆的直径）.（1982 年苏联数学竞赛试题）

证明　将给定的 $3k$ 个分点都染为红色，再将所有长度为 2 的弧段的中点和长度为 3 的弧段的三等分点都染成蓝色. 显然蓝点也是 $3k$ 个. 于是，问题转化为证明：有一对红点为对径点.

假设结论不成立，则红点的对径点都是蓝点. 又由于红点与蓝点一样多，故蓝点的对径点必为红点. 在 $3k$ 段弧中，任取一段长度为 2 的弧$\overset{\frown}{AC}$，则 A，C 为红点，$\overset{\frown}{AC}$的中点 B'是蓝点，因此 B'的对径点 B 是红点.

考察长度为 $3k-1$ 的弧$\overset{\frown}{AB}$，设其上长度为 i 的弧段数目是 n_i（$i=1,2,3$），则有 $n_1+2n_2+3n_3=3k-1$. 因为长度为 1 的弧段的两个端点都是红点，所以它们的对径点都是蓝点. 这两个相邻的蓝点恰好对应了弧$\overset{\frown}{BC}$ 上一条包含它们的长度为 3 的弧，并且这是个一一对应. 从而弧$\overset{\frown}{BC}$ 上长为 3 的弧段数等于 n_1. 另一方面，弧$\overset{\frown}{AB}$ 和弧$\overset{\frown}{BC}$ 上一共有 k 段长度为 3 的弧，所以 $n_3+n_1=k$. 从而

$$2n_2+2n_3=(n_1+2n_2+3n_3)-(n_3+n_1)=(3k-1)-k=2k-1.$$

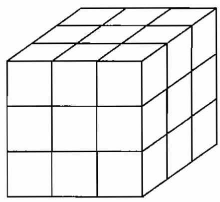
上式左端为偶数而右端为奇数，矛盾.

注　本题借助点的染色使条件和问题转化，有利于我们观察、分析对象间的关系，使证明过程直观具体. 在证明中还涉及了对应原理和奇偶性原理.

习　题　14

1　一张 8×8 的方格表切去对角两个方格，这个缺角的方格表能否用 31 张 2×1 的骨牌覆盖？

2　如右图，把正方体形的房子分割成 27 个相等的小房间，每相邻两个房间（即有公共面的两个小正方体）都有门相通，在中心的那个小正方体中有一只甲虫，甲虫能从每个小房间走到与它相邻的任何一个小房间去. 如果要求甲虫只能走到每个小房间一次，那么甲虫能走遍所有的小房间吗？



（第 2 题）

3　把正三角形划分为 n^2 个同样大小的小正三角形，把

这些小正三角形的一部分标上号码 1，2，…，m，使号码相邻的三角形有相邻边. 求证：$m \leqslant n^2 - n + 1$.

4 用不相交的对角线把凸 n 边形划分成三角形，并且在多边形的每个顶点处汇集奇数个三角形. 证明：$3 \mid n$.

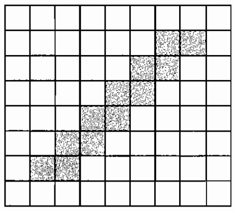
5 有 9 个人，其中任意 3 个人中总有 2 个互相认识. 证明：必存在 4 人，他们相互之间都认识.

6 平面上有 6 个点，每三点的两两连线都组成一个不等边的三角形. 求证：一定可以找到两对三角形，使每对三角形的公共边既是其中一个三角形的最长边，又是另一个三角形的最短边.

7 $9\times9\times9$ 正方体的每个侧面都由单位方格组成，用 2×1 的矩形沿方格线不重叠、无缝隙地贴满正方体的表面，其中会有一些 2×1 的矩形“跨越”两个侧面. 求证：“跨越”两个侧面的 2×1 矩形的个数一定是奇数.（2007 年俄罗斯数学奥林匹克试题）

8 在 8×8 的棋盘的每个方格中任写一个正整数，然后施行以下操作：任取一个 3×3 或 4×4 的正方形“子棋盘”，将其中每个数都加 1. 能否经过有限次操作，使棋盘中每个数字都是 10 的倍数？

9 如图，8×9 的方格表上已经放置了 6 块 1×2 的多米诺骨牌. 问方格表内最多还能放置多少块两两不重叠的多米诺骨牌？（2007 年加拿大数学奥林匹克试题）



（第 9 题）

15 赋值法

赋值法，是对本身与数量无关的问题巧妙地赋于某些适当的数值，将其数学化，然后利用整除性、奇偶性或正负号等的讨论，使问题得以解决的方法.

许多组合问题和非传统的数论问题常用赋值法求解. 注意到染色法中是用颜色对事物分类，赋值法则能以“数”替代“色”，因此一般而言，能用染色法表述和解决的问题都可以用赋值法来处理(不过染色法在表述的形象性等方面有其优势). 赋值法使问题数值化，进一步可使数值参与运算和推证，因而又有其独到的施展空间.

常见的赋值方式有：对点赋值、对线段赋值、对区域赋值以及对其他对象赋值等.

例 1 已知 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 顺次排在一条直线上，每个点染上红色或蓝色之一. 如果线段 $A_iA_{i+1}(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 的两端颜色不同，就称它为标准线段. 已知 A_1 与 A_n 的颜色不同，证明：在 $A_iA_{i+1}(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 中，标准线段的条数为奇数.

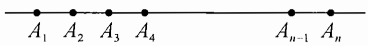


图 15-1

证明 对 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的每一个点 A_i 赋值 a_i：若 A_i 为红色，则 $a_i=1$；若 A_i 为蓝色，则 $a_i=-1$.

设这 $n-1$ 条线段中有 m 条是标准线段，那么

$$(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}a_n)=(-1)^m.$$

另一方面，有

$$(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}a_n)=a_1a_2^2a_3^2\cdots a_{n-1}^2a_n=a_1a_n=-1.$$

所以，$(-1)^m=-1$，故 m 是奇数，即标准线段的条数为奇数.

注 本题解法颇多. 上述解法中，我们通过赋值使问题数值化，并通过数的运算性质简洁而直接地解答了问题. 另一种典型的赋值方法可表述为：对各点 A_i 中的红点赋值 $a_i=0$，蓝点赋值 $a_i=1$，并考察所有线段 A_iA_{i+1}对应

的数值 a_i+a_{i+1} 之和的奇偶性. 这两种赋值方法在相差一个运算级别的意义下是一样的.

例 2　男女生共 n 人围坐一圆桌，规定相邻座为同性时两人中间插一枝红花，异性时两人中间插一枝蓝花. 结果发现所插红花与蓝花数目一样. 证明：n 一定是 4 的倍数.

证明　由于红花和蓝花数目一样，故 n 必为偶数，设 $n=2m$.

取定一人开始，将 n 个人依次记为 $1, 2, \cdots, n$. 给第 i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 个人赋值 x_i，其中对男生令 $x_i=1$，对女生令 $x_i=-1$.

根据条件可知，当 $x_ix_{i+1}=1$ 时，在 $i, i+1$ 两人之间插红花；当 $x_ix_{i+1}=-1$ 时，在 $i, i+1$ 两人之间插蓝花（约定第 $n+1$ 个人就是第 1 个人，$x_{n+1}=x_1$）.

转化为证明这样的结论：若在 x_ix_{i+1} $(1\leqslant i\leqslant n)$ 这 $n=2m$ 个值中，有 m 个 1，m 个 -1，则 m 为偶数.

事实上，此时有 $(-1)^m=\prod\limits_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}=(x_1x_2\cdots x_n)^2=1$，故 m 为偶数. 从而 $n=2m$ 一定是 4 的倍数. 证毕.

注　本题的做法与上一题有所相似. 虽说本题完全可以不用赋值法来分析，但上述讨论实际上建立了一个组合命题与一个数论命题之间的等价性（该数论命题为：若 $x_i\in\{1,-1\}$，$1\leqslant i\leqslant n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}=0$，则 $4\mid n$），从中可以看出赋值法的转化功能.

例 3　把 $1, 2, 3, \cdots, 2004$ 这 2004 个正整数随意放置在一个圆周上，统计所有相邻三个数的奇偶性得知：三个数全是奇数的有 600 组，恰好两个奇数的有 500 组，问：恰好一个奇数的有几组？全部不是奇数的有几组？（2004 年上海市 TI 数学竞赛试题）

解　设恰好 1 个奇数的有 x 组，则全部不是奇数的有

$$2004-600-500-x=904-x.$$

将圆周上的数从某个数开始，依次计为 $x_1, x_2, \cdots, x_{2004}$，令

$$y_i=\begin{cases}-1, & \text{当 } x_i \text{ 为奇数时,}\\ 1, & \text{当 } x_i \text{ 为偶数,}\end{cases}$$

则 $y_1+y_2+\cdots+y_{2004}=0$，再令

$$A_i=y_i+y_{i+1}+y_{i+2}=\begin{cases}-3, & \text{当 } x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \text{ 全为奇数时,}\\ -1, & \text{当 } x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \text{ 恰好 2 个奇数时,}\\ 1, & \text{当 } x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \text{ 恰好一个奇数时,}\\ 3, & \text{当 } x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \text{ 全为偶数时,}\end{cases}$$

其中约定 $x_{2004+i}=x_i(i=1,2)$. 于是

$$0=3(y_1+y_2+\cdots+y_{2004})=A_1+A_2+\cdots+A_{2004}$$
$$=-3\times600-500+x+3(904-x),$$

解得 $x=206$.

恰好一个奇数的有 206 组，全部不是奇数的有 $904-206=698$ 组.

例 4　将 5×7 棋盘用某种规格的若干张纸片覆盖，纸片不许超出棋盘，但可彼此交叠. 考虑下述各种情形，能否找到一种覆盖方式，使得棋盘的每个小方格被覆盖的层数相同？（注：纸片可翻折使用，但纸片的边必须平行于棋盘的边.）

(1) 纸片为 1×3 的规格；

(2) 纸片为“特里米诺”，即 2×2 方格纸去掉一个方格后所余下的图形；

(3) 纸片为“刀把五”，即 2×3 方格纸去掉一个角上方格后所余下的图形.

解　(1) 按图 15-2 对棋盘的每个方格赋值，易见每张 1×3 纸片所覆盖的三数之和为 0，因而无论用多少张纸片，盖住的所有数之和恒等于 0（一个数被盖了几层就计算几次）. 但棋盘上的数字总和为 1，假如被恰好覆盖 k 层，则盖住的数字之和应为 k，因此不存在满足条件的覆盖方式.

2	−1	−1	2	−1	−1	2
−1	−1	2	−1	−1	2	−1
−1	2	−1	−1	2	−1	−1
2	−1	−1	2	−1	−1	2
−1	−1	2	−1	−1	2	−1

图 15-2

(2) 按图 15-3 对棋盘的每个方格赋值，易见每张“特里米诺”纸片所覆盖的三数之和不大于 0，因而无论用多少张纸片，盖住的所有数之和是个非正数. 但棋盘上的数字总和为 1，覆盖 k 层时盖住的数字之和等于正数 k，因此不存在满足条件的覆盖方式.

2	−1	2	−1	2	−1	2
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
2	−1	2	−1	2	−1	2
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
2	−1	2	−1	2	−1	2

图 15-3

−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	4	−1	4	−1	4	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	4	−1	4	−1	4	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

图 15-4

(3) 按图 15-4 对棋盘的每个方格赋值，易见每张“刀把五”纸片所覆盖的五数之和不小于 0，因而无论用多少张纸片，盖住的所有数之和是个非负数. 但棋盘上的数字总和为 −5，覆盖 k 层时盖住的数字之和小于 0，因此不存在满足条件的覆盖方式.

注　本题的 3 个小题都运用赋值法来求解，但由于每种规格的纸片特征不同，所以具体做法也不同. 本题中，棋盘的特性也是重要的. 特别地，在解(2)、(3)两小题时，在图 15－3 和图 15－4 中都是赋以两种不同的值对方格分类，从局部看，这两种分类方式一样(其中的“2”和“4”都是隔行、隔列出现)，但整体上来看，5×7 棋盘边界的特性就影响到赋值后解决问题的可行性. 读者不妨自行试探，仔细体会上述每种赋值方式对具体问题的“针对性”效果. 另外，如果在纸片规格和棋盘规格等方面进行推广，仍有大量问题可以研究.

例 5　如图 15－5 是一个向右和向下无限的表格. 一开始在左上角 A 格内放一枚棋子，此后每一步下棋规则如下：若某格 P 放有棋子，且它的右边相邻格 Q 和下边相邻格 R 都没有棋子，则可将 P 中的棋子去掉，在 Q、R 两格中各放一枚棋子. 证明：无论经过多少步，左上角 3×3 表格中总存在棋子.

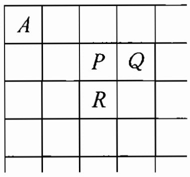


图 15－5

证明　我们对第 i 行第 j 列的格子赋值 $\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}$，$i, j\in\mathbf{N}^*$. 由于

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{i+(j+1)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{(i+1)+j}=\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j},$$

故每步下棋不改变所有棋子所在格的赋值之和，记这个和为 S，其中初始情况下的 $S=\frac{1}{4}$.

假设若干步后，左上角 3×3 表格中不存在棋子，那么此时

$$\begin{aligned}S&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}-\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\cdot\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\\&=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2}=\frac{15}{64}<\frac{1}{4},\end{aligned}$$

矛盾.

故无论经过多少步，左上角 3×3 表格中总存在棋子.

注　本题中通过等比赋值的方式给每个格子一个具体的数值，这种赋值方法以及“$\frac{1}{2}$”这个比值的选用是根据下棋规则而度身定制的，从而在下棋过程中，所有棋子所在格的数值之和是一个不变量. 在赋值法解题时常会遇到这样的情况：需要先明确赋值的目标，再具体问题具体分析(试比较本节习题 4).

例 6　k 个开关顺次排成一行，分别指向上、下、左、右四个方向. 若其中出现三个连续的开关，它们的方向各不相同，则将它们同时调整为第四个方向. 证明：这个操作不能无限次进行下去.（2006 年海湾地区数学奥林匹克试题）

证明　将这 k 个开关依次按 $1, 2, \cdots, k$ 进行编号. 我们按下述方法对第 $n(1 \leqslant n \leqslant k)$ 个开关赋值 $f(n)$：

$n=1$ 时，$f(n)=1$；

$n \geqslant 2$ 时，若第 $n-1$ 个开关和第 n 个开关方向相同，则 $f(n)=n$；若不然，则 $f(n)=1$.

令 $h=f(1)f(2)\cdots f(k)$，显然 $h>0$. 可以证明，随着操作次数的增加，h 是递增的.

事实上，对任意的 $n(1 \leqslant n \leqslant k-2)$，假定本次操作只对第 n，$n+1$，$n+2$ 个开关进行调整，那么在这次操作之前，$f(n) \leqslant n$，$f(n+1)=f(n+2)=1$，$f(n+3) \leqslant n+3$，所以

$$f(n)f(n+1)f(n+2)f(n+3) \leqslant n(n+3).$$

进行操作后，得到 $f'(n) \geqslant 1$，$f'(n+1)=n+1$，$f'(n+2)=n+2$，$f'(n+3) \geqslant 1$.

所以 $f'(n)f'(n+1)f'(n+2)f'(n+3) \geqslant (n+1)(n+2) > f(n)f(n+1)f(n+2)f(n+3)$.

而操作前后第 $i(1 \leqslant i \leqslant n-1$ 或 $n+4 \leqslant i \leqslant k)$ 个开关的值不变，即 $f'(i)=f(i)$.

于是 $h'=f'(1)f'(2)\cdots f'(k) > f(1)f(2)\cdots f(k)=h$.

注意到 h 有界($h \leqslant 1 \times 2 \times \cdots \times k$)，所以 h 只能增长有限次.

所以这个操作只能进行有限次.

注　本题中，如果仅简单地对“方向相同的相邻开关对”进行计数，则无法说明其恒增性. 我们进行适当赋值，构造出“高度函数”h，它是一个恒增量，这就解决了困难. 我们还可以定义其他的高度函数 h. 例如：对第 n 个开关赋值 $f(n)$：若第 n 个开关和第 $n+1$ 个开关方向相反，则 $f(n)=\sqrt{n}$；若不然，则 $f(n)=0$. 定义高度函数 $h=\sum_{n=1}^{k} f(n)$. 可以证明随着操作次数的增加，h 是递减的. 而 $h>0$，所以 h 只能减少有限次，即得证.

读者可以尝试用“凹函数”来构造更多的高度函数 h. 关键是要定义一个正值函数 $f(n)$，且对于所有的 $1 \leqslant n \leqslant k$，满足 $f(n) \cdot f(n+3) < f(n+1) \cdot f(n+2)$，或者 $f(n)+f(n+3) < f(n+1)+f(n+2)$.

例 7　MO 牌足球由若干多边形皮块用三种不同颜色的丝线缝制而成，

有以下特点：

(1) 任一多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块同样长的一条边用一种颜色的丝线缝合；

(2) 足球上每一结点恰好是三个多边形的顶点，每一结点的三条缝线颜色互不相同.

求证：可以在MO牌足球的每一结点上放置一个不等于1的复数，使得每一多边形皮块的所有顶点上放置的复数的乘积都等于1.（1991年中国数学奥林匹克试题）

证明 设这三种颜色为红、黄、蓝.

对每条边进行赋值：红色为1，黄色为ω，蓝色为ω^2，其中$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

对每个结点，若站在结点上往结点处看，三条边的值按逆时针方向依次为$1, \omega, \omega^2$，则在该结点放ω，否则放ω^2，其中$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 我们来验证这样的放法满足题目条件.

对每个多边形皮块，设其顶点依逆时针方向依次为结点$A_1, A_2, \cdots, A_k$，根据边与结点的赋值规则，并注意到

$$\omega=\frac{\omega}{1}=\frac{\omega^2}{\omega}=\frac{1}{\omega^2},\ \omega^2=\frac{\omega^2}{1}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega^2}$$

可知，A_i上的数ω_i总等于$A_{i-1}A_i$的值z_i除以A_iA_{i+1}的值z_{i+1}（其中$i=1, 2, \cdots, k$，约定$A_0=A_k$, $A_{k+1}=A_1$, $z_{k+1}=z_1$）. 从而

$$\omega_1\omega_2\cdots\omega_k=\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{z_2}{z_3}\cdot\cdots\cdot\frac{z_k}{z_1}=1,$$

即这样的放法满足题意. 证毕.

注 本题中的提问是针对结点的，具体处理时则采取了先对边赋值的做法（对三种颜色的边分别赋值$1, \omega, \omega^2$），之后再借助边的值来决定如何对结点赋值. 当然，本题一个很大的难点在于想到可以只用ω和ω^2完成赋值. 如果是这样，本题就相应变成一个较简单的问题，并且也可以等价地表述为：可在MO牌足球的每一结点上放置数字1或2，使得每一多边形皮块的所有顶点上放置的数之和是3的倍数.

例8 设n, k为给定正整数，一开始若干个球被分为n堆，后来它们又被重新分为$n+k$堆（每堆球个数至少为1）. 证明：存在至少$k+1$个球，它们原来所在堆中的球数大于后来所在堆中的球数.

解 设所有球构成有限集合M，并对每个球赋值：若某个球在球数为a

的球堆中，则对它赋值$\frac{1}{a}$. 在这种赋值方式下，每堆球的值之和为 1，因此所有球的值之和等于此时球堆的堆数. 对每个球 $A \in M$，设它先后所在的球堆中球的个数分别是 x_A 和 y_A，记 $d(A)=\frac{1}{y_A}-\frac{1}{x_A}$ 为对球 A 的后一次赋值与前一次赋值之差. 由于

$$\sum_{A\in M} d(A)=\sum_{A\in M}\frac{1}{y_A}-\sum_{A\in M}\frac{1}{x_A}=(n+k)-n=k,$$

且
$$d(A)=\frac{1}{y_A}-\frac{1}{x_A}<\frac{1}{y_A}\leqslant 1,$$

故至少有 $k+1$ 个 $d(A)=\frac{1}{y_A}-\frac{1}{x_A}>0$，即 $x_A>y_A$，从而命题成立.

注　注意到每个球都是球堆中的“一份子”，本题中的赋值具有某种权重的意义：若球堆中的球数为 a，则其所占份额为$\frac{1}{a}$. 于是，先后两次分堆时球堆堆数之差 k，表现为所有球的份额值总和的先后两次之差，而“原来所在球堆中的球数大于后来所在球堆中的球数”可理解为“后来球堆中所占的份额大于在原来球堆中所占的份额”. 在这样的理解下，就化为一个代数问题了.

习　题　15

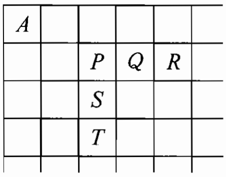
1 有 11 只杯子都杯口朝上放着，然后将它们任意翻偶数只，算作一次操作（翻过的也可以再翻）. 证明：无论操作多少次，不能使 11 只杯子杯口都朝下.

2 已知△ABC 内有 m 个点，连同 A, B, C 三点一共 $m+3$ 个点. 以这些点为顶点将△ABC 分成若干个互不重叠的小三角形. 将 A, B, C 三点分别染成红色、黄色、蓝色. 而三角形内的 m 个点，每个点任意染成红色、黄色、蓝色三色之一. 问：三个顶点颜色都不同的小三角形的个数是奇数还是偶数？

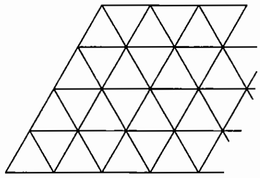
3 正方形 $ABCD$ 分割为 n^2 个相等的小正方形（n 是正整数），把相对的顶点 A, C 染成红色，把 B, D 染成蓝色，其他交点任意染成红，蓝两色之一. 证明：恰有三个顶点同色的小正方形的数目必是偶数.

4 如图是一个向右和向下无限的表格. 一开始在左上角 A 格内放一枚棋子，此后每一步下棋规则如下：若某格 P 放有棋子，且它的右边相邻两格 Q 和 R 都没有棋子，则可将 P 中的棋子去掉，在 Q、R 两格中各放一枚棋

子；同样若 P 的下边相邻两格 S 和 T 都没有棋子，则可将 P 中的棋子去掉，在 S、T 两格中各放一枚棋子. 问：能否在有限步后让所有棋子都不出现在前 4 列中？



（第 4 题）



（第 5 题）

5 如图，平面上由边长为 1 的正三角形构成一个(无穷的)三角形网格. 三角形的顶点称为格点，距离为 1 的格点称为相邻格点.

A、B 两只青蛙进行跳跃游戏. “一次跳跃”是指青蛙从所在的格点跳至相邻的格点. “A、B 的一轮跳跃”是指它们按下列规则进行的先 A 后 B 的跳跃：

规则(1)：A 任意跳一次，则 B 沿与 A 相同的跳跃方向跳跃一次，或沿与之相反的方向跳跃两次.

规则(2)：当 A、B 两所在的格点相邻时，它们可执行规则(1)完成一轮跳跃，也可以由 A 连跳两次，每次跳跃均保持与 B 相邻，而 B 则留在原地不动. 若 A、B 的起始位置为两个相邻格点，问：能否经过有限轮跳跃，使 A、B 恰好位于对方的起始位置上？(2008 年国家集训队试题)

6 将 3000×3000 的正方形以任意方式分割为多米诺骨牌(指 1×2 的矩形)的并. 证明：一定可以用三种颜色对这些多米诺骨牌染色，使得每种颜色的多米诺骨牌的个数都相等，且对每个多米诺骨牌而言，与其同色且相邻的多米诺骨牌的个数不大于 2(两个多米诺骨牌称为相邻的，是指它们各自所含的小方格至少有一个是彼此相邻的). (2006 年俄罗斯数学奥林匹克试题)

16 算两次

“算两次”，也称做富比尼(G. Fubini)原理，是一种非常重要的数学方法. 所谓算两次，就是在解题过程中，以两个方面来考虑(计算、估计)同一个量，从而使问题得以解决. 这种方法的精神实质与“换个角度看问题”是一致的. 其实，“算两次”方法我们并不陌生，譬如列方程解应用题，就是把一个量用两种不同的方法表示出来. 在本书的其他章节(如奇偶性、面积法、染色法等)中，“算两次”的思想已有所涉及，而本节中我们将集中介绍一些算两次的例子和相应技巧.

例 1 证明：$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}=1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1$.

证明 考虑在 $n+2$ 个数 $1, 2, \cdots, n+2$ 中任取 3 个的取法总数 S.

一方面，显然有 $S=\mathrm{C}_{n+2}^{3}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

另一方面，在 $1, 2, \cdots, n+2$ 中，为取三个数 $a, b, c\ (1\leqslant a<b<c\leqslant n+2)$，可先取定 b，其中 $b\in\{2, 3, \cdots, n+1\}$，此后，在 $1, 2, \cdots, b-1$ 中任取一数 a，在 $b+1, b+2, \cdots, n+2$ 中任取一数 c，由乘法原理，这样的数对 (a, c) 的取法数为 $(b-1)(n+2-b)$，所以

$$S=\sum_{b=2}^{n+1}(b-1)(n+2-b)=1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1.$$

综上可知结论成立.

注 这是一个数学归纳法的习题，但注意到等式左端有组合数 C_{n+2}^{3} 的“影子”，因此这里给出的做法是赋予右端一种相匹配的组合解释，以此证明等式. 有相当多的恒等式与不等式可以通过这种组合上的考虑而获得证明，即“组合论证”，这是“算两次”的常用策略之一.

用同样的分析方法可将本题结论推广为更一般的情况：

设 $0<s\leqslant r\leqslant m$，则 $\sum\limits_{k=0}^{m-r}\mathrm{C}_{s+k-1}^{s-1}\mathrm{C}_{m-s-k}^{r-s}=\mathrm{C}_{m}^{r}$ (其中当 $m=n+2$, $r=3$,

$s=2$ 时回到原结论).

例 2 以 $f(n, k)$表示正整数 n 的不小于 k 的约数个数. 求 $\sum\limits_{k=1}^{1000} f(1000+k, k)$.

解 我们证明一般的结论：对 $n \in \mathbf{N}^*$，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+k, k)=2n. \qquad ①$$

对 $n, i \in \mathbf{N}^*$，当 i 是 n 的约数时，令 $g_n(i)=1$；否则令 $g_n(i)=0$，则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(n+k, k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n+k} g_{n+k}(i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} g_{n+k}(i)+\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=n+1}^{n+k} g_{n+k}(i)=A+B. \qquad ②\end{aligned}$$

显然在 i 个相邻整数 $n+1, n+2, \cdots, n+i$ 中，i 恰好是其中一个数的约数，从而交换求和次序得

$$A=\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} g_{n+k}(i)=\sum_{i=1}^{n} 1=n, \qquad ③$$

又当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时，在 $n+1, n+2, \cdots, n+k$ 中仅有 $n+k$ 是 $n+k$ 的约数，故

$$B=\sum_{k=1}^{n} 1=n. \qquad ④$$

将③、④两式代入②，可得①式成立. 从而，$\sum\limits_{k=1}^{1000} f(1000+k, k)=2000$.

注 本例中，观察可知，求和项 $f(1000+k, k)$的取值状况杂乱无章，很难直接计算. 故而不妨将 1000 改为较小的数，从简单情况考虑起，先猜测出形如①式的一般结论. 上述证明过程写得比较形式，实际上可通俗地理解为：考虑满足 $1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n+k \leqslant 2n$，$i \mid n+k$ 的数组$(n+k, i)$的个数，通过转换观点，固定每个 i 来进行计数，即“换序求和”，最终利用剩余类的性质简化了求和计算.

例 3 设 n 是正偶数. 证明在 $n \times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

中找不到一组“1，2，…，n”，它们两两不同行且不同列.

证明 假设有一组“1，2，…，n”，它们两两不同行且不同列.

设这组中的k在第i_k行第j_k列$(1\leqslant k\leqslant n)$，考虑到$n$为偶数，根据假设有

$$\sum_{k=1}^{n} i_k=\sum_{k=1}^{n} j_k=\frac{n(n+1)}{2}\equiv\frac{n}{2}(\bmod n).$$

另一方面，根据该矩阵的特点，总有

$$i_k+j_k-1\equiv k(\bmod n).$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} i_k+\sum_{k=1}^{n} j_k-\sum_{k=1}^{n} 1\equiv\sum_{k}^{n} k(\bmod n),$$

即$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-n\equiv\frac{n}{2}(\bmod n)$，矛盾.

因此矩阵中不可能有一组“1，2，…，n”，它们两两不同行且不同列.

注 在反证法假设下，利用算两次方法得到矛盾，是一种十分常见的证明思路，本题即为一个典型的例子. 很多情况下，在解题中须从整体角度作考虑，对某个量进行“算两次”.

例 4 设n $(n\geqslant 3)$是给定的正整数，对于n个给定的实数a_1，a_2，…，a_n，记$|a_i-a_j|$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$的最小值为$m$. 求在$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$的条件下，上述$m$的最大值.

解 不妨设$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$. 我们从两个方面来估计$S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2$.

一方面

$$S=(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j=n\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2\leqslant n.$$

另一方面，因为$a_2-a_1\geqslant m$，$a_3-a_2\geqslant m$，…，$a_n-a_{n-1}\geqslant m$，所以当$1\leqslant i<j\leqslant n$时，有$a_j-a_i\geqslant(j-i)m$. 于是

$$S\geqslant m^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)^2=m^2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k^2=\frac{m^2}{12}n^2(n^2-1).$$

从上述两个方面知

$$n\geqslant\frac{m^2}{12}n^2(n^2-1),$$

所以
$$m\leqslant\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}.$$

又当 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列时，上述不等式取等号，故 m 的最大值为 $\sqrt{\dfrac{12}{n(n^2-1)}}$.

注　本题结论易猜难证. 与 m 相关的量很多，之所以选择 S 作为“算两次”的量，是因为一方面 S 具有轮换对称性，与条件 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ 的结构相对统一；另一方面，在不失一般性对 a_i 进行排序之后，又可顺利地对 S 作出与 m 有关的下界估计. 两者结合即得出 m 的上界. 因此，解题时如何选择算两次的“量”很重要，“算”有时并不困难，但须注意一定的技巧.

例 5　已知 $n(n\geqslant 2)$ 个有限集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：对任意 $a\in M=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$a$ 至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的两个集合，且对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有 $|A_i\cap A_j|\leqslant 1$. 试求 $|M|$ 的最大值.（注：$|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.）

解　设 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，其中对 $k=1,2,\cdots,m$，a_k 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的 t_k 个集合，$t_k\geqslant 2$.

考虑满足 $a_k\in A_i\cap A_j$ 的 (a_k,A_i,A_j) 的组数 S，其中 $1\leqslant k\leqslant m$，$1\leqslant i<j\leqslant n$.

一方面，先固定 i,j 并对 k 求和，这样的 (a_k,A_i,A_j) 有 $|A_i\cap A_j|$ 组，再对 i,j 求和，并注意到 $|A_i\cap A_j|\leqslant 1$，得
$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|\leqslant\frac{n(n-1)}{2}.$$

另一方面，先固定 k 并对 i,j 求和，这样的 (a_k,A_i,A_j) 有 $C_{t_k}^2$ 组，再对 k 求和，并注意到 $t_k\geqslant 2$，得
$$S=\sum_{k=1}^{m}C_{t_k}^2\geqslant\sum_{k=1}^{m}1=m. \qquad ①$$

结合以上两方面可得 $|M|=m\leqslant\dfrac{n(n-1)}{2}$.

下面构造一个使 $|M|=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的例子：

将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有二元子集记为 $B_1,B_2,\cdots,B_N$，$N=\dfrac{n(n-1)}{2}$，令 $a_k\in A_i$ 当且仅当 $i\in B_k$，$k=1,2,\cdots,N$. 此时每个 $|B_k|=2$，故每个 a_k 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的两个集合；又若 $a_k\in A_i\cap A_j$，则 $i,j\in B_k$，这样的

k唯一，故$|A_i\cap A_j|\leqslant 1$. 该例子满足题意，并且使$|M|=N$.

综上所述，$|M|$的最大值为$\frac{n(n-1)}{2}$.

注　许多关于集合的问题可以从两方面去考虑，一个集合含有哪些元素，一个元素属于哪些集合，然后将这两方面综合起来. 本题中，对于(a_k, A_i, A_j)的数目，先固定集合对，对元素求和；再固定元素，对集合对求和，两者应相等.

上述证明中的①式可换成如下更精细的估计：

$$S=\sum_{k=1}^{m}\frac{t_k(t_k-1)}{2}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}t_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|A_i|,$$

其中最后一步是对满足$a_k\in A_i$的(a_k, A_i)的总数进行换序求和. 如此可得到比原题更强的结论：$\sum\limits_{i=1}^{n}|A_i|\leqslant n(n-1)$，进而通过举例可推知，$\sum\limits_{i=1}^{n}|A_i|$的最大值等于$n(n-1)$.

例6　设A是一个225元集，$A_1, A_2, \cdots, A_{11}$为A的11个45元子集，满足对任意的$1\leqslant i<j\leqslant 11$，$|A_i\cap A_j|=9$. 证明：$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{11}|\geqslant 165$，并给出一个例子使等号成立.（2011年美国数学奥林匹克试题）

证明　设$X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{11}$，$f_i(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in A_i\\ 0, & 若\ x\notin A_i\end{cases}$，$1\leqslant i\leqslant 11$. 显然，$f_i(x)=f_i^2(x)$.

设$d(x)=\sum\limits_{i=1}^{11}f_i(x)$，则$d(x)$表示$x$在$A_1, A_2, \cdots, A_{11}$中出现的次数.

一方面，

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X}d^2(x)&=\sum_{x\in X}\sum_{i=1}^{11}f_i^2(x)+2\sum_{x\in X}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 11}f_i(x)f_j(x)\\&=\sum_{i=1}^{11}\sum_{x\in X}f_i(x)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 11}\sum_{x\in X}f_i(x)f_j(x)\\&=\sum_{i=1}^{11}|A_i|+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 11}|A_i\cap A_j|\\&=11\times 45+2\times \mathrm{C}_{11}^{2}\times 9\\&=1485.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\sum_{x\in X}d^2(x)\geqslant\frac{1}{|X|}\Big(\sum_{x\in X}d(x)\Big)^2=\frac{1}{|X|}\Big(\sum_{x\in X}\sum_{i=1}^{11}f_i(x)\Big)^2$$

$$=\frac{1}{|X|}\left(\sum_{i=1}^{11}|A_i|\right)^2=\frac{(11\times 45)^2}{|X|},$$

所以
$$1485\geqslant\frac{(11\times 45)^2}{|X|},$$
即
$$|X|\geqslant 165.$$

使等号成立的例子如下：

设 A 的元素为：$\{1,2,\cdots,11\}$的所有三元子集及其他任意 60 个元素，一共 $C_{11}^3+60=225$ 个元素.

对 $1\leqslant i\leqslant 11$，设 A_i 的元素为：$\{1,2,\cdots,11\}$ 的所有含 i 的三元子集，则 $|A_i|=C_{10}^2=45$.

对任意的 $1\leqslant i<j\leqslant 11$，$|A_i\cap A_j|=C_9^1=9$. 此时，

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{11}|=C_{11}^3=165.$$

注 与上一题相比较，本题用特征函数 $f_i(x)(1\leqslant i\leqslant 11)$ 来表述元素与集合的关系，其本质仍旧是对(x,A_i,A_j)和(x,A_i)等对象“算两次”. 在举例方面，本题难于上一题. 注意题目中的 225 是一个非本质的量.

例 7 设 S 是平面上的有限点集，任意三点不共线. 对于顶点属于 S 的每个凸多边形 P(这里“凸多边形”包括三角形，且一条线段、一个点和空集也认为分别是凸 2 边形、凸 1 边形和凸 0 边形)，设 P 的顶点数目为 $a(P)$，属于 S 且在 P 的外部的点的数目为 $b(P)$. 证明：对于任意的实数 x，有

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}=1,$$

其中，P 取遍 S 中的所有凸多边形.(第 47 届国际数学奥林匹克预选题)

证明 设 S 中有 n 个点，对于顶点在 S 中的每一个凸多边形 P，设属于 S 且在 P 的内部的点的数目为 $c(P)$，则有 $a(P)+b(P)+c(P)=n$.

记 $1-x=y$，则

$$\begin{aligned}\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}&=\sum_P x^{a(P)}y^{b(P)}=\sum_P x^{a(P)}y^{b(P)}(x+y)^{c(P)}\\&=\sum_P\sum_{i=0}^{c(P)}C_{c(P)}^{i}x^{a(P)+i}y^{b(P)+c(P)-i},\end{aligned}\qquad ①$$

这是关于 x，y 的 n 次齐次多项式.

下面固定 $r\ (0\leqslant r\leqslant n)$，考虑①式中 $x^r y^{n-r}$ 的系数.

任取一个顶点数目 $a(P)$不大于 r 的凸多边形 P，再在 P 内部的 $c(P)$个点中任取 $i=r-a(P)$ 个点. 一方面，这样的取法共有 $\sum\limits_P C_{c(P)}^{r-a(P)}$ 种，其中 $\sum\limits_P C_{c(P)}^{r-a(P)}$

恰好就是① 式中 x^ry^{n-r} 的系数. 另一方面,这样的取法的数目对应着在 S 中取 r 个顶点的取法数目 C_n^r. 这个对应是双射,这是因为 S 中的每个子集 T 有唯一的方法分成两个不交的集合,其中一个是 T 的凸包,另一个是 T 的凸包内部的点.

综合两方面可知,①式中 x^ry^{n-r}的系数 $\sum\limits_P C_{c(P)}^{r-a(P)}=C_n^r$, 于是

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}=\sum_{r=0}^{n}C_n^r x^r y^{n-r}=(x+y)^n=1.$$

注 本题的第一个关键之处是将多项式齐次化,这样做实际上将论证的目标改成了证明恒等式 $\sum\limits_P\sum\limits_{i=0}^{c(P)}C_{c(P)}^i x^{a(P)+i}y^{b(P)+c(P)-i}=(x+y)^n$, 并转而考虑"左右两边各项系数是否相等"的问题. 第二个关键之处是对"S 中取 r 个顶点的取法数"算两次,从而给出一个等量关系,使上述问题得到解决.

本题的结论十分有趣. 又假如题目中"凸多边形"仅指通常意义下的凸多边形(但仍包括三角形),而 $n\geqslant 3$, 那么结果应是如下形式:

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}=1-\sum_{k=0}^{2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

习 题 16

1 证明:不存在一个 17 项的数列,它的每 7 个连续项之和为正,每 11 个连续项之和为负.

2 设 $d(n)$表示正整数 n 的正约数个数,$[x]$表示不大于实数 x 的最大整数,求证:

$$\sum_{k=1}^{n}d(k)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right].$$

3 在某学校里有 b 名教师和 c 名学生. 假设满足下列条件:

(1) 每名教师恰好教 k 名学生;

(2) 对任意两名学生,恰好有 h 名教师教他们两人.

证明: $\dfrac{b}{h}=\dfrac{c(c-1)}{k(k-1)}$.(2004 年香港数学奥林匹克试题)

4 证明:在任何由 12 个人组成的人群中,都可以找出两个人来,使得在其余 10 个中都至少有 5 个人,他们中的每个人都满足下述条件:或者认识开

头的两个人，或者不认识这两个人中的任何一个.

5 由 m 行、n 列非负实数组成的数阵满足每行、每列至少有一项是正数，且如果有一行与一列的交是一个正数，则这行的元素和与这列的元素和相等. 证明：$m=n$.（2006 年加拿大数学奥林匹克试题）

6 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbf{R}$，矩阵 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 满足

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & x_i+y_j\geqslant 0,\\ 0, & x_i+y_j<0.\end{cases}$$

证明：若 $n\times n$ 矩阵 B 的元素为 0 或 1，使得 B 的每一行和每一列的元素之和与 A 的对应的和相等，则 $B=A$.（第 44 届国际数学奥林匹克预选题）

17 逐步调整法

所谓逐步调整法，就是暂固定问题中的一些可变因素，使之不动，研究另一些可变量对求解问题的影响，取得局部成果后，再设法求得整个问题的结果.

逐步调整法的精神可以体现在以下几个方面：

（1）通过调整，使原状态达到某种意义下更优的状态，从而逐步达到最优状态（注意必须以最优状态存在为前提）；

（2）通过调整，将大量一般的情形归结为讨论少数几类特殊的、规则的情形，使问题便于解决；

（3）在按某种条件或要求进行操作时，掌握操作过程中的某种内在规律（如不变性、奇偶性、同余性、连续性、单调性等）进行逐步调整，使之得出某种结论或证实某个命题；

（4）为寻找某种对象，在满足部分限制条件的前提下，通过调整使其余限制条件也得以满足.

下面看一些具体的例子.

例 1 已知 $x_1, x_2, \cdots, x_{40}$ 都是正整数，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{40}=58$，若 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$ 的最大值为 A，最小值为 B，求 $A+B$ 的值.

解 因为把 58 写成 40 个正整数的和的写法只有有限种，故 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$ 的最小值和最大值是存在的.

不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{40}$，若 $x_1>1$，则 $x_1+x_2=(x_1-1)+(x_2+1)$，且

$$(x_1-1)^2+(x_2+1)^2=x_1^2+x_2^2+2(x_2-x_1)+2>x_1^2+x_2^2.$$

所以，当 $x_1>1$ 时，可以把 x_1 逐步调整到 1，这时，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$ 将增大；同样地，可以把 $x_2, x_3, \cdots, x_{39}$ 逐步调整到 1，这时 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$ 将增大. 于是，当 $x_1, x_2, \cdots, x_{39}$ 均为 1，$x_{40}=19$ 时，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$ 取得最大值，即

$$A=\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{39\text{个}}+19^2=400.$$

若存在两个数 x_i，x_j，使得 $x_j-x_i\geqslant 2\ (1\leqslant i<j\leqslant 40)$，则

$$(x_i+1)^2+(x_j-1)^2=x_i^2+x_j^2-2(x_j-x_i-1)<x_i^2+x_j^2,$$

这说明在 x_1，x_2，…，x_{39}，x_{40} 中，如果有两个数的差大于 1，则把较小的数加 1，较大的数减 1，这时，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$ 将减小.

所以，当 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$ 取到最小时，x_1，x_2，…，x_{40} 中任意两个数的差都不大于 1. 于是当 $x_1=x_2=\cdots=x_{22}=1$，$x_{23}=x_{24}=\cdots=x_{40}=2$ 时，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$ 取得最小值，即

$$B=\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{22\text{个}}+\underbrace{2^2+2^2+\cdots+2^2}_{18\text{个}}=94.$$

故 $A+B=494$.

例 2　将 2006 表示成 5 个正整数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 之和. 记 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$. 问：

(1) 当 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 取何值时，S 取到最大值?

(2) 进一步地，对任意 $1\leqslant i$，$j\leqslant 5$ 有 $|x_i-x_j|\leqslant 2$，当 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 取何值时，S 取到最小值? 说明理由.（2006 年全国高中数学联赛试题）

解　(1) 首先这样的 S 的值是有界集，故必存在最大值与最小值. 若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$，且使 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$ 取到最大值，则必有

$$|x_i-x_j|\leqslant 1(1\leqslant i,\ j\leqslant 5). \quad ①$$

事实上，假设①不成立，不妨假设 $x_1-x_2\geqslant 2$. 则令 $x_1'=x_1-1$，$x_2'=x_2+1$，$x_i'=x_i(i=3,4,5)$，有 $x_1'+x_2'=x_1+x_2$，$x_1'\cdot x_2'=x_1x_2+x_1-x_2-1>x_1x_2$. 将 S 改写成

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j=x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5,$$

同时有

$$S'=x_1'x_2'+(x_1'+x_2')(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5.$$

于是有 $S'-S=x_1'x_2'-x_1x_2>0$. 这与 S 在 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 时取到最大值矛盾. 所以必有 $|x_i-x_j|\leqslant 1\ (1\leqslant i,\ j\leqslant 5)$. 因此当 $x_1=402$，$x_2=x_3=x_4=x_5=401$ 取到最大值.

(2) 当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$ 且 $|x_i-x_j|\leqslant 2$ 时，只有

(Ⅰ) 402，402，402，400，400；

（Ⅱ）402，402，401，401，400；

（Ⅲ）402，401，401，401，401

三种情形满足要求.

而后面两种情形是在第一组情形下作 $x_i'=x_i-1$，$x_j'=x_j+1$ 调整下得到的. 根据上一小题的证明可以知道，每调整一次，和式 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$ 变大. 所以在 $x_1=x_2=x_3=402$，$x_4=x_5=400$ 情形取到最小值.

例 3　设 A，B，C 是△ABC 的三个内角. 求 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 的最大值.

解　先暂时固定 A，让 B，C 变动，令 $u=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，那么

$$\begin{aligned}u&=\sin\frac{A}{2}\times\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right).\end{aligned}$$

显然，当 $B=C$ 时，$\cos\frac{B-C}{2}$ 取得最大值 1，从而有

$$u\leqslant\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right).$$

现在考察 A 的变化对 u 的值的影响，易知

$$\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\leqslant\left[\frac{\sin\frac{A}{2}+\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4},$$

所以 $u\leqslant\frac{1}{8}$. 并且当 $A=B=C=60^\circ$ 时取到最大值$\frac{1}{8}$.

注　本题中，第一步是将原始的一般状态 P_0 调整到“$B=C$”这样一种较优的状态 P_1. 实际上此时我们立即能看出当且仅当 $A=B=C$ 时，$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 取最大值，但在初等数学框架下，要承认这点又嫌理由不足，事实上这涉及到连续函数的极限以及最大值必然存在等问题，中学生不易搞清. 于是我们在状态 P_1 下将 u 看成 A 的函数，改用函数方法将 P_1 调整为更优的状态 P_2，即 $A=B=C=60^\circ$. 由于状态 P_2 是上述调整策略下唯一的“终点”，故易知此时原式的取值$\frac{1}{8}$是所求的最大值.

例 4　在△ABC 的内部或边界上找一点 P，使得它到三个顶点距离之和

$f(j)=2n$，即存在一条线段恰好包含S中A_j，A_{j+1}，…，A_{j+3n-1}这$3n$个点，其中$2n$个点为蓝色，n个点为绿色.

注　本例把包含前$3n$个点的线段看作原始状态，每步调整时去掉最前面那个点并添加后面相邻的一个点.调整过程中，$|f(i+1)-f(i)|\leqslant 1$是其内在规律，在①的条件下可证明存在一个时刻，连续$3n$个点中恰有$2n$个蓝色点.

例 7　给定不小于3的正整数n.设圆周上依次写了n个数a_1，a_2，…，a_n（这里约定a_n与a_1也相邻）.现对这n个数做操作.每次操作是：任选两个相邻的数，使它们加上同一个正整数，而其他数不变.求所有n，使得当a_1，a_2，…，a_n是1^2，2^2，…，n^2的任一排列时，都能经过不多于n次操作，使圆周上所有数全相等.

解　设圆内接n边形$A_1A_2\cdots A_n$的顶点A_i对应数a_i（$i=1,2,\cdots,n$），将题目所述的对相邻数字的操作视为对n边形相邻顶点的操作（约定$A_{i+n}=A_i$，$a_{i+n}=a_i$）.

假定经过若干步操作后，所有数都变为S.

当n为偶数时，记A_1，A_3，…，A_{n-1}位置的数之和为P，A_2，A_4，…，A_n位置的数之和为Q，考虑到任何一次操作对P与Q的改变量相同，故不改变$P-Q$的值，而最终时刻$P-Q$等于0，所以初始时刻$P-Q=a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{n-1}-a_n=0$，但若取$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(1^2,2^2,\cdots,n^2)$，则$a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{n-1}-a_n<0$，矛盾！故$n$只能是奇数.

另一方面，当n为奇数时，我们证明更强的结论：无论a_1，a_2，…，a_n取怎样的一组正整数，都能经过不多于n次操作，使n个顶点的数全相等.

若对A_i与A_{i+1}，A_{i+2}与A_{i+3}，…，A_{i+n-1}与$A_{i+n}(=A_i)$各做一次加1的操作，A_i对应的数就增大2，其余数各增大1.称这样的$\frac{n+1}{2}$次操作是对A_i的一组操作.

不妨设$a_j=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.现对$A_i$做$a_j-a_i$组操作，$i=1,2,\cdots,n$，共进行了$\sum\limits_{k=1}^{n}(a_j-a_k)$组操作.操作之后$A_i$对应的数变成

$$a_i+2(a_j-a_i)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(a_j-a_k)=a_i+(a_j-a_i)+\sum_{k=1}^{n}(a_j-a_k)$$
$$=a_j+\sum_{k=1}^{n}(a_j-a_k),$$

显然n个顶点的数全相等.

将这 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_j-a_k)$ 组操作看作 $\frac{n+1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_j-a_k)$ 次"对相邻两数加 1"的操作，再将其中对 A_i，A_{i+1} 的所有 q_i 次操作合并成一次"对 A_i，A_{i+1} 各加上 q_i"的操作，这样总共只有不超过 n 次操作，将这些操作作用于 A_1，A_2，…，A_n 可使 n 个顶点的数变为相同. 所以，n 为奇数时，这个更强的结论成立.

综上所述，满足条件的一切 n 是全体大于等于 3 的奇数.

注 本题中对 n 为奇数与 n 为偶数的情形均使用了调整策略.

当 n 为偶数时，先仔细分析条件，弄清可变的是 n 个数 a_1，a_2，…，a_n 的初始排列顺序，不变的是每次操作前后 $P-Q$ 的值，这就掌握了操作变换过程的内在不变规律，通过适当选取初始排列顺序即可举出反例.

当 n 为奇数时，先忽略"不多于 n 次操作"的限制，并且考虑一个自然且基本的问题：能否做到只调整一个给定位置上的数字，将其变成最小的单位——1？题中所述的"一组操作"恰可达到这样的效果，从而可利用这种操作方式逐步将所有数调整成一样. 最后通过对调整过程的重组，确保"不多于 n 次操作"的限制条件也可以满足.

例 8 已知 a，b，c 为非零有理数，且方程 $ax^2+by^2+cz^2=0$ 有一组不全为零的有理数解 (x_0, y_0, z_0)，求证：对任意 $N>0$，方程 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 必有一组有理数解 (x_1, y_1, z_1)，使得 $x_1^2+y_1^2+z_1^2>N$.

证明 由已知得 $ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=0$，不妨设其中 $x_0\neq 0$，令

$$x=k+tx_0,\ y=ty_0,\ z=tz_0,$$

其中 k，t 为待定有理数，则

$$\begin{aligned}ax^2+by^2+cz^2&=a(k+tx_0)^2+bt^2y_0^2+ct^2z_0^2\\&=ak^2+2akx_0t+t^2(ax_0^2+by_0^2+cz_0^2)\\&=ak^2+2akx_0t,\end{aligned}$$

取 t 使 $ak^2+2akx_0t=1$，即 $t=\dfrac{1-ak^2}{2akx_0}$，可得

$$\begin{cases}x_1=k+tx_0=k+\dfrac{1-ak^2}{2ak},\\ y_1=ty_0=\dfrac{1-ak^2}{2ak}\cdot\dfrac{y_0}{x_0},\\ z_1=tz_0=\dfrac{1-ak^2}{2ak}\cdot\dfrac{z_0}{x_0},\end{cases}$$

是方程 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 的一组有理数解(其中 k 仍为待定参数，但 $k\neq 0$).

由于 $x_1=k+\frac{1-ak^2}{2ak}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2ak}$，取 $k>\max\left\{2\sqrt{n}+1,\ \frac{1}{|a|}\right\}$ 且 k 为有理数，则

$$\frac{k}{2}>\sqrt{N}+\frac{1}{2},\ \left|\frac{1}{2ak}\right|<\frac{1}{2|a|}\cdot|a|=\frac{1}{2},$$

从而 $x_1=\frac{k}{2}+\frac{1}{2ak}>\sqrt{N}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\sqrt{N}$，故对这样一组有理数解 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$，有 $x_1^2+y_1^2+z_1^2>N$.

注　对于本题，想到如何构造出一组有理数解是很关键的，整个解题过程也是先找到构造有理数解 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 的一种策略，再对构造过程进行调整，使限制条件 $x_1^2+y_1^2+z_1^2>N$ 也得以满足. 引入待定参数 k 的目的正是为了留出调整余地，使最终 x_1 的选取仍具有足够的自由度，从而 $x_1^2+y_1^2+z_1^2$ 能取到任意大的值. 事实上，本题是作者由一道陈题添加限制条件 $x_1^2+y_1^2+z_1^2>N$ 所得，上述解法中，若只留有待定参数 t，而平凡地取 $k=1$，即给出原题的一种证明.

例 9　设 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 是集合 X 的 n 个非空子集，且对任意 $i,\ j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，$A_i\cap A_j$ 不是单元集，求证：可把集合 X 的元素分成两类，使每个子集 $A_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的元素不全在同一类中.

证明　因每个子集 A_i 非空，且 $A_i=A_i\cap A_i$ 不是单元集，故 A_i 至少含两个元素.

在集合 X 的某种分类下，若 A_i 的元素只出现在一类中，则称 A_i 为单类集，若 A_i 的元素出现在两类中，则称 A_i 为双类集. 记 t 为 $A_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 中双类集的数目，若 t 能取到 n 则命题得证.

因为 A_1 至少含两个元素，故先将集合 X 的元素分成两类且使 A_1 为双类集，此时 $t\geqslant 1$.

下面证明，对使 $t<n$ 的任意一种分类，经适当调整必可使 t 的值增加.

设集合 X 中 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r$ 在第一类，$x_{r+1},\ x_{r+2},\ \cdots,\ x_n$ 在第二类. 不妨设此时 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_t$ 为双类集，$A_{t+1},\ A_{t+2},\ \cdots,\ A_n$ 是单类集，且 $A_{t+1}=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s\}$，其中 A_{t+1} 至少含两个元素，故 $2\leqslant s\leqslant r$，这也说明第一类元素不少于 2 个.

现将 X 中的元素 x_1 调到第二类，其余元素类别不变，此时集合 X 仍有两类元素，而 A_{t+1} 变成双类集.

若 $A_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 不含元素 x_1，则 A_i 仍为双类集；若 $A_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 含元素 x_1，则根据条件，A_i 与 A_{t+1} 必有除 x_1 之外另一公共元素 $x_j(2\leqslant j\leqslant s)$，故

x_1调到第二类后，A_i 中仍有第一类元素，即 A_i 仍为双类集.

综上，调整之后至少 A_1，A_2，…，A_{t+1} 为双类集，故双类集数目不小于 $t+1$. 经有限次这样的调整后必有 $t=n$，证毕.

注 本题有两个限制条件：条件 A 是“把集合 X 的元素分成两类”，条件 B 是“每个子集 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的元素不全在同一类中”. 解题过程中，先让条件 A 实现，再调整元素的分类，在确保 A 成立的前提下逐步使条件 B 也成立.

习 题 17

1 设非负实数 x_1，x_2，…，x_n 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\frac{1}{2}$，求 $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$ 的最小值.

2 设 x_1，x_2，…，x_{10}是正整数，且满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=49,$$

求 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2$ 的最大值和最小值.

3 把 2006 分成若干个互不相等的正整数的和，且使得这正整数的乘积最大，求出该乘积.

4 设 $\pi(n)$表示不大于 n 的素数的个数. 求证：对任意正整数 n 和非负整数 $k\leqslant\pi(n)$，总存在 n 个连续正整数，其中恰含有 k 个素数.

5 已知条件组 $\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=m,\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-\dfrac{m^2}{n}<2.\end{cases}$

(1) 求所有正整数 n，使条件组对一切正整数 m 都有整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$；

(2) 求一切正整数组 (m,n)，使得条件组存在整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

6 空间中有 1989 个点，其中任意三点不共线，把它们分成点数互不相同的 30 组，在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形，要使这种三角形的总数最大，各组的点数应为多少？(1989 年中国数学奥林匹克试题)

7 设正实数 a，b，c，d 满足 $abcd=1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\geqslant\frac{25}{4}.$$

(2011 年中国女子数学奥林匹克试题)

18 构造法

解题过程中，由于某种需要，要么把题设条件中的关系构造出来，要么将这些关系设想在某个模型上得到实现，要么把题设条件经过适当地逻辑组合而构造出一种新的形式，从而使数学问题获得解决. 在这个过程中，思维的创造活动的特点是"构造"，我们不妨称之为构造性思维，运用构造性思维解题的方法，称为构造法.

构造法解题需要我们有比较全面的知识以及敏锐的直觉，能多角度多渠道地进行联想，将代数、三角、几何、数论等知识相互渗透有机结合.

例 1 证明：不定方程 $x^2+y^2=z^6$ 有无穷多组正整数解.

证明 若有一组正整数组 (a, b, c)，使 $a^2+b^2=c^2$(称为勾股数组)，则两边同时乘以 c^4，可得 $(ac^2)^2+(bc^2)^2=c^6$，即 $x=ac^2$，$y=bc^2$，$z=c$ 为原方程的一组正整数解. 熟知勾股数组 (a, b, c) 有无穷多组，且 c 的值各不相同，所以方程 $x^2+y^2=z^6$ 的无穷多组正整数解.

注 考虑到原方程与不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的结构相似性，很自然会考虑有没有一组勾股数 (a, b, c)，使 $a^2+b^2=c^2$ 且 c 为完全立方数(如 8, 27 等). 虽然这样最终可以找到解，不过数字大毕竟稍微麻烦了点，而且距离得到无穷多解尚缺实质性进展. 干脆我们换条思路：对代数式 $a^2+b^2=c^2$ 进行简单的恒等变形就能造出需要的解了.

甚至我们完全不需要用到勾股数组的无穷性：在等式 $a^2+b^2=c^2$ 的两边乘以 $c^{6k+4}(k\in\mathbf{N})$ 就有 $(ac^{3k+2})^2+(bc^{3k+2})^2=(c^{k+1})^6$ 了，这里 (a, b, c) 可以只取某一组勾股数组，比如 $(3, 4, 5)$，当 k 取遍一切自然数时得到无穷组不同的解.

对证明不定方程存在无穷组解的问题，往往需要我们构造一个与问题密切相关的恒等式，一举达到写出无穷多组解的目的. 但此类问题难度差异比较大，例如，要证明不定方程 $x^3+y^3+1=z^3$ 有无穷多组正整数解，所构造的恒等式可以是 $(9k^3-1)^3+(9k^4-3k)^3+1=(9k^4)^3$，但就不太容易想得到了.

总之解这类问题需要对各种代数式结构的一些理解和直觉. 虽然解题思

路会因人而异，构造过程也有曲折反复，但始终应围绕原方程的结构特征进行构造，一计不成再生一计，只要头脑中不断地有好的想法，就容易成功. 本节习题 1 给出一组问题供读者进一步体会.

构造法并不仅限于构造例子，有时候构造方程、函数、多项式、几何图形或某种算法等，会成为解题中实现转化的关键步骤. 下面举几个这方面的例子.

例 2　实数 a、b、c 满足 $(a+c)(a+b+c)<0$，证明：

$$(b-c)^2>4a(a+b+c).$$

分析　要证明 $(b-c)^2>4a(a+b+c)$，即证明 $(b-c)^2-4a(a+b+c)>0$，联想到一元二次方程根的判别式，进而构造符合条件的二次函数，通过对函数图象和性质的研究，使得问题得以解决.

解　若 $a=0$，则 $c(b+c)<0$，从而 $b\neq c$（否则，$2b^2<0$），于是 $(b-c)^2>0$，命题成立.

若 $a\neq 0$，设二次函数 $y=ax^2+(b-c)x+(a+b+c)$.

令 $x_1=0$，得函数值 $y_1=a+b+c$，令 $x_2=-1$，得函数值 $y_2=2(a+c)$.

因为 $(a+c)(a+b+c)<0$，所以 $y_1y_2<0$，这说明二次函数 $y=ax^2+(b-c)x+(a+b+c)$ 上两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 分别在 x 轴的两侧，由此可见抛物线与 x 轴有两个不同的交点，即方程 $ax^2+(b-c)x+(a+b+c)=0$ 有两个不相等的实数根. 因此 $\Delta=(b-c)^2-4a(a+b+c)>0$，即

$$(b-c)^2>4a(a+b+c).$$

例 3　设 a, b, c 是绝对值小于 1 的实数，证明：$ab+bc+ca+1>0$.

证明　构造函数 $f(x)=(b+c)x+bc+1$，它的图象是一条直线，若能证明函数值 $f(-1)$，$f(1)$ 都大于 0，则以点 $(-1, f(-1))$ 和 $(1, f(1))$ 为端点的线段上的每一点的函数值都大于 0，即对满足 $-1<x<1$ 的每一个 x，都有 $f(x)>0$，从而命题得证.

因为

$$f(-1)=-(b+c)+bc+1=(b-1)(c-1)>0,$$
$$f(1)=(b+c)+bc+1=(b+1)(c+1)>0,$$

所以
$$f(a)=a(b+c)+bc+1>0.$$

例 4　设 $a\geqslant c$, $b\geqslant c$, $c>0$，证明不等式

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leqslant\sqrt{ab}.$$

证明 当 $a=c$ 或 $b=c$ 时，不等式显然成立.

当 $a\neq c$ 且 $b\neq c$ 时，讨论如下：两个正数 x、y 的乘积 xy 可以看成边长为 x 和 y 的矩形的面积，也可以看成直角边为 x 和 y 的直角三角形面积的两倍，于是构造图形，如图 18-1.

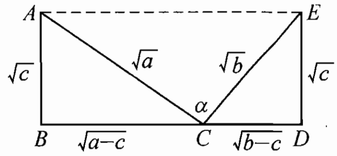


图 18-1

$$AB=DE=\sqrt{c},\ BC=\sqrt{a-c},$$
$$CD=\sqrt{b-c},$$
$$\angle ABC=\angle CDE=\frac{\pi}{2}.$$

设 $\angle ACE=\alpha$，则

$$\begin{aligned}S_{ABDE}&=\sqrt{c}\left(\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}\right)=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CDE}+S_{\triangle ACE}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{c}\sqrt{a-c}+\frac{1}{2}\sqrt{c}\sqrt{b-c}+\frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{b}\sin\alpha\\&\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{c}\left(\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{ab},\end{aligned}$$

所以
$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leqslant\sqrt{ab},$$

于是命题得证.

例 5 设实数 x,y,z 满足 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$，证明：

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z.$$

证明 在直角坐标平面上以原点为圆心作单位圆. 考虑第一象限，在单位圆上取点 A_1,A_2,A_3，使得 $\angle A_1Ox=x$，$\angle A_2Ox=y$，$\angle A_3Ox=z$（如图 18-2 所示).

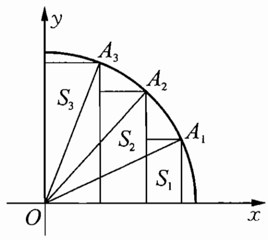


图 18-2

由于三个矩形面积之和 $S_1+S_2+S_3$ 小于 $\frac{1}{4}$ 单位圆的面积，此即

$$\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z<\frac{\pi}{4},$$

整理后便得

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z.$$

注　例4和例5条件中的数量关系能以某种方式与几何图形建立联系或具有明显的几何意义，从而构造图形，将题设条件及数量关系直接在图形中得到实现，然后在所构造的图形中寻求所证的结论.

例6　对任意给定正整数 n，试找出 $2n+1$ 个正整数 $a_i\ (1\leqslant i\leqslant 2n+1)$，使它们成等差数列，且它们的积为完全平方数.

解　取 $a_i=ik\ (1\leqslant i\leqslant 2n+1)$，则 $a_1a_2\cdots a_{2n+1}=(2n+1)!k^{2n+1}$，取 $k=(2n+1)!$ 即可.

注　构造法解题的过程往往蕴含在思维中，书写却可能很简短，不一定能反映出考虑问题的过程.

这个问题可以怎样考虑呢？例如，对任意数列 $\{a_n\}$，若 $a_1a_2\cdots a_{2n+1}=N$，则我们不难说明 $(Na_1)(Na_2)\cdots(Na_{2n+1})=N^{2n+2}=(N^{n+1})^2$ 是完全平方数，而每项乘以一个常数并不改变等差数列的属性，这步调整完全可以放到最后一个环节来完成. 这就拟定了解题框架，余下只要写一个明确无误的过程就行了（读者不妨进一步构造一个正整数等差数列 $\{a_n\}$，使 $a_1a_2\cdots a_{2n+1}$ 等于某个 $N^{2^m}\ (N\in\mathbf{N}^*)$ 的形式，其中 m 为给定正整数）.

先构造出满足部分性质的一个对象再予以调整，这是一种典型的构造思想，在面对一些大型的构造性问题时，这样做往往可以将大问题分解成几个小问题逐步完成，降低构造的难度. 在本节最后，我们特意设置了取材于2009年中国数学奥林匹克第6题的一个习题（见本节习题11），其中每个小题正是原问题构造性解答中的一个环节.

例7　求所有的正整数 n，使得存在非零整数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ y$，满足

$$\begin{cases}x_1+\cdots+x_n=0,\\x_1^2+\cdots+x_n^2=ny^2.\end{cases}$$

（2007年中国西部数学奥林匹克试题）

解　显然 $n\neq 1$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，令 $x_{2i-1}=1,\ x_{2i}=-1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ y=1$，则满足条件.

当 $n=3+2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 时，令 $y=2,\ x_1=4,\ x_2=x_3=x_4=x_5=-1$，

$$x_{2i}=2,\ x_{2i+1}=-2,\ i=3,\ 4,\ \cdots,\ k+1,$$

则满足条件.

当 $n=3$ 时，若存在非零整数 $x_1,\ x_2,\ x_3$，使得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1^2+x_2^2+x_3^2=3y^2,\end{cases}$$

则消去 x_3 得 $$2(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)=3y^2,$$

不妨设 $(x_1, x_2)=1$，则 x_1，x_2 都是奇数或者一奇一偶，从而，$x_1^2+x_2^2+x_1x_2$ 是奇数，另一方面，$2\mid y$，故 $3y^2\equiv 0 \pmod 4$，而 $2(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)\equiv 2 \pmod 4$，矛盾.

综上所述，满足条件的正整数 n 是除了 1 和 3 外的一切正整数.

注　本题中 $n=1$ 只需平凡考虑，对 $n=3$ 的排除也不算困难. 关键在于如何证明其余的正整数 n 满足题意. 此时需要设法将解逐一构造出来.

注意到只要 $|x_1|=|x_2|=\cdots=|x_n|=y$，则 $x_1^2+\cdots+x_n^2=ny^2$ 成立，其中若 n 为偶数，那么只要各个 x_i 中一半取正数，一半取负数，就构造成功了. 而在 $n\geqslant 5$ 且为奇数的情形下，我们进行小范围的试探，仍能给出一般的构造方法.

本题中所运用的这种分类构造策略，既简洁完整地做到了对所有情形的验证，又避免了统一构造欠缺灵活的一面.

例 8　正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2006}$（可以有相同的）使得 $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \cdots, \frac{a_{2005}}{a_{2006}}$ 两两不相等. 问：$a_1, a_2, \cdots, a_{2006}$ 中最少有多少个不同的数？（2006 年中国数学奥林匹克试题）

解　若 $a_1, a_2, \cdots, a_{2006}$ 中出现 n 个互不相同的数，那么这些正整数两两间所产生的不同比值不多于 $n(n-1)+1$ 个（其中，相等的两数产生比值 1），为保证条件满足，必有 $n(n-1)+1\geqslant 2005$，可知 $n>45$.

下面构造一个例子，说明 $n=46$ 可以取到.

设 $p_1, p_2, \cdots, p_{46}$ 为 46 个互不相同的素数，构造 $a_1, a_2, \cdots, a_{2006}$ 如下：

$p_1, p_1,$

$p_2, p_1,$

$p_3, p_2, p_3, p_1,$

$p_4, p_3, p_4, p_2, p_4, p_1,$

……

$p_k, p_{k-1}, p_k, p_{k-2}, p_k, \cdots, p_k, p_2, p_k, p_1,$

……

$p_{45}, p_{44}, p_{45}, p_{43}, p_{45}, \cdots, p_{45}, p_2, p_{45}, p_1,$

$p_{46}, p_{45}, p_{46}, p_{44}, p_{46}, \cdots, p_{46}, p_{34},$

这 2006 个正整数满足要求.

所以 $a_1, a_2, \cdots, a_{2006}$ 中最少有 46 个互不相同的数.

注 本题是一个典型的离散最值问题，解答分为两个部分，一是估计出 n 的范围 $n>45$，二是通过构造具体例子表明范围中最极端的值 $n=46$ 可以实现.

数学竞赛中的最值问题覆盖代数、几何、组合等方方面面，其中有些变量的上、下界并不能用经典的求最值方法求得，此时，构造一个例子或一个反例本身就解决了题目的一半，这样的情况在组合最值问题及离散最值问题中是极为多见的. 甚至有时候一个本质的例子对解决另一半问题还具有启发性. 构造法的价值由此可见一斑.

例 9 求证：对每个正整数 m，平面内存在一个有限非空点集 S，具有如下性质：对于任意一点 $A\in S$，在 S 中与点 A 距离为 1 的点恰有 m 个.

证明 对 m 用数学归纳法.（1971 年国际数学奥林匹克试题）

当 $m=1$ 时，取长为 1 的线段的两个端点构成点集 S 即可.

假设 $m=k$ 时命题成立，即存在点集 S_k，对任意 $A\in S_k$，恰有 S_k 中 k 个点到点 A 距离为 1.

以 S_k 中的每个点为圆心作半径为 1 的圆，这些圆两两之间的交点是有限个，设它们构成集合 T_k，那么 $S_k\cup T_k$ 中任意两点的连线的方向只有有限个. 任取一个方向 $\vec{d}$ 不属于这有限个方向，将 S_k 沿 $\vec{d}$ 平移一个单位得到点集 S_k'.

由 $\vec{d}$ 的取法不难验证：一方面 $S_k\cap S_k'=\varnothing$；另一方面，两点 $A\in S_k$ 和 $A'\in S_k'$ 之间距离为 1 当且仅当 A' 是由 A 平移所得.

当 $m=k+1$ 时，令 $S_{k+1}=S_k\cup S_k'$. 对任意 $A\in S_{k+1}$，不失一般性，设 $A\in S_k$，根据归纳假设，恰有 S_k 中的 k 个点与它距离为 1，又 S_k' 中恰有一点与它距离为 1，故 S_{k+1} 中恰好有 $k+1$ 个点与 A 的距离为 1. 因此 $m=k+1$ 时命题成立.

由数学归纳法知，对任意正整数 m，平面内存在满足题意的点集.

注 本题用的是归纳构造方法. 由于 m 不是具体数值，而且点集不易直接构造，那么先把最简单的 $m=1$ 的情形构造出来，再通过适当平移点集后取并集（有点像把自己和自己的影子合起来）的手法实现归纳过渡.

一般地，对一个与正整数 n 有关的命题，可以从 n 等于某个 n_0 开始，先构造出满足题意的对象 $P(n_0)$，然后假设 $P(n)$ 已经构造出来，证明 $P(n+1)$ 也能被构造出来，当然在具体问题中，这个证明可以是构造性的，也可以是非构造性的.

例 10 对任何正整数 n，证明恒等式：$\sum\limits_{k=0}^{n}2^kC_n^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}=C_{2n+1}^n$.（1994 年中国数学奥林匹克试题）

证法一 （构造函数方法）

考虑函数 $f(x)=(1+x)^{2n+1}$. 一方面，需证等式右边显然是 $f(x)$ 的 n 次项系数.

另一方面，

$$f(x)=(1+x)(1+2x+x^2)^n=(1+x)\sum_{k=0}^{n}C_n^k(1+x^2)^{n-k}(2x)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n}2^kC_n^k(1+x)(1+x^2)^{n-k}x^k,$$

当 $n-k$ 为偶数时，$(1+x)(1+x^2)^{n-k}$ 中 x^{n-k} 的系数为 $C_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}$；

当 $n-k$ 为奇数时，$(1+x)(1+x^2)^{n-k}$ 中 x^{n-k} 的系数为 $C_{n-k}^{\frac{n-k-1}{2}}$.

所以对 $k=0,1,\cdots,n$，在 $2^kC_n^k(1+x)(1+x^2)^{n-k}x^k$ 中 x^n 的系数总是 $2^kC_n^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$.

从而 $f(x)$ 的 n 次项系数为 $\sum\limits_{k=0}^{n}2^kC_n^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$.

综合两方面可得：$\sum\limits_{k=0}^{n}2^kC_n^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}=C_{2n+1}^n$.

证法二　（构造计数模型方法）

设有 n 对夫妻，一个导游，共 $2n+1$ 人到甲乙两地游玩，其中 n 人去甲地，$n+1$ 人去乙地.

一方面，分配方案显然为 C_{2n+1}^n 种.

另一方面，我们将所有分配方案按 n 对夫妻中恰有 $k\ (k=0,1,\cdots,n)$ 对分开游玩进行分类计数.

对给定的 $k\ (0\leqslant k\leqslant n)$，先从 n 对夫妻中选取 k 对分开游玩的，其中每对中谁去甲地各有 2 种可能，所以安排这 $2k$ 个人的方案有 $2^kC_n^k$ 种.

对其余 $n-k$ 对夫妻和一个导游，若 $n-k$ 为偶数，则必有 $\frac{n-k}{2}$ 对夫妻去甲地；若 $n-k$ 为奇数，则必有 $\frac{n-k-1}{2}$ 对夫妻外加导游去甲地，选择方案总是 $C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 种.

由乘法原理可知：n 对夫妻中恰有 k 对分开游玩的情况总数为 $2^kC_n^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$.

对 $k=0,1,\cdots,n$ 求和即知 $\sum\limits_{k=0}^{n}2^kC_n^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}=C_{2n+1}^n$.

注　构造函数与构造模型是数学中经常使用的方法，前者主要是通过构造函数，把原问题的求解转化为对所作函数性质的研究；后者则是将原问题中的条件、数量关系在某个模型上实现并得到一种解释，从而转化为对模型

上相应问题的考察，其中，所构造的计数模型常常取材于一些通俗易懂的虚构情景(例如与日常生活有关).

运用构造法解题，能使代数、三角、几何等各种知识相互渗透，有利于提高分析问题和解决问题的能力.

习题 18

1 试构造恒等式证明下述不定方程均有无穷多组正整数解：

(1) $x^2+y^2+1=z^2$；

(2) $2x^2+2y^2+1=z^2$；

(3) $x^2+y^2+1=2z^2$.

2 求方程组

$$\begin{cases}x^3+y^3+z^3=x+y+z,\\ x^2+y^2+z^2=xyz\end{cases}$$

的所有正实数解.

3 设 $x\in\mathbf{R}$，求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-12)^2+16}$ 的最小值.

4 已知 $x, y\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，$a\in\mathbf{R}$，且满足

$$\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\ 4y^3+\dfrac{1}{2}\sin 2y+a=0,\end{cases}$$

求 $\cos(x+2y)$ 的值.

5 实数 α 与 β 满足 $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1$，$\beta^3-3\beta^2+5\beta=5$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

6 解方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k=n\ (k=1, 2, \cdots, n)$.

7 (1) 能否将集合$\{1, 2, \cdots, 96\}$表示为它的 32 个三元子集的并集，且三元子集的元素之和都相等?

(2) 能否将集合$\{1, 2, \cdots, 99\}$表示为它的 33 个三元子集的并集，且三元子集的元素之和都相等?(2008 年中国女子数学奥林匹克试题)

8 能否用 2009 种颜色将所有正整数如下染色：

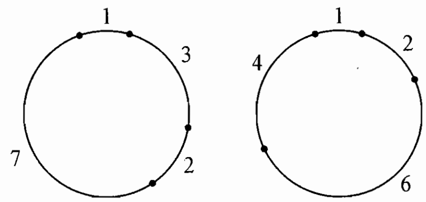
(1) 每种颜色的数都有无穷多个；

(2) 不存在三个两两不同色的正整数 a, b, c，满足 $a=bc$?(2009 年俄罗斯数学奥林匹克试题)

9 证明：存在无穷多组正整数(m, n)，使得$\frac{n+1}{m}+\frac{m+1}{n}$是一个整数.（2007年英国数学奥林匹克试题）

10 对于周长为n（$n\in\mathbf{N}^*$）的圆，称满足如下条件的最小的正整数P_n为“圆剖分数”：如果在圆周上有P_n个点$A_1, A_2, \cdots, A_{P_n}$，对于$1, 2, \cdots, n-1$中的每一个整数$m$，都存在两个点$A_i, A_j$（$1\leqslant i, j\leqslant P_n$），以$A_i$和$A_j$为端点的一条弧长等于$m$；圆周上每相邻两点间的弧长顺次构成的序列$T_n=(a_1, a_2, \cdots, a_{P_n})$称为“圆剖分序列”. 例如：当$n=13$时，圆剖分数为$P_{13}=4$，如图所示，图中所标数字为相邻两点之间的弧长，圆剖分序列为$T_{13}=(1, 3, 2, 7)$或$(1, 2, 6, 4)$.

求P_{21}和P_{31}，并各给出一个相应的圆剖分序列.（2006年东南地区数学奥林匹克试题）



（第10题）

11 给定整数$n\geqslant 3$. 用$f(x)$表示有限数集X中元素的算术平均.

(1) 证明：存在n元正整数集S_1，满足对任意两个不同的非空集$A, B\subseteq S_1$，$f(A)$和$f(B)$是两个不相等的正整数；

(2) 若集合S_1满足(1)中的条件，证明：对给定正整数$K>\max\limits_{A_1\subseteq S_1}f(A_1)$及任意$x\in\mathbf{N}^*$，集合$S_2=\{K!x\alpha+1 \mid \alpha\in S_1\}$满足：对任意两个不同的非空集$A, B\subseteq S_2$，$f(A)$与$f(B)$是两个互素的整数；

(3) 证明：在(2)的基础上，可适当选择一个正整数x，使S_2进一步满足：对每个非空集$A\subseteq S_2$，$f(A)$为合数.

19 不变量与恒增(减)量

我们经常会遇到这样一些量，它们经过运动、操作、变换后保持不变，这样的量称为不变量. 俗话说“万变不离其宗”. 变化的是现象，不变的是本质. 不变量方法就是通过寻找某种不变的本质来解决问题.

在具体解题过程中，不变量可以在和、差、积、商、平方和、倒数和等运算结构中寻找，也可以考虑正负、奇偶性、同余等一些方面. 此外，很多染色与赋值的问题实际上也是通过对某些事物分类或赋予一些数值，从中发现某种不变规律(参考第 14 节和第 15 节).

先看 3 个简单的例子.

例 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 是非零实数. 证明：行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = a_1a_5a_9 + a_2a_6a_7 + a_3a_4a_8 - a_1a_6a_8 - a_2a_4a_9 - a_3a_5a_7$$

这六项中，至少有一项是负数，且至少有一项是正数.

证明 这六项 $a_1a_5a_9$, $a_2a_6a_7$, $a_3a_4a_8$, $-a_1a_6a_8$, $-a_2a_4a_9$, $-a_3a_5a_7$ 的乘积为

$$-(a_1a_2\cdots a_9)^2 < 0.$$

所以其中必有奇数个负项. 从而结论成立.

例 2 在黑板上写有 97 个数：$\frac{48}{k}$ $(k=1, 2, \cdots, 97)$，每次可任意选择两个数 a, b，将它们擦去，用 $2ab-a-b+1$ 代替，这样经过 96 次操作后，黑板上还剩下一个数，问：这个数是多少？

解 因为

$$2ab-a-b+1 = 2\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2},$$

所以，当 a 或 b 为 $\frac{1}{2}$ 时，得到的数还是 $\frac{1}{2}$，即黑板上这个 $\frac{1}{2}$ 是不会消失的（在操作过程中的不变量）. 由于 $\frac{48}{96}=\frac{1}{2}$，所以，最后剩下的数是 $\frac{1}{2}$.

例3　若干名立场不坚定的人对某一问题有两种相反的意见. 他们在辩论桌上围坐一圈，按逆时针次序轮流发言表明立场. 如果一个人发现他的朋友中大多数与他意见相反，他就改变立场，转而发言支持相反的意见，否则他就表明原来的立场. 求证：经过若干轮发言之后，这些人均不再改变立场.（注：朋友关系是相互的，且不改变.）

证明　考察所有意见相反的朋友对数目. 每当一名立场不坚定的人改变立场时，他的意见便与大多数朋友相同，因此意见相反的朋友对数目严格减小. 由于开始时意见相反的朋友对的数目是有限的，所以不可能有某个人无限次改变立场，从而若干轮发言之后，这些人均不再改变立场.

注　在例 1 中，关键的一点就是：无论 a_1，a_2，…，a_9 中有多少个正数，多少个负数，所给的六项的乘积总是负数. 这就是一个不变量.

在例 2 中，$\frac{1}{2}$ 是不会消失的，是在操作过程中的不变量.

在例 3 中，我们所考虑的是一种广义的“不变量”——“恒增（减）量”. 在不变量方法中，所谓“不变量”并不仅限于恒定的量，更广泛地说，也可以指变化着的量，只要这种“变化”具有某种“不变的规律”. 本题中，“意见相反的朋友对数目”这个量具有单调性，就是一个“不变量”.

利用“恒增（减）量”，乃至一般地，利用某种不变的规律解题是十分常见的，同时也是技巧性较高的一个方面.

例4　设直线上一开始从左到右依次写有 1，2，…，2011 这 2011 个数. 可以对相邻位置的三个数 a，b，c 进行这样的操作：把 (a, b, c) 换成 (b, c, a). 证明：无论怎样操作，不可能使直线上的数从左到右依次是 2011，2010，…，2，1.

证明　对 $(1, 2, \cdots, 2011)$ 的每一个排列 $P=(a_1, a_2, \cdots, a_{2011})$，称 (a_i, a_j) 是 P 的一个“逆序对”，如果有 $i<j$，$a_i>a_j$. 将 P 的逆序对个数称为逆序数，记作 $I(P)$.

根据该定义，若在排列 P 中选取相邻三个数 a，b，c 进行操作，得到另一个排列 P'，则必有 $I(P')\equiv I(P)\pmod 2$. 事实上，对

$$P=(\cdots, a, b, c, \cdots),\ P'=(\cdots, b, c, a, \cdots),$$

若 (a, b)，(a, c) 中有 k 个是 P 的逆序对，则 (b, a)，(c, a) 中有 $2-k$ 个是 P' 的逆序对. 其余的数对是 P 中的逆序对当且仅当是 P' 中的逆序对，因此

$$I(P')-I(P)=k-(2-k)\equiv 0(\bmod 2).$$

由于对 $P_0=(1,2,\cdots,2011)$ 与 $P_1=(2011,2010,\cdots,1)$，分别有

$$I(P_0)=0,\ I(P_1)=\frac{2011\times 2010}{2}\equiv 1(\bmod 2),$$

所以不能通过操作使 P_0 变为 P_1. 证毕.

注 “逆序对”和“逆序数”是排列问题中常会涉及的概念，考虑逆序数的变化规律(如单调性、奇偶性、增量具有何种上界等)往往成为解题的关键. 本题中我们用到的是逆序数的奇偶性这个不变量.

关于逆序数，一个基本且重要的结论是：若 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不等，则任取其中两个数对换位置后，排列的逆序数奇偶性改变.

特别地，只需注意依次作 $(a,b)\to(b,a)$ 和 $(a,c)\to(c,a)$ 这两个对换恰好可将 (a,b,c) 换成 (b,c,a)，本题中逆序数的奇偶不变性就能轻易获得.

例 5 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$, $b_1=2$,

$$a_{n+1}=\frac{1+a_n+a_nb_n}{b_n},\ b_{n+1}=\frac{1+b_n+a_nb_n}{a_n},$$

证明：$a_{2008}<5$.（2008 年俄罗斯数学奥林匹克试题）

证明 由已知得

$$1+a_{n+1}=\frac{(1+a_n)(1+b_n)}{b_n},\ 1+b_{n+1}=\frac{(1+a_n)(1+b_n)}{a_n},$$

且根据递推关系显然有 $a_n,b_n>0$，故当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+a_{n+1}}-\frac{1}{1+b_{n+1}}\\&=\frac{b_n-a_n}{(1+a_n)(1+b_n)}\\&=\frac{(1+b_n)-(1+a_n)}{(1+a_n)(1+b_n)}\\&=\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+b_n},\end{aligned}$$

这表明 $\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+b_n}$ 是不变量. 以下有

$$\frac{1}{1+a_{2008}}>\frac{1}{1+a_{2008}}-\frac{1}{1+b_{2008}}=\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{1+b_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

所以 $a_{2008}<5$.

注 具体问题中，数量关系及变化形式可能多种多样，要从中寻找出微妙的不变性并加以利用，须对问题进行透彻的分析，同时也离不开一定的解题经验.例如在本题中，有一定解题经验的读者首先会想到在递推式两边加1，而此后拟定计划时就有几个选择，要做进一步的盘算.如能注意到取倒数并作差后所出现的裂项的结构特征，便能发现不变量$\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+b_n}$.一旦抓住这个不变量并加以利用，问题就迎刃而解了.

例 6 设二次三项式 $f(x)$ 可以用 $x^2 f\left(\frac{1}{x}+1\right)$ 或者 $(x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)$ 来代换.问：能否利用上述的代换，把设二次三项式 x^2+4x+3 变为 $x^2+10x+9$?

解 答案是否定的.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$，其判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

对于第一种代换：$x^2 f\left(\frac{1}{x}+1\right)=(a+b+c)x^2+(b+2a)x+a$，其判别式

$$\Delta_1=(b+2a)^2-4(a+b+c)a=b^2-4ac;$$

对于第二种代换：$(x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)=cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)$，其判别式

$$\Delta_2=(b-2c)^2-4c(a-b+c)=b^2-4ac,$$

从而，这两个代换不改变二次三项式的判别式(即判别式是不变量!).

因为 x^2+4x+3 的判别式为 $4^2-4\times 3=4$，而 $x^2+10x+9$ 的判别式为 $10^2-4\times 9=64$，故通过上述的代换，不能把二次三项式 x^2+4x+3 变为 $x^2+10x+9$.

例 7 已知数列

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 3,\ \cdots$$

中，每一项等于它前面 6 项之和的末位数字.证明：在这个数列中不存在连续的 6 项依次是 0, 1, 0, 1, 0, 1.

证明 将这个数列中每连续的 6 项 $x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w$ 对应于数

$$2x+4y+6z+8u+10v+12w$$

的个位数字.例如对于开始的六项 1, 0, 1, 0, 1, 0,对应的数是

$$2\times1+4\times0+6\times1+8\times0+10\times1+12\times0=18$$

的个位数字 8.

如果 x, y, z, u, v, w, r 是顺次的 7 项，那么 y, z, u, v, w, r 所对应的数 B 与 x, y, z, u, v, w 所对应的数 A 应满足：

$$\begin{aligned}B-A&=(2y+4z+6u+8v+10w+12r)-(2x+4y+6z+8u+10v+12w)\\&=12r-2(x+y+z+u+v+w)\equiv12r-2r\equiv0\pmod{10}.\end{aligned}$$

所以，在每一项换成它后面一项时，连续 6 项所对应的数保持不变，即对于这个数列，每连续 6 项所对应的数永远是 8.

假如 0, 1, 0, 1, 0, 1 能作为这个数列中的连续 6 项，这时对应的数为

$$2\times0+1\times1+6\times0+8\times1+10\times0+12\times1=24$$

的个位数字 4，不等于 8. 所以数列中不存在连续 6 项依次是 0, 1, 0, 1, 0, 1.

注　本题递推阶数较高，不宜从数列的周期性着手，又若从模周期性（例如奇偶性）考虑，并不能推出矛盾. 因此不妨设出一个具有 $ax+by+cz+du+ev+fw$ 形式的不变量，其中 a 至 f 为待定的整数.

注意到若 $r\equiv x+y+z+u+v+w\pmod{10}$，则有

$$\begin{aligned}&(ay+bz+cu+dv+ew+fr)-(ax+by+cz+du+ev+fw)\\&\equiv(f-a)x+(a+f-b)y+(b+f-c)z\\&\quad+(c+f-d)u+(d+f-e)v+ew\pmod{10},\end{aligned}$$

因此，适当地取整数 a 至 f，使 x, y, z, u, v, w 前的系数均被 10 整除，即可构造出这样的不变量. 本题便是通过这样的不变量证明了结论.

例 8　如图 19-1 所示，圆形的水池被分割为 $2n$ ($n\geqslant5$) 个“格子”. 我们把有公共隔墙（公共边或公共弧）的“格子”称为相邻的，从而每个“格子”都有三个邻格.

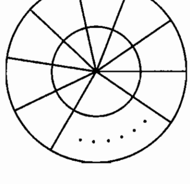


图 19-1

水池中一共跳入了 $4n+1$ 只青蛙，青蛙难于安静共处，只要某个“格子”中有不少于 3 只青蛙，那么迟早一定会有其中 3 只分别同时跳往三个不同邻格. 证明：只要经过一段时间之后，青蛙便会在水池中大致分布均匀.

所谓大致分布均匀，就是任取其中一个“格子”，或者它里面有青蛙，或者它的三个邻格里都有青蛙.（2005 年中国数学奥林匹克试题）

证明　我们把一个格子中出现一次 3 只青蛙同时分别跳向三个邻格的事件称为该格子发生一次“爆发”. 而把一个格子或者是它里面有青蛙，或者是

它的三个相邻的格子里面都有青蛙，称为该格子处于“平衡状态”.

容易看出，一个格子一旦有青蛙跳入，那么它就一直处于“平衡状态”. 事实上，只要不“爆发”，那么该格子中的青蛙不会动，它当然处于“平衡状态”；而如果发生“爆发”，那么它的三个邻格中就都有青蛙，并且只要三个邻格都不“爆发”，那么它就一直处于“平衡状态”；而不论哪个邻格发生“爆发”，都会有青蛙跳到它里面，它里面就一定有青蛙，所以它一直处于“平衡状态”.

这样一来，为证明题中断言，我们就只要证明：任何一个格子都迟早会有青蛙跳入.

任取一个格子，把它称为 A 格，把它所在的扇形称为 1 号扇形，把该扇形中的另一个格子称为 B 格，我们要证明 A 格迟早会有青蛙跳入.

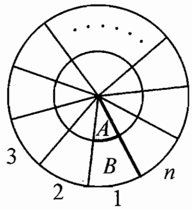


图 19 - 2

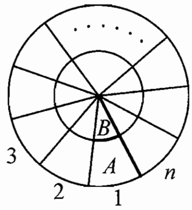


图 19 - 3

按顺时针方向依次将其余扇形接着编为 2 至 n 号. 首先证明 1 号扇形迟早会有青蛙跳入. 假设 1 号扇形中永无青蛙到来，那么就不会有青蛙越过 1 号扇形与 n 号扇形之间的隔墙. 我们来考察青蛙所在的扇形编号的平方和. 由于没有青蛙进入 1 号扇形(尤其没有青蛙越过 1 号扇形与 n 号扇形之间的隔墙)，所以只能是有 3 只青蛙由某个 k $(3\leqslant k\leqslant n-1)$ 号扇形分别跳入 $k-1$，k 和 $k+1$ 号扇形各一只，因此平方和的变化量为

$$(k-1)^2+k^2+(k+1)^2-3k^2=2,$$

即增加 2. 一方面，由于青蛙的跳动不会停止(因为总有一个格子里有不少于 3 只青蛙)，所以平方和的增加趋势不会停止；但是另一方面，青蛙所在扇形编号的平方和不可能永无止境地增加下去(不会大于$(4n+1)n^2$)，由此产生矛盾，所以迟早会有青蛙越过 1 号扇形与 n 号扇形之间的隔墙，进入 1 号扇形.

我们再来证明 1 号扇形迟早会有 3 只青蛙跳入. 如果 1 号扇形中至多有两只青蛙跳入，那么它们都不会跳走，并且自始至终上述平方和至多有两次变小(只能在两只青蛙越过 1 号扇形与 n 号扇形之间的隔墙时变小)，以后便一直持续不断地上升，从而又重蹈刚才的矛盾. 所以 1 号扇形迟早会有 3 只青蛙跳入.

如果这 3 只青蛙中有位于 A 格的，那么 A 格中已经有青蛙跳入；如果这

3 只青蛙全都位于 B 格，那么 B 格迟早会发生“爆发”，从而有青蛙跳入 A 格.

注　除了不变量方法，本例中同时运用了化归、抽屉原理（用于保证青蛙的跳动不会停止）等解题思想方法.

习　题　19

1 已知三个数 5，12，18. 每一次操作是从这三个数中任意选出两个 a，b，并用 $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$，$\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ 代替它们. 问：是否能进行有限次操作，使得得到的三个数为 3，13，20？

2 对于黑板上的 100 个数 1，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{100}$，每次任意选定两数 a，b 擦去，同时补上 $a+b+ab$，共操作 99 次，求最后剩下的那个数.

3 在平面上画一个 4×4 的方格表，在这些小方格的每一个中都任意地填入 1 或 -1. 下面的一种改变填入数字的方式称为一次操作：对任意一个小方格，凡是与此小方格有一条公共边的所有小方格（不包括此小方格本身）中的数作连乘积，于是每取一格，就算出了一个数. 在所有小方格都取遍后，再将这些算出的数放入相应的小方格中. 问：对任意的一种初始填表方式，是否能经过有限次操作后，使得所有小方格中的数都变为 1？

4 某岛上生活着 45 条变色龙，其中有 13 条灰色的，15 条褐色的，17 条紫色的. 每当两条颜色不同的变色龙相遇时，它们就一起都变为第三种颜色. 问：能否经过一段时间，45 条变色龙全都变为同一颜色？

5 在直角坐标系中，有 4 个筹码放在整点上，一个筹码按照如下规则移到新位置：它的原位置和新位置的中点必须有另外一个筹码. 问：是否存在确定的移动步骤，使放在 $(0,0)$，$(0, 1)$，$(1, 0)$，$(1, 1)$ 的筹码移到 $(0,0)$，$(1, 1)$，$(3,0)$，$(2, -1)$ 上？（2008 年德国数学奥林匹克试题）

6 有一个 $n\times n$ 的方格表，先允许从中任意选择 $n-1$ 个方格染成黑色，再逐步地将那些至少与两个已染黑的方格相邻的方格也染为黑色. 证明：不论怎样选择最初的 $n-1$ 个方格，都不能按这样的法则染黑所有的方格.

7 在一块已写有一个正整数的黑板上进行如下操作：若 x 已写在黑板上，则可以在黑板上写上数 $2x+1$ 或 $\frac{x}{x+2}$. 已知在某个时刻黑板上写有数

2008. 证明：黑板上原有的数是 2008.（2008 年俄罗斯数学奥林匹克试题）

8 桌上有 2009 枚硬币，将其一面染上白色，另一面染上黑色. 起初，将所有硬币排成一排，其中一枚硬币黑面朝上，其余 2008 枚硬币均白面朝上. 按如下规则操作：每一次操作中，选择一枚黑面朝上的硬币，并翻转与其相邻的两枚硬币；若所选的黑面朝上的硬币在这一排硬币的两端，则只需翻转与端点相邻的那一枚硬币. 请找出初始状态时那枚黑面朝上的硬币的所有可能位置，使得经过若干次操作后，所有的硬币均黑面朝上.（2009 年韩国数学奥林匹克试题）

20 图论方法

图论是以图为研究对象，研究顶点和边组成的图形的数学理论和方法，起源于著名的哥尼斯堡七桥问题. 图论中的图是指由若干个不同的顶点及连接其中某些顶点的边所构成的图形，通常用 G 表示，或者更确切地记作 $G(V, E)$，其中 V 是所有顶点的集合，E 是所有边的集合. 图 G 中，顶点的位置以及边的曲直长短都是无关紧要的，我们所关心的是图 G 中顶点和边的组成状况.

图论有一套庞大的概念系统，下面列举的是其中最基本的概念以及一些本节中会涉及到的概念：

如果图 G 的两个顶点 v_1，v_2 之间有边相连，则称 v_1，v_2 **相邻**，否则称 v_1，v_2 **不相邻**.

如果一条边的两端是同一顶点，这样的边称为**环**.

如果两个顶点之间有 $k\ (k \geqslant 2)$ 条边相连，那么这些边称为**重边**.

若一个图既没有环也没有重边，这样的图称为**简单图**.

每两个顶点均相邻的简单图称为**完全图**.

有 n 个顶点的图称为 **n 阶图**. 其中 n 阶完全图记为 K_n.

顶点数和边数都有限的图称为**有限图**，否则称为**无限图**.

图 G 中，与顶点 v 相邻的边数（环作两条边计算）称为顶点 v 的**度**（或者**次数**），记做 $d(v)$. 若顶点的度是奇数，则称为**奇顶点**，否则称为**偶顶点**.

若图中的边不考虑起点和终点，则称为**无向图**，否则称为**有向图**（有向图有**出度**和**入度**的概念）. 如无特别说明，一般的图都指无向的简单图.

在图 G 中，一个由不同的边组成的序列：e_1，e_2，…，e_m（其中 $e_i=(v_{i-1}, v_i)$，$i=1, 2, \cdots, m$）称为从 v_0 到 v_m 的**链**，其中 v_0 和 v_m 称为这条链的端点，数 m 称为这条链的长. 如果一条链的两个端点重合，则称这条链为**圈**.

如果对图的任何两个顶点 u，v，都存在一条链以 u，v 为端点，这样的图称为**连通图**.

关于图 G 的顶点和边数之间的关系，有如下定理.

定理　图 G 中边数的两倍等于顶点度数之和.

设 G 中 n 个顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$,边数为 e,则

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)=2e.$$

证明　所有顶点的度的和 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ 表示以顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 中某个顶点为端点的边的总数. 由于一条边有两个顶点,所以图 G 中每条边在和 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ 中被计数了两次. 即证.

这个定理通常称为握手引理:如果许多人在一起握手,那么握手次数为偶数次,从而握过奇数次手的人有偶数个. 即得推论

推论　图 G 中奇顶点的个数一定是偶数个.

一笔画,就是纸上给定一个图 G,能否从图 G 的一个顶点出发,笔不离开纸,而且连续地沿着每条边恰好一次,然后回到原来顶点,从而画出整个图 G. 如果图是欧拉图,则可以一笔画出整个图 G,否则不能. 欧拉给出过一个图是否是欧拉图的判别方法.

一笔画定理　一个连通图为欧拉图的充要条件是每个顶点的度都是偶数.

由此可以推出,一个图可以一笔画的充要条件是没有奇顶点或者两个奇顶点. 如果有两个奇顶点,那么这两个奇顶点是一笔画的起始点和结束点.

本节所选的大多数例题和习题本身并非图论问题,但我们采用图论方法求解,旨在反映图论应用的广泛性与灵活性.

例 1　n 名选手进行网球对抗赛,每名选手至多赛一场,每场比赛两名选手参加,已赛完 $n+1$ 场. 证明:至少有一名选手赛过三次.

证明　把 n 名选手用 n 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 表示,当且仅当 v_i, v_j 所代表的两名选手比赛过时,令 v_i, v_j 相邻,于是得到一个含 n 个顶点的简单图. 由于总共赛过 $n+1$ 场,所以图 G 的边数是 $n+1$. 由定理知

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)=2(n+1),$$

如果图 G 中所有顶点的度都不超过 2,则由上式得到

$$2(n+1)=d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)\leqslant 2n,$$

这不可能. 因此图 G 中至少有一个顶点 x,它的度至少是 3. 于是,顶点 x 所表示的选手至少赛过三次.

例 2　设 $S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上的点集,其中 $n\geqslant 3$. 若任意两点之间的距离不小于 1,证明:距离恰好等于 1 的点对不超过 $3n$ 对.

证明　取这 n 个点为顶点,两顶点相邻当且仅当它们之间距离为 1,得图 G.

对每个 $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$，G 中和顶点 x_i 相邻的点在以 x_i 为圆心、1 为半径的圆周上. 由于 S 中任意两点间距离不小于 1，故圆周上至多含有 S 中的 6 个点，所以 x_i 的度数 $d_i\leqslant 6$.

设 G 的边数为 e，则有

$$2e=d_1+d_2+\cdots+d_n\leqslant 6n,$$

即 G 的边数 e 不超过 $3n$. 所以距离等于 1 的点对不超过 $3n$ 对.

注　这里我们利用图论方法证明组合几何命题. 此外，如果从凸包的角度考虑，不难将题目中的上界 $3n$ 加强为 $3n-6$.

例 3　空间中的 n 条直线满足任意三条中必有两条异面，且不存在 3 条两两异面的直线，求 n 的最大可能值.

解　首先证明 $n\leqslant 5$.

假设存在 6 条直线满足题意，将这 6 条直线 l_i 对应到 6 个顶点 v_i $(1\leqslant i\leqslant 6)$，当 l_i 与 l_j 共面时，在 v_i, v_j 间连一条红边；当 l_i 与 l_j 异面时，在 v_i, v_j 间连一条蓝边，构成一个 2 色完全图 K_6. 由 Ramsey 定理可知，2 色完全图 K_6 中必存在同色三角形，这说明有 3 条线两两共面或两两异面，但均与已知条件矛盾！故假设不成立. 因此 $n\leqslant 5$.

当 $n=5$ 时，如图 20-1 作正方体 $ABCD-EFGH$，记 EH 中点为 M，易验证直线 AB, BF, FH, HM, MA 满足题意.

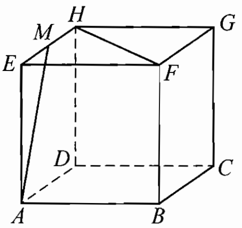


图 20-1

综上，n 的最大可能值为 5.

注　本题中，若只从空间形态来考虑问题将不胜其烦，而一旦转化成图论语言，回到了拉姆赛(Ramsey)问题这一图论中的重要背景(参考第 14 节例 1)，解题目标就变得十分明确了.

下面的例 4 和例 5 分别是“赋值法”和“算两次”中的习题.

例 4　已知△ABC 内有 m 个点，连同 A, B, C 三点一共 $m+3$ 个点. 以这些点为顶点将△ABC 分成若干个互不重叠的小三角形. 将 A, B, C 三点分别染成红色、黄色、蓝色. 而三角形内的 m 个点，每个点任意染成红色、黄色、蓝色三色之一. 问：三个顶点颜色都不同的小三角形的个数是奇数还是偶数?

证明　按这样的方法构造一个图 G：在△ABC 外及每个小三角形内各取一点代表它们所在的区域，这些点构成图 G 的顶点集合；当两个顶点 u, v 所在区域有一条公共边，且公共边端点是红、黄两种颜色时，在 u, v 间连一条边.

一个具有颜色红、黄、蓝顶点的小三角形对应于图 G 中度为 1 的顶点，其

余小三角形均对应 G 中度为 0 或 2 的顶点，而$\triangle ABC$ 外部顶点 u 的度是 1. 由于图 G 中奇顶点的个数必为偶数，所以除了 u 之外奇顶点的个数为奇数，因此三个顶点颜色都不同的小三角形的个数是奇数.

注　很多问题转化为图论问题后，能以图论中比较完整的理论体系作依托来解题(前面的例 3 就是这方面的典型). 本题从奇偶分析入手，运用了有限图中“奇顶点的个数为偶数”这个熟知的结论，简单明了地解决了问题.

例 5　在某学校里有 b 名教师和 c 名学生. 假设满足下列条件：

(1) 每名教师恰好教 k 名学生；

(2) 对任意两名学生，恰好有 h 名教师教他们两人.

证明：$\dfrac{b}{h}=\dfrac{c(c-1)}{k(k-1)}$. (2004 年香港数学奥林匹克试题)

证明　构造一个图 G：G 含有两组顶点 A，B，其中每个老师对应 A 中的一个顶点，每个“学生对”对应 B 中的一个顶点，若某位老师正好教某一学生对，则在 A，B 相应顶点之间连一条边.

由(1)得，A 中每个顶点与 B 中 C_k^2 个顶点相邻，故 G 共有 $b\cdot C_k^2$ 条边.

由(2)得，B 中每个顶点与 A 中 h 个顶点相邻，故 G 共有 $C_c^2\cdot h$ 条边. 从而 $b\cdot C_k^2=C_c^2\cdot h$，即

$$\frac{b}{h}=\frac{c(c-1)}{k(k-1)}.$$

注　本题运用模型化思想，构造图的模型来阐述问题. 上述图 G 的两组顶点中，每组内不存在相邻顶点，这样的图称为 **2 部图**或**偶图**. 从每组顶点出发，对 2 部图的边数从两方面计数，即得到我们所需要的恒等式.

例 6　34 对选手参加双人舞比赛，赛前，某些选手互相握手. 同一对的两人不握手. 后来，某男选手问其他 67 名参赛选手他们与人握手的次数，得到的答案都不相同. 问：该男选手的搭档女选手和多少人握过手？

解　用 68 个顶点顶点表示 68 个参赛选手. 对于顶点 u，v，当且仅当 u，v 所表示的两名选手握过手时，令它们相邻，于是得到一个 68 个顶点的简单图 G.

由于同一对的两名选手不握手，所以对任意顶点 u，$d(u)\leqslant 66$.

设某男选手为 x. 图 G 中除顶点 x 外尚有 67 个点，由题意，它们的度各不相同，因此必有一个点 v 满足 $d(v)=0$，即 G 中没有一个人和 v 握过手. 所以 $d(w)=66$ 的那名选手 w 只能与 v 来自同一对.

从图 G 中去掉 v 和 w，得到含 66 个顶点的图 G_1. 则 x 是 G_1 中的顶点，并且除 x 之外，其他顶点的度也都不相同. 因此和前述证明相同，G_1 含有度分别为 0 和 64 的顶点 p 和 q，它们在原来图 G 中的度分别为 1 和 65. 如此继续，

可证得对 $0 \leqslant j \leqslant 33$，图 G 中含有顶点 x_j，y_j，它们的度分别为 j 和 $66-j$，而且所代表的选手来自同一对，特别地，最后有 $x_{33}=x$，所以 $d(x_{33})=33$. 因此该男选手的搭档女选手握手次数为 33.

注 将有限图 G 的顶点编号，按度的非降次序 $(d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n)$ 排列，所得到的$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$称为 G 的**度序列**. 度序列是图的基本特征之一. 本题中，我们从度序列考虑问题，这是解题的一种重要方法.

例 7 求满足如下条件的最小正整数 n，在圆 O 的圆周上任取 n 个点 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，则在 C_n^2 个角 $\angle A_iOA_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 中，至少有 2010 个不超过 $120°$.

解 首先，当 $n=90$ 时，如图 20-2，设 AB 是圆 O 的直径，在点 A 和 B 的附近分别取 45 个点，此时，只有 $2C_{45}^2=45 \times 44=1980$ 个角不超过 $120°$，所以，$n=90$ 不满足题意.

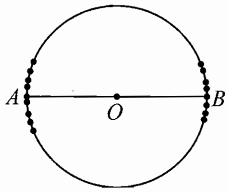


图 20-2

当 $n=91$ 时，下面证明至少有 2010 个角不超过 $120°$.

把圆周上的 91 个点 A_1，A_2，$\cdots$，A_{91} 看作一个图的 91 个顶点 v_1，v_2，$\cdots$，v_{91}，若 $\angle A_iOA_j > 120°$，则在它们对应的顶点 v_i，v_j 之间连一条边，这样就得到一个图 G.

设图 G 中有 e 条边，易知，图中没有三角形.

若 $e=0$，则有 $C_{91}^2=4095>2010$ 个角不超过 $120°$，命题得证.

若 $e \geqslant 1$，不妨设顶点 v_1，v_2 之间有边相连，因为图中没有三角形，所以，对于顶点 v_i $(i=3, 4, \cdots, 91)$，它至多与 v_1，v_2 中的一个有边相连，所以

$$d(v_1)+d(v_2) \leqslant 89+2=91,$$

其中 $d(v)$表示顶点 v 的度，即顶点 v 处引出的边数.

因为 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_{91})=2e$，而对于图 G 中的每一条边的两个顶点 v_i，v_j，都有

$$d(v_i)+d(v_j) \leqslant 91,$$

于是，上式对每一条边求和可得

$$(d(v_1))^2+(d(v_2))^2+\cdots+(d(v_{91}))^2 \leqslant 91e,$$

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}&91[(d(v_1))^2+(d(v_2))^2+\cdots+(d(v_{91}))^2]\\ \geqslant &[d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_{91})]^2=4e^2,\end{aligned}$$

所以 $$\frac{4e^2}{91} \leqslant (d(v_1))^2 + (d(v_2))^2 + \cdots + (d(v_{91}))^2 \leqslant 91e,$$

故 $$e \leqslant \frac{91^2}{4} < 2071,$$

所以，91 个顶点中，至少有 $C_{91}^2 - 2071 = 2024 > 2010$ 个点对，它们之间没有边相连，从而，它们对应的顶点所对应的角不超过 $120°$.

综上所述，n 但最小值为 91.

本节的最后一个例题是利用有向图来作证明的.

例 8　设 F 是一个由整数组成的有限集，满足：

(1) 对任意 $x \in F$，存在 $y, z \in F$（可以相同），使得 $x = y + z$；

(2) 存在 $n \in \mathbf{N}^*$，使得对任何正整数 $k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$ 及任意 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in F$（可以相同），都有 $\sum_{i=1}^{k} x_i \neq 0$.

求证：F 至少含有 $2n+2$ 个元素.（2008 年中国国家队培训题）

证明　显然 $0 \notin F$，且 F 中所有元素不全同号（否则，绝对值最小的元素 x 无法表示成 $y+z\ (y, z \in F)$ 的形式）.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 F 中所有正的元素. 我们证明 $m \geqslant n+1$.

作含 m 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 的有向图 G 如下：对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$，由于存在 $y, z \in F$，使 $x_i = y + z > 0$，不妨设 $y > 0$，则 y 必等于某个 $x_j (j \neq i)$，如此就在 G 中作一条有向边 $v_i \to v_j$.

由 G 的作法可知每个顶点 v_i 的出度为 1，因此 G 中必存在圈，不妨设为

$$v_{i_1} \to v_{i_2} \to \cdots \to v_{i_k} \to v_{i_1}\ (k \leqslant m).$$

这表明存在 $z_1, z_2, \cdots, z_k \in F$，使得

$$\begin{cases} x_{i_1} = x_{i_2} + z_1, \\ x_{i_2} = x_{i_3} + z_2, \\ \cdots \\ x_{i_k} = x_{i_1} + z_k, \end{cases}$$

求和得

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = 0.$$

为不与条件(2)矛盾，必有 $k > n$，从而 $m \geqslant k \geqslant n+1$.

同理知 F 中负的元素也至少有 $n+1$ 个，由此可知 F 至少含有 $2n+2$ 个元素.

注 本题巧妙构造有向图来解题. 从本题的论证中可以发现，即使对 F 为有限实数集合的情况，结论仍是成立的. 读者可进一步考虑 F 能否恰含有 $2n+2$ 个元素.

习 题 20

1 证明：任何一群人中，至少有两个人，它们的朋友数目相同.

2 是否存在这样的多面体，它有奇数个面，每个面有奇数条棱？

3 有一个团体会议，有 100 人参加. 其中任意四个人都至少有一个人认识三人. 问：该团体中认识其他所有人的成员最少有多少？

4 证明：在任何 5 个无理数中，总可以选出 3 个数，使它们两两之和为无理数.

5 一个给定圆周上有 13 个点. 能否用数字 1, 2, …, 13 给它们编号，使得相邻两点标上的数之差的绝对值至多是 5，至少是 3？

6 如果凸 n 边形的任意 3 条对角线都不交于一点，试问该凸 n 边形被它的对角线分成多少部分？

7 某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛，每人至少上场一次. 证明：必有 6 场比赛，其中 12 个参赛者各不相同.（1989 年美国数学奥林匹克试题）

8 n 项正整数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的各项之和为 2009，如果这 n 个数既可分为和相等的 41 个组，又可分为和相等的 49 个组，求 n 的最小值.（2009 年全国高中数学联赛江西省预赛试题）

9 今有 10 个互不相同的非零数，它们之中任意两个数的和与积中，至少有一个是有理数. 证明：每个数的平方都是有理数.（2005 年俄罗斯数学奥林匹克试题）

10 已知 X 为 n 元集合. 设 X 的每个有序元素对 (x, y) $(x, y \in X)$ 对应一个数 $f(x, y)=0$ 或 1，且对一切 $x, y \in X$, $x \neq y$，恒有 $f(x, y) \neq f(y, x)$. 求证：下述两种情况恰有一种出现：

(1) X 是两个不交的非空集 A, B 之并，且对一切 $x \in A$, $y \in B$，有 $f(x, y)=1$；

(2) X 的元素可排成序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得对 $i=1, 2, \cdots, n$，有 $f(x_i, x_{i+1})=1$，其中 $x_{n+1}=x_1$.

习题解答

习题 1

1. 解法一　令 $x=\sin\alpha$，$y=\sin\beta$，其中 $\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)\leqslant 1,$$

等号可在 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时取到.

解法二　由基本不等式可以证明如下两个"部分不等式"

$$x\sqrt{1-y^2}\leqslant\frac{1}{2}(x^2+1-y^2),\ y\sqrt{1-x^2}\leqslant\frac{1}{2}(y^2+1-x^2),$$

相加即可.

2. 取对数后只须证 $b\ln a>a\ln b$，只须证 $f(x)=\frac{\ln x}{x}\ (x>\mathrm{e})$ 单调减. 此时显然 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，故结论成立.

注　本题用"作商法"也可证明，而"作差法"将使问题大大复杂化.

3. 把 n 写成 n 个 1 的和：

$$n=1+1+\cdots+1.$$

我们要求的方式数就转化为从上式中的 $n-1$ 个加号中选 $m-1$ 个的选法数，即 C_{n-1}^{m-1}.

注　计数问题常可用一个集合中的元素与另一其元素更易计数的集合中的元素"对应"的办法来"化简".

4. 注意到 $x\geqslant 1$，$y\geqslant 1$，所以

$$\begin{aligned}&(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)-((xy)^2-2xy+2)\\=&(-2y+2)x^2+(6y-2y^2-4)x+(2y^2-4y+2)\end{aligned}$$

$$=-2(y-1)(x^2+(y-2)x+1-y)$$
$$=-2(y-1)(x-1)(x+y-1)\leqslant 0,$$

所以 $$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)\leqslant (xy)^2-2xy+2.$$

同理，因为 $xy\geqslant 1$，$z\geqslant 1$，所以

$$((xy)^2-2xy+2)(z^2-2z+2)\leqslant (xyz)^2-2xyz+2.$$

从而命题得证.

5. 当 $a=0$ 时，有

$$0=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=\sum_{k=1}^n x_k^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j,$$

所以 $$\sum_{k=1}^n x_k^2=-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j,$$

于是 $$\sum_{k=1}^n x_k^2\leqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_ix_j|,$$

从而 $$2\sum_{k=1}^n x_k^2\leqslant \sum_{k=1}^n x_k^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_ix_j|=(\sum_{k=1}^n|x_k|)^2,$$

即 $a=0$ 时，不等式成立.

当 $a\neq 0$ 时，令 $y_k=x_k-a$，$k=1,2,\cdots,n$，则 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的算术平均值为 0，利用上面已经证明的结果，可得

$$\sum_{k=1}^n y_k^2\leqslant \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n|y_k|)^2,$$

故 $$\sum_{k=1}^n (x_k-a)^2\leqslant \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n|x_k-a|)^2.$$

注　本题中 $a=0$ 这种情形是容易证明的. 当 $a\neq 0$ 时，我们通过一个代换，把它化归为 $a=0$ 时的情形，进而求得解答，这是一种常用的手法.

6. 设 BC、CA、AB 的长度分别为 a、b、c；PD、PE、PF 的长度分别为 p、q、r. 我们要在 $\triangle ABC$ 的内部找一点 P，使 $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$ 达到最小.

由于 $$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}$$
$$=\frac{1}{2}ap+\frac{1}{2}bq+\frac{1}{2}cr,$$

所以，$ap+bq+cr=2S_{\triangle ABC}$ 是一个与 P 点的位置无关的常数，因此，我们可

以用$(ap+bq+cr)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right)$取最小值来代替使$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$取最小值(问题已被转化).

由柯西不等式

$$(ap+bq+cr)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right)\geqslant(a+b+c)^2,$$

并且当$ap\times\frac{p}{a}=bq\times\frac{q}{b}=cr\times\frac{r}{c}$，即$p=q=r$时上述不等式取等号，从而当$p=q=r$时，$(ap+bq+cr)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right)$取最小值，也就是说，当$P$为$\triangle ABC$的内心时，$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$取到最小值.

7. (1) 解方程得$t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$是无理数，由$(t+a)(bt+c)=1$得

$$bt^2+(ab+c)t+ac-1=0.$$

因为$t^2-3t+1=0$，所以$t^2=3t-1$，于是上式可化为

$$(3b+ab+c)t-b+ac-1=0,$$

由于t是无理数，所以

$$\begin{cases}3b+ab+c=0,\\-b+ac-1=0,\end{cases}$$

因为a，b是有理数，所以$a^2+3a+1\neq0$，由上面方程组解得

$$b=-\frac{1}{a^2+3a+1},\ c=\frac{a+3}{a^2+3a+1}.$$

(2) 因为$t^2+2=(3t-1)+2=3t+1=3\left(t+\frac{1}{3}\right)$，由(1)知，对$a=\frac{1}{3}$，有

$$b=-\frac{1}{a^2+3a+1}=-\frac{9}{19},\ c=\frac{a+3}{a^2+3a+1}=\frac{30}{19},$$

使得
$$\left(t+\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{9}{19}t+\frac{30}{19}\right)=1,$$

所以
$$\frac{1}{t^2+2}=\frac{1}{3}\left(-\frac{9}{19}t+\frac{30}{19}\right)=-\frac{3}{19}t+\frac{10}{19}.$$

注 本题的第(2)小题，我们就利用了(1)的结论，从而把陌生问题化归

为熟悉问题.

8. 设 x_1，x_2，…，x_n 中有 r 个-1，s 个 1，t 个 2，由题设得

$$\begin{cases}-r+s+2t=19,\\ r+s+4t=99.\end{cases}$$

可得
$$\begin{cases}r=40-t,\\ s=59-3t,\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}r=40-t\geqslant 0,\\ s=59-3t\geqslant 0,\\ t\geqslant 0\end{cases}$$

故
$$0\leqslant t\leqslant 19.$$

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=-r+s+8t=(19-2t)+8t=6t+19,$$

所以
$$19\leqslant x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3\leqslant 133.$$

又当 $r=40$，$s=59$，$t=0$ 时，$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=19$；当 $r=21$，$s=2$，$t=19$ 时，$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=133$，所以 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$ 的最小值为 19，最大值为 133.

9. 设 $x+2y=5a$，$x+y=3b$，则 $x=6b-5a$，$y=5a-3b$. 于是 $2x+y=9b-5a$，$7x+5y=27b-10a$. 故

$$\begin{cases}6b-5a\geqslant 0,\\ 5a-3b\geqslant 0,\\ 9b-5a\geqslant 99,\end{cases}$$

所以 $9b\geqslant 5a+99\geqslant 3b+99$，可得 $b\geqslant 17$，于是 $5a\geqslant 3b\geqslant 51$，可得 $a\geqslant 11$，进而 $9b\geqslant 5a+99\geqslant 3\cdot 11+99$，可得 $b\geqslant 18$.

若 $b=18$，则 $5a\leqslant 9b-99=63$，$a\leqslant 12$，从而

$$7x+5y=27b-10a\geqslant 27\times 18-10\times 12=366.$$

若 $b>18$，则 $7x+5y=27b-10a=9b+2(9b-5a)\geqslant 9\times 19+2\times 99=369$.

综上所述，$7x+5y$ 的最小值为 366.

10. 由已知条件得 $x+z=(1-xz)y$，显然，$1-xz\neq 0$，所以 $y=\dfrac{x+z}{1-xz}$. 由此联想到正切和公式，于是令

$$\alpha=\arctan x,\ \beta=\arctan y,\ \gamma=\arctan z,\ \alpha、\beta、\gamma\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

则
$$\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}=\tan(\alpha+\gamma).$$

由于 $\beta,\ \alpha+\beta\in(0,\ \pi)$，所以 $\beta=\alpha+\gamma$. 于是

$$\begin{aligned}p&=\frac{2}{\tan^2\alpha+1}-\frac{2}{\tan^2\beta+1}+\frac{3}{\tan^2\gamma+1}\\&=2\cos^2\alpha-2\cos^2(\alpha+\gamma)+3\cos^2\gamma\\&=(\cos 2\alpha+1)-[\cos(2\alpha+2\gamma)+1]+3\cos^2\gamma\\&=2\sin\gamma\cdot\sin(2\alpha+\gamma)+3\cos^2\gamma\\&\leqslant 2\sin\gamma+3(1-\sin^2\gamma)\\&=-3\left(\sin\gamma-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\leqslant\frac{10}{3},\end{aligned}$$

等号在 $2\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}$，$\sin\gamma=\frac{1}{3}$，即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时成立，故欲求的最大值为 $\frac{10}{3}$.

习　题　2

1. 用反证法. 假设 $|x|<|y-z|$，$|y|<|z-x|$，$|z|<|x-y|$ 同时成立，不妨设其中 $x\geqslant y\geqslant z$，则有 $|x|+|z|<|y-z|+|x-y|=(y-z)+(x-y)=x-z$，矛盾！故假设不成立. 证毕.

2. 假设四边形 $EFGH$ 每条边的长度都小于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则

$$EF^2+FG^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1.$$

又四边形 $EFGH$ 的四个内角中，至少有一个内角不大于 $90°$（否则，四边形内角和将大于 $360°$），因此，不妨设 $\angle EFG\leqslant 90°$，则 $EG^2\leqslant EF^2+EG^2$，所以 $EG^2<1$，$EG<1$. 但在正方形 $ABCD$ 中，$AB\ /\!/\ CD$，且 AB 与 CD 间距离为 1，所以 $EG\geqslant 1$，与 $EG<1$ 矛盾.

3. (1) 答案是否定的. 若存在正整数 $m,\ n$，使得 $m(m+2)=n(n+1)$，则

$$(m+1)^2=n^2+n+1,$$

显然 $n>1$，于是

$$n^2<n^2+n+1<(n+1)^2,$$

所以，n^2+n+1 不是平方数，矛盾.

(2) 当 $k=3$ 时，若存在正整数 m，n，满足 $m(m+3)=n(n+1)$，则

$$4m^2+12m=4n^2+4n,$$

$$(2m+3)^2=(2n+1)^2+8,$$

$$(2m+3-2n-1)(2m+3+2n+1)=8,$$

$$(m-n+1)(m+n+2)=2,$$

而 $m+n+2>2$，故上式不可能成立.

当 $k\geqslant 4$ 时，若 $k=2t$（t 是不小于 2 的整数）为偶数，取

$$m=t^2-t,\ n=t^2-1,$$

则
$$m(m+k)=(t^2-t)(t^2+t)=t^4-t^2,$$

$$n(n+1)=(t^2-1)t^2=t^4-t^2,$$

故这样的(m,n)满足条件.

若 $k=2t+1$（t 是不小于 2 的整数）为奇数，取

$$m=\frac{t^2-t}{2},\ n=\frac{t^2+t-2}{2},$$

则
$$m(m+k)=\frac{t^2-t}{2}\left(\frac{t^2-t}{2}+2t+1\right)=\frac{1}{4}(t^4+2t^3-t^2-2t),$$

$$n(n+1)=\frac{t^2+t-2}{2}\cdot\frac{t^2+t}{2}=\frac{1}{4}(t^4+2t^3-t^2-2t),$$

故这样的(m,n)满足条件.

综上所述，当 $k=3$ 时，答案是否定的；当 $k\geqslant 4$ 时，答案是肯定的.

4. 用反证法. 假设存在三个不同的正整数 x_1，x_2，x_3，使得

$$|ax_i^2+bx_i+c|\leqslant 1000,$$

令 $f(x)=ax^2+bx+c$，则 x_1，x_2，x_3 中至少有两个在对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的一侧（包括对称轴上），不妨设 $x_1>x_2\geqslant-\dfrac{b}{2a}$，则 $2ax+b\geqslant 0$. 因为

$$ax_1^2+bx_1+c\leqslant 1000,\ -ax_2^2-bx_2-c\leqslant 1000,$$

所以 $$(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]\leqslant 2000.\quad ①$$

又 x_1，x_2 是整数，所以 $x_1\geqslant x_2+1$，于是

$$a(x_1+x_2)+b\geqslant a(x_2+1+x_2)+b=a+2ax_2+b\geqslant a>2000,$$

故 $$(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]>2000.\quad ②$$

①与②矛盾，从而命题得证.

5. 不存在这样的三角形，证明如下：

不妨设 $\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C$，则 $C=2A$ 且 $a=2007$. 作$\angle ACB$ 的内角平分线 CD，则 $\angle BCD=\angle A$，从而 $\triangle CDB\backsim\triangle ACB$. 所以，

$$\frac{CB}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{CD}{AC}=\frac{BD+CD}{BC+AC}=\frac{BD+AD}{BC+AC}=\frac{AB}{BC+AC}.$$

即 $c^2=a(a+b)=2007(2007+b)$，这里 $2007\leqslant b\leqslant c<2007+b$.

由 a，b，c 都是正整数知 $2007\mid c^2$，故 $3\mid c$，$223\mid c$，可设 $c=669m$，则 $223m^2=2007+b$，即 $b=223m^2-2007$，结合 $2007\leqslant b$，可得 $m\geqslant 5$.

另一方面，由于 $c\geqslant b$，得 $669m\geqslant 223m^2-2007$，这要求 $m<5$，矛盾！因此，满足条件的三角形不存在.

6. 结论是否定的. 下用反证法证明之：

假设存在无限个 A 中的数 a_1，a_2，a_3，…，满足对任何 $i, j\in\mathbf{N}^*$，有 $\frac{a_i}{i}+\frac{a_j}{j}\in A$，显然 $a_1\neq 1$（否则，若 $a_1=1$，令 $i=j=1$，则推出 $2\in A$，矛盾）.

于是，设 $a_1=\frac{1}{m}$，$m\geqslant 2$，$m\in\mathbf{N}^*$.

此时，令 $i=1$，$j=m^2$，则

$$\frac{a_i}{i}+\frac{a_j}{j}=\frac{1}{m}+\frac{a_{m^2}}{m^2}\leqslant\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}<\frac{1}{m-1},$$

故 $\frac{1}{m}<\frac{a_i}{i}+\frac{a_j}{j}<\frac{1}{m-1}$，与 $\frac{a_i}{i}+\frac{a_j}{j}\in A$ 矛盾！

所以不存在满足条件的无限个数.

7. 假设结论不真. 则对所给的 3 元子集中的任意两个 A，B，它们要么不交，要么恰有两个公共元，如果是后一种情况，则记 $A\sim B$.

可以证明：对三个子集 A，B，C，若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$. 事实上，设 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{a, b, d\}$，因为 C 与 B 有两个公共元素，故 $C\cap\{a, b\}\neq\varnothing$，即 C 与 A 相交，有 $A\sim C$. 于是所有给定的 3 元子集可以分为若

干类，使同一类中任意两个子集恰有两个公共元，而不同类的两个子集不交.

对每个类，考虑在它的所有子集中出现的不同元素的总个数，有三种情形：

(1) 总共出现 3 个元素；

(2) 总共出现 4 个元素；

(3) 总共出现不少于 5 个元素.

在情形(1)下，该类恰由一个 3 元子集组成. 在情形(2)下，类中至多只有 4 个不同可能的子集. 考虑情形(3)：设 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, b, d\}$ 是类中的两个子集，则类中还有某个集合 C，它含有除 a, b, c, d 外的另一元素 e，结合 $A\sim C$, $B\sim C$ 可知 $C=\{a, b, e\}$. 对类中任意别的子集 D，由 $A\sim D$, $B\sim D$, $C\sim D$ 可知 $\{a, b\}\subseteq D$. 于是类中子集个数比类中元素个数少 2(因为除 a, b 外每个元素恰好对应它所属的子集).

以上每种情形中，每类的子集个数不超过该类中所出现的元素个数，但题中所给的子集总数大于元素总数，矛盾！故命题得证.

8. 假设结论不成立，则存在 i_0，当 $i>i_0$ 时，$(a_i, a_{i+1})>\frac{3}{4}i$.

取定一个正整数 M $(M>i_0)$. 当 $i\geqslant 4M$ 时，有 $(a_i, a_{i+1})>\frac{3}{4}i\geqslant 3M$. 从而，$a_i\geqslant(a_i, a_{i+1})>3M$.

由于 a_1, a_2, …是正整数的一个排列，则 $\{1, 2, \cdots, 3M\}\subseteq\{a_1, a_2, \cdots, a_{4M-1}\}$，故

$$|\{1, 2, \cdots, 3M\}\cap\{a_{2M}, a_{2M+1}, \cdots, a_{4M-1}\}|\geqslant 3M-(2M-1)=M+1.$$

由抽屉原理知，存在 j_0 $(2M\leqslant j_0<4M-1)$，使得 a_{j_0}, $a_{j_0+1}\leqslant 3M$. 故

$$(a_{j_0}, a_{j_0+1})\leqslant\frac{1}{2}\max\{a_{j_0}, a_{j_0+1}\}\leqslant\frac{3M}{2}=\frac{3}{4}\times 2M\leqslant\frac{3}{4}j_0,$$

矛盾.

所以，存在无穷多个 i，使得 $(a_i, a_{i+1})\leqslant\frac{3}{4}i$.

习　题　3

1. 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$a_1^3=a_1^2$，故 $a_1=1$. 即 $n=1$ 时命题成立.

假设 $n\leqslant k$ 时命题成立，即 $a_1=1$, $a_2=2$, …, $a_k=k$，则由题设

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+a_{k+1}^3=(1+2+\cdots+k+a_{k+1})^2,$$

所以
$$a_{k+1}(a_{k+1}^2-a_{k+1}-k(k+1))=0,$$

考虑到 $a_{k+1}>0$，从而 $a_{k+1}=k+1$，故命题对 $n=k+1$ 也成立.

2. 下面证明加强的命题：$a_{n+1}>3b_n$.

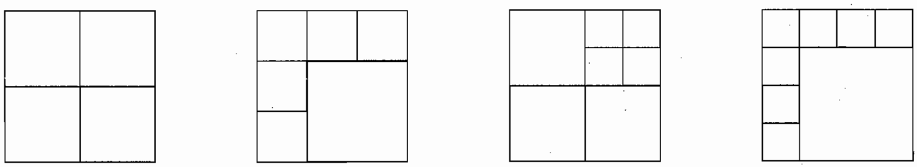
当 $n=1$ 时，$a_2=3^3=27>24=3b_1$，即 $n=1$ 时命题成立.

假设 $n=k$ 时命题成立，即 $a_{k+1}>3b_k$，则

$$a_{k+2}=3^{a_{k+1}}>3^{3b_k}=27^{b_k}>2^{b_k}\cdot 8^{b_k}\geqslant 2b_{k+1},$$

故由数学归纳法知，加强的命题成立.

3. 因为一个正方形可以等分为 4 个小正方形，因此要将小正方形的数目增加 3 个是容易做到的，所以我们采用步长为 3.



$n=4$　　$n=6$　　$n=7$　　$n=8$

第 3 题

当 $n=6, 7, 8$ 时，可按图 2 所示方式进行分割，所以知命题成立. 假设对某个 $n=k\geqslant 6$，已将正方形分为 k 个小正方形，那么只要在将其中一个小正方形等分为 4 个更小的正方形，即可得到 $n=k+3$ 个小正方形. 所以知命题对一切整数 $n\geqslant 6$ 都成立.

4. 对 s 用数学归纳法.

(1) 当 $s=1$ 时，结论显然成立.

(2) 假设结论对 $s=k$ 时成立，则 $s=k+1$ 时，不妨设 $n_1>n_2>\cdots>n_k>n_{k+1}$. 对 $n_2, n_3, \cdots, n_{k+1}$，由归纳假设可知

$$2^{\frac{n_2}{2}}+2^{\frac{n_3}{2}}+\cdots+2^{\frac{n_{k+1}}{2}}<(1+\sqrt{2})\sqrt{M-2^{n_1}},$$

则

$$2^{\frac{n_1}{2}}+2^{\frac{n_2}{2}}+\cdots+2^{\frac{n_{k+1}}{2}}<(1+\sqrt{2})\sqrt{M-2^{n_1}}+2^{\frac{n_1}{2}}.$$

以下只需证明

$$(1+\sqrt{2})\sqrt{M-2^{n_1}}+2^{\frac{n_1}{2}}<(1+\sqrt{2})\sqrt{M}. \quad ①$$

由于 $M=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_{k+1}}\leqslant 2^{n_1}+2^{n_1-1}+\cdots+2^{n_1-k}<2\times 2^{n_1}$，$M-2^{n_1}<2^{n_1}$，故 $\sqrt{M-2^{n_1}}+\sqrt{M}<(1+\sqrt{2})\cdot 2^{\frac{n_1}{2}}$，两边乘以 $\sqrt{M}-\sqrt{M-2^{n_1}}$ 得

$$M-(M-2^{n_1})<(1+\sqrt{2})\cdot 2^{\frac{n_1}{2}}(\sqrt{M}-\sqrt{M-2^{n_1}}),$$

即 $2^{\frac{n_1}{2}}<(1+\sqrt{2})(\sqrt{M}-\sqrt{M-2^{n_1}})$，此即①. 从而 $s=k+1$ 时结论成立.

因此，由数学归纳法知，命题对任意正整数 s 均成立.

5. 用反向数学归纳法. 先证明对任意 $n=2^k\ (k\in\mathbf{N}^*)$，有 $a_n=n$.

$n=2$ 时结论显然成立. 假设 $n=2^k$ 时成立，即 $a_{2^k}=2^k$，那么在已知条件中令 $m=2$，$n=2^k$ 得：$a_{2^{k+1}}=a_2a_{2^k}=2\times 2^k=2^{k+1}$. 故 $n=2^{k+1}$ 时也成立.

所以 $a_{2^k}=2^k$ 对任意正整数 k 成立.

再证明对任意正整数 $n\geqslant 2$，若 $a_n=n$，则当 $1\leqslant k<n$ 时，$a_k=k$.

事实上，由已知得：$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=n$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\in\mathbf{N}^*$，所以必有 $a_1=1$，$a_2=2$，$\cdots$，$a_{n-1}=n-1$.

由反向归纳法可得 $a_n=n$（经检验知这样的数列 $\{a_n\}$ 确实满足一切条件）.

6. 当 $n=3, 4$ 时，有 $3^3+4^3+5^3=6^3$，$11^3+12^3+13^3+14^3=20^3$. 设 $n=k\geqslant 3$ 时有解，根据归纳假设得 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3=y^3$，$x_1<x_2<\cdots<x_k$，则

$$(6x_1)^3+(6x_2)^3+\cdots+(6x_k)^3=(6y)^3,$$

又 $$(6x_1)^3=(3x_1)^3+(4x_1)^3+(5x_1)^3,$$

所以 $k+2$ 个两两不同的正整数 $3x_1<4x_1<5x_1<6x_2<\cdots<6x_k$ 的立方和为 $(6y)^3$.

由数学归纳法知命题对任意正整数 $n\geqslant 3$ 成立.

7. 首先 2^2-3，2^3-3 互素. 下面证明：当 $k\geqslant 2$ 时，如果正整数 $n_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 满足 $A=\{2^{n_i}-3\mid i=1, 2, \cdots, k\}$ 中的数两两互素，则存在 $n_{k+1}\geqslant 2$，使得 $2^{n_{k+1}}-3$ 与 A 中每个数互素.

设 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是 A 中所有数的素因子组成的集合，则 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是奇数.

由费马小定理得 $2^{p_j-1}\equiv 1 \pmod{p_j}$，因此 $2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)}\equiv 1\pmod{p_j}$ 对任意 $j=1, 2, \cdots, r$ 成立.

设 $n_{k+1}=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)\geqslant 2$，则对任意一个 p_j，$j\in\{1, 2, \cdots, r\}$，有 $2^{n_{k+1}}-3\equiv 1-3\equiv -2\pmod{p_j}$，故 $2^{n_{k+1}}-3$ 不被 A 中每个数的素因子整除，这就说明找到了数列中第 $k+1$ 个数与已有的 k 个数两两互

素.以此类推可知数列中包含无穷多个两两互素的数.

8. 操作过程的不同方法个数为 $(2n-1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$.

下面我们对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,只有一个砝码,只能放在天平的左边,故只有 1 种方法.

假设 $n=k$ 时,k 个重量为 2^0, 2^1, $\cdots$, 2^{k-1} 按题设要求有 $(2k-1)!!$ 种方法.

当 $n=k+1$ 时,此时将所有砝码的重量都乘以 $\frac{1}{2}$,不影响问题的本质.此时 $k+1$ 个砝码的重量为 $\frac{1}{2}$, 1, 2, $\cdots$, 2^{k-1}.由于对任意正整数 r,有

$$2^r>2^{r-1}+2^{r-2}+\cdots+1+\frac{1}{2}\geqslant\sum_{i=-1}^{r-1}(\pm2^i),$$

所以当所有砝码都放上天平时,天平的较重的一端只取决于天平上最重砝码的位置,故最重砝码一定在左边.下面考虑重量为 $\frac{1}{2}$ 的砝码在操作过程中的位置.

(1) 若重量为 $\frac{1}{2}$ 的砝码第 1 个放,它只能放在左边,然后剩下的 k 个砝码有 $(2k-1)!!$ 种放法.

(2) 若重量为 $\frac{1}{2}$ 的砝码在第 t 次操作时放,$t=2, 3, \cdots, k+1$.由于此时已经放在天平上的砝码重量均大于 $\frac{1}{2}$,所以重量为 $\frac{1}{2}$ 的砝码不会成为最重的一个,无论它放左边还是右边都不会影响最重砝码的位置,于是有 2 种放法,而剩下的砝码的放法不受影响,此时有 $2\times(2k-1)!!$ 种放法.

综上所述,当 $n=k+1$ 时,共有

$$(2k-1)!!+k\times2\times(2k-1)!!=(1+2k)(2k-1)!!=(2k+1)!!$$

种放法.

所以,由数学归纳法知,对于任意整数 $n>0$,整个操作过程的不同方法个数为 $(2n-1)!!$.

9. 首先,易知 $1\in A$.

设 $a\in A$, $b\in A$, $1<a<b$.若 a, b 中至少有一个偶数,则 $2\in A$;若 a, b 都为奇数,则 $1+ab\in A$,而 $1+ab$ 是偶数,故 $2\in A$.

设 1, 2, $a\in A$ $(a>2)$,则 $1+2\cdot a\in A$, $1+2\cdot(1+2a)=3+4a\in A$,

$$1+(1+2a)\cdot(3+4a)=4+10a+8a^2\in A,$$

若 a 是偶数，则 $4\mid(4+10a+8a^2)$，于是 $4\in A$；若 a 是奇数，则把 $4+10a+8a^2$ 作为 a，重复上面的过程可得 $4\in A$.

又 $1+2\times4=9\in A$，所以 $3\in A$，$1+2\times3=7\in A$，$1+2\times7=15\in A$，所以 $5\in A$.

所以，1，2，3，4，5 都是集合 A 的元素.

假设 $1, 2, \cdots, n\in A\ (n\geqslant5)$，下证 $n+1\in A$.

如果 $n+1=2k+1$ 为奇数，那么 $3\leqslant k<n$，于是 $n+1=1+2\cdot k\in A$；

如果 $n+1=2k$ 是偶数，那么 $3\leqslant k<n$，于是 $n=2k-1\in A$，$1+2\cdot k\in A$，所以 $1+(2k-1)\cdot(2k+1)=4k^2\in A$，从而 $2k\in A$，即 $n+1\in A$.

综上所述，我们证明了 $A=\mathbf{N}^*$.

10. 我们把命题的结论加强为

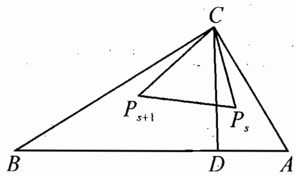
$$AP_1^2+P_1P_2^2+P_2P_3^2+\cdots+P_{n-1}P_n^2+P_nB^2\leqslant AB^2.$$

当 $n=1$ 时，因为 $\angle AP_1B\geqslant90^\circ$，所以 $AP_1^2+P_1B^2\leqslant AB^2$.

假设 $n<k$ 时命题成立. 当 $n=k$ 时，过 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D，不妨设 $\triangle ACD$ 内有 s 个点，$\triangle BCD$ 内有 t 个点，(不然的话，若 k 个点都在 $\triangle ACD$ 内，过 D 作 AC 的垂线，这种作法一直进行下去，直到把 k 个点分割在两个三角形内为止). 那么 $s, t\geqslant1$，$s+t=k$.

因 $\triangle ACD$ 内有 s 个点，由归纳假设，可以分别标号为 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，使得

$$AP_1^2+P_1P_2^2+\cdots+P_{s-1}P_s^2+P_sC^2\leqslant AC^2.$$



第 11 题

同样，对于 $\triangle BCD$ 内的 $k-s$ 个点，可以分别标号为 $P_{s+1}, P_{s+2}, \cdots, P_k$，使得

$$CP_{s+1}^2+P_{s+1}P_{s+2}^2+\cdots+P_{k-1}P_k^2+P_kB^2\leqslant BC^2.$$

由于 $\angle P_sCP_{s+1}\leqslant90^\circ$，所以 $P_sC^2+CP_{s+1}^2\geqslant P_sP_{s+1}^2$，于是

$$\begin{aligned}&AP_1^2+P_1P_2^2+\cdots+P_{k-1}P_k^2+P_kB^2\\ \leqslant&(AP_1^2+P_1P_2^2+\cdots+P_sC^2)+(CP_{s+1}^2+\\ &P_{s+1}P_{s+2}^2+\cdots+P_{k-1}P_k^2+P_kB^2)\\ \leqslant&AC^2+BC^2=AB^2.\end{aligned}$$

从而 $n=k$ 时命题也成立，这就完成了归纳证明.

11. 我们将用数学归纳法对一般情况 ($n\ (n\geqslant2)$ 门课，2^n 个学生，2^{n-1} 间宿舍) 证明结论.

当 $n=2$ 时，不难讨论知结论成立. 下设 $n>2$.

不妨设物理是一门选修课且某对室友一个选修了物理，一个没选修物理. 我们将所有选修物理的学生集合记为 A，没选修物理的学生集合记为 B，则 $|A|=|B|=2^{n-1}$. 我们将 A 和 B 中的所有同学都各自安排到另外有 2^{n-2} 间宿舍的学校，原来的室友还是室友，剩下的 A 中任意两两配对成为室友(称之为新室友). 由归纳假设，A 中学生可以排成一圈 K 满足要求. 设 (x_1, x_2)，…，(x_{2k-1}, x_{2k}) 是 K 上按顺时针方向排列的所有新室友对. 令 x_i' 表示 x_i 原来的室友，显然 $x_i'\in B$. 在 B 中令 (x_2', x_3')，…，(x_{2k-2}', x_{2k-1}')，(x_{2k}', x_1') 构成新的室友对集，与 B 中原来的室友对集共同构成了 B 中的室友对集. 对 B 应用归纳假设，可将 B 中同学排成一圈 K'. 我们将 K 中 x_{2i} 到 x_{2i+1} 之间的同学保持顺序地插入到 K' 中 x_{2i}'，x_{2i+1}' 之间，得到新的大圈满足要求.

习 题 4

1. 把 $1, 2, \cdots, 2n$ 这 $2n$ 个正整数分成如下 n 组：

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \cdots, \{2n-1, 2n\}.$$

从这 n 组中任取 $n+1$ 个数，由抽屉原理知，其中一定有两个数取自同一组，同一组中的两个数是相邻的正整数，从而它们是互素的.

2. 把 $1, 2, \cdots, 100$ 这 100 个数分成如下 10 组(10 个抽屉)，每一组中的最大数与最小数之比不超过 $\frac{3}{2}$：

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \{11, 12, \cdots, 16\}, \{17, 18, \cdots, 25\},$$
$$\{26, 27, \cdots, 39\}, \{40, 41, \cdots, 60\}, \{61, 62, \cdots, 91\}, \{92, 93, \cdots, 100\}.$$

从 $1, 2, \cdots, 100$ 中任取 11 个数，即是从上面 10 组中任取 11 个数，由抽屉原理知，其中一定有两个数取自同一组，这两个数的比值不超过 $\frac{3}{2}$.

3. 不妨设这 7 个实数分别为 $\tan\alpha_i$，$i=1, 2, \cdots, 7$，其中

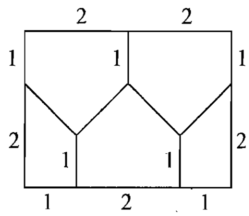
$$-\frac{\pi}{2}<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_7<\frac{\pi}{2}.$$

将区间 $[\alpha_1, \alpha_7]$ 平均分成 6 个区间，根据抽屉原理知，在 α_i $(1\leqslant i\leqslant 7)$ 中必有两个角 θ_1，θ_2 $(\theta_1\leqslant\theta_2)$ 同属于一个区间，则 $0\leqslant\theta_2-\theta_1\leqslant\frac{\alpha_7-\alpha_1}{6}<\frac{\pi}{6}$.

取 $x=\tan\theta_2$，$y=\tan\theta_1$，则 x，y 满足

$$0\leqslant\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}=\frac{x-y}{1+xy}<\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. 如图所示，把 3×4 的矩形分成如下 5 个部分，由勾股定理可以算得每个部分的任两点之间的距离不大于$\sqrt{5}$. 从而命题得证.



第 4 题

5. 对每个 $n\in A$，由于 $2n+2\in B$，故 $2n+2\leqslant 100$，即 $n\leqslant 49$.

将$\{1, 2, \cdots, 49\}$分成如下 33 个集合：

$\{2k-1, 4k\}$, $k=1, 2, \cdots, 12$;

$\{2k-1\}$, $k=13, 14, \cdots, 25$;

$\{2, 6\}$, $\{10, 22\}$, $\{14, 30\}$, $\{18, 38\}$;

$\{26\}$, $\{34\}$, $\{42\}$, $\{46\}$.

若 $|A|>33$，则根据抽屉原理，上述 33 个集合中必有一个二元集包含于 A，即存在 $n\in A$ 使 $2n+2\in A$，故 $2n+2\in A\cap B$，矛盾. 从而$|A|\leqslant 33$，故 $|A\cup B|\leqslant 66$.

另一方面，如取

$$A=\{1, 3, 5, \cdots, 49, 2, 10, 14, 18, 26, 34, 42, 46\},$$
$$B=\{2n+2 \mid n\in A\},$$

则 A, B 满足题设，且 $|A\cup B|=66$.

综上可知 $|A\cup B|_{\max}=66$.

6. 不妨将语文、数学分别考 i 分、j 分的同学的成绩记为有序整数对(i, j)，其中 $A=\{(i, j) \mid 0\leqslant i\leqslant 100, 0\leqslant j\leqslant 100, i, j\in \mathbf{N}\}$ 包含所有可能的成绩.

对 $k=0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm100$，这 201 个集合 $A_k=\{(i, j) \mid (i, j)\in A, j=i+k\}$ 的并集为 A，且两两交集为空.

若有 401 位同学参加考试，由于 $A_{100}=\{(0, 100)\}$，$A_{-100}=\{(100, 0)\}$ 为单元集，故至少有 399 人的成绩属于某个 A_k $(-99\leqslant k\leqslant 99)$，根据抽屉原理，至少有 3 人的成绩属于同一集合，按照定义可将他们排列为甲、乙、丙，使甲比乙好，乙比丙好.

另一方面，若 400 位同学的考试成绩构成集合

$$A=\{(i, j) \mid (i, j)\in A, \max\{i, j\}\geqslant 99\},$$

那么不存在三位同学甲、乙、丙，使甲比乙好，乙比丙好.

综上所述，n 的最小值为 401.

7. 记 $M=\{1, 2, \cdots, 50\}$.

引理：每个 $i \in M$ 至少出现在 15 个行与列中.

证明：设 $i \in M$ 出现在 x 个行中，由抽屉原理，有某一行出现了至少 $\left\lceil \frac{50}{x} \right\rceil$ 次，从而含 i 的行数与列数之和 $S_i \geqslant x + \frac{50}{x} \geqslant 2\sqrt{50} > 14$，故引理成立.

以下对每个 $i \in M$ 标出有它出现的一切行与列，当 i 取遍 M 中元素时，至少标出了 $50 \times 15 = 750$ 个行与列，但表格只有 $50 + 50 = 100$ 个行与列，从而根据抽屉原理，必有某个行或列被标了不少于 8 次，即它包含了至少 8 个不同的数.

8. 证法一　显然每个 $S(i, j) \in \mathbf{N}^*$. 下证对任意 $n_0 \in \mathbf{N}^*$，存在 $S(i, j) = n_0$.

用 S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 考虑 $10n_0 + 10$ 个前 n 项和

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_{10n_0+10}, \quad ①$$

由题设，$S_{10n_0+10} = \sum_{k=1}^{n_0+1} (a_{10k-9} + a_{10k-8} + \cdots + a_{10k}) \leqslant 19(n_0 + 1)$.

另外，考虑如下 $10n_0 + 10$ 个正整数：

$$S_1 + n_0 < S_2 + n_0 < \cdots < S_{10n_0+10} + n_0, \quad ②$$

显然 $S_{10n_0+10} + n_0 \leqslant 20n_0 + 19$.

这样，①，②中出现 $20n_0 + 20$ 个正整数，且都不超过 $20n_0 + 19$，由抽屉原理，必有两个相等. 由于①中各数两两不等，②中各数也两两不等，故存在 $i, j \in \mathbf{N}^*$，使得 $S_j = S_i + n_0$，即 $i < j$ 满足 $S(i, j) = S_j - S_i = n_0$.

所以，所有 $S(i, j)$ 构成的集合等于 $\mathbf{N}^*$.

证法二　显然每个 $S(i, j) \in \mathbf{N}^*$. 对任意 $n_0 \in \mathbf{N}^*$，构造 $19n_0$ 个二元集合

$$A_{pq} = \{2n_0 p + q, (2n_0 p + q) + n_0\},\ p = 0, 1, 2, \cdots, 18,$$
$$q = 1, 2, \cdots, n_0,$$

则
$$\bigcup_{p=0}^{18} \bigcup_{q=1}^{n_0} A_{pq} = \{1, 2, \cdots, 38n_0\}.$$

用 S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则

$$1 \leqslant S_1 < S_2 < \cdots < S_{20n_0} = \sum_{k=1}^{2n_0} (a_{10k-9} + a_{10k-8} + \cdots + a_{10k}) \leqslant 38n_0.$$

根据抽屉原理，必存在两个数 S_i, S_j，$1 \leqslant i < j \leqslant 20n_0$ 属于同一个二元集 A_{pq}，由 A_{pq} 的取法可知，$S(i, j) = S_j - S_i = n_0$.

所以，所有 $S(i, j)$ 构成的集合等于 $\mathbf{N}^*$.

9. 记 a_k 除以 m 所得余数为 $b_k(0\leqslant b_k\leqslant m-1)$，$k=1, 2, \cdots$. 考虑 m^3+1 个三元数组

$$(b_1, b_2, b_3), (b_2, b_3, b_4), \cdots, (b_{m^3+1}, b_{m^3+2}, b_{m^3+3}),$$

由于上述三元数组的不同取值最多为 m^3 个，由抽屉原理知，其中一定有两组相同，不妨设

$$(b_i, b_{i+1}, b_{i+2})=(b_j, b_{j+1}, b_{j+2}), (1\leqslant i<j\leqslant m^3+1).$$

由 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+a_{n-3}$，$n=4, 5, \cdots$ 得

$$b_i\equiv b_{i-1}+2b_{i-2}+b_{i-3}(\operatorname{mod} m), i=4, 5, \cdots \quad ①$$

反复应用①得

$$b_{j+p}=b_{i+p}, p\geqslant -(i-1). \quad ②$$

令 $n=j-i$，在②中令 $p=-(i-1)$，$-(i-2)$，$-(i-3)$ 可得

$$b_{n+1}=b_1=1, b_{n+2}=b_2=1, b_{n+3}=b_3=3.$$

于是

$$b_n=b_{n+3}-2b_{n+2}-b_{n+1}=0.$$

从而 $m\mid a_n$.

10. (1) 考虑圆内接正五边形，由于每个顶点染两种颜色之一，根据抽屉原理，一定存在三个同色顶点，而它们必构成等腰三角形.

(2) 如果圆周上依次有 $N+1$ 个点 A_1，A_2，$\cdots$，A_{N+1} 满足：对于 i $(1\leqslant i\leqslant N)$，$\overparen{A_iA_{i+1}}$ 的弧长都等于 $a>0$，则称为一组点.

将半圆分为 N^2+1 段弧 L_i $(1\leqslant i\leqslant N^2+1)$. 令 a 充分小，则可在每段弧 L_i 上取一组点，由抽屉原理，这组点中必有两点同色，且可用数组 (c_i, l_i) 表示，其中，c_i 代表这两点的 N 种颜色之一，l_i 代表这两点对应的 N 种可能的弧长之一. 不同的数组 (c_i, l_i) 只有 N^2 种，由抽屉原理，一定存在 $i\neq j$，使 $(c_i, l_i)=(c_j, l_j)$，于是这两组中存在四点同色，且构成等腰梯形.

习　题　5

1. 设不出现数码 4，5，$\cdots$，9，0 的全体 n 位数组成集合 I.

对 $k=1, 2, 3$，记 I 中不含数码 k 的 n 位数全体组成集合 A_k. 显然，满足条件的数的全体组成集合 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$.

由于

$$|I|=3^n,\ |A_1|=|A_2|=|A_3|=2^n,$$
$$|A_1\cap A_2|=|A_2\cap A_3|=|A_3\cap A_1|=1,\ |A_1\cap A_2\cap A_3|=0,$$

由容斥原理得

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|&=|I|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|\\&\quad+|A_2\cap A_3|+|A_3\cap A_1|-|A_1\cap A_2\cap A_3|\\&=3^n-3\cdot 2^n+3.\end{aligned}$$

故所求 n 位数有 $3^n-3\cdot 2^n+3$ 个.

2. 设 $a_{2005}=n$. 记 $s=\{1,2,\cdots,n\}$, $A_i=\{k\mid k\in s$ 且 k 被 i 整除$\}$. A_i 在 s 中的补集为 $\overline{A_i}$ $(i=3,4,5)$.

$$\begin{aligned}2005&=|(\overline{A}_3\cap\overline{A}_4\cap\overline{A}_5)\cup A_5|\\&=|\overline{A}_3\cap\overline{A}_4\cap\overline{A}_5|+|A_5|\\&=|s|-|A_3|-|A_4|-|A_5|+|A_3\cap A_4|+|A_3\cap A_5|+|A_4\cap A_5|\\&\quad-|A_3\cap A_4\cap A_5|+|A_5|\\&=n-\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{12}\right]+\left[\frac{n}{15}\right]+\left[\frac{n}{20}\right]-\left[\frac{n}{60}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]\end{aligned}\qquad ①$$

利用 $x-1<[x]\leqslant x$, 由①得

$$\begin{cases}2005<n-\left(\frac{n}{3}-1\right)-\left(\frac{n}{4}-1\right)+\frac{n}{12}+\frac{n}{15}+\frac{n}{20}-\left(\frac{n}{60}-1\right)\\2005>n-\frac{n}{3}-\frac{n}{4}+\left(\frac{n}{12}-1\right)+\left(\frac{n}{15}-1\right)+\left(\frac{n}{20}-1\right)-\frac{n}{60}\end{cases}$$

解得 $3336\frac{2}{3}<n<3346\frac{2}{3}$. 所以 $3337\leqslant n\leqslant 3346$, 且 n 不为 3 和 4 的倍数.

故 $n=3337, 3338, 3340, 3341, 3343, 3345, 3346$.

$n=3341$ 代入①满足等式且 n 唯一知 $a_{2005}=3341$.

3. 已知: $2^{100}+2^{100}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|}$, 即 $1+2^{|C|-101}=2^{|A\cup B\cup C|-101}$, 所以 $|C|=101$, $|A\cup B\cup C|=102$.

由容斥原理: $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$, 所以 $|A\cap B\cap C|=102-(100+100+101)+$

$|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|=|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-199$，但 $|A\cup B\cup C|=102\geqslant|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=200-|A\cap B|$，所以，

$$|A\cap B|\geqslant 200-102=98,$$

同理：$|A\cap C|\geqslant 99$，$|B\cap C|\geqslant 99$，所以 $|A\cap B\cap C|\geqslant 98+99+99-199=97$.

当 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$，$B=\{3, 4, 5, \cdots, 102\}$，$C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, 101, 102\}$ 时，

$$|A\cap B\cap C|=|\{4, 5, \cdots, 100\}|=97.$$

综上，$|A\cap B\cap C|$ 的最小值为 97.

4. 设长方体占据的空间区域为 $\{(x, y, z)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c\}$.

将质点沿对角线从 $(0, 0, 0)$ 穿行到 (a, b, c) 的路径用参数 t 表示为

$$x=at, y=bt, z=ct, t\in[0, 1].$$

在 t 递增的过程中，当且仅当 x, y, z 中至少有一个为整数时，质点将穿入一个新的小正方体，这里 $t\in[0, 1)$. 设

$$A_x=\{t\mid t\in[0, 1), at\in\mathbf{Z}\},$$

$$A_y=\{t\mid t\in[0, 1), bt\in\mathbf{Z}\},$$

$$A_z=\{t\mid t\in[0, 1), ct\in\mathbf{Z}\},$$

则有 $|A_x|=a$，$|A_y|=b$，$|A_z|=c$.

又记 $d_1=(a, b)$，$d_2=(b, c)$，$d_3=(c, a)$，$d=(a, b, c)$，则

$$A_x\cap A_y=\{t\mid t\in[0, 1), d_1t\in\mathbf{Z}\},$$

从而 $$|A_x\cap A_y|=d_1.$$

同理得 $|A_y\cap A_z|=d_2$，$|A_z\cap A_x|=d_3$，$|A_x\cap A_y\cap A_z|=d$.

故由容斥原理得，质点一共穿过的小正方体个数为

$$\begin{aligned}|A_x\cup A_y\cup A_z|&=|A_x|+|A_y|+|A_z|-|A_x\cap A_y|-|A_y\cap A_z|-\\&\quad|A_z\cap A_x|+|A_x\cap A_y\cap A_z|\\&=a+b+c-(a, b)-(b, c)-(c, a)+(a, b, c).\end{aligned}$$

5. 不妨用符号 $|S_i|$ 来记区域 S_i 的面积. 由已知得

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{2001}| \leqslant 1001,\ |S_i| = 1\ (1 \leqslant i \leqslant 2001),$$

从而结合容斥原理可得

$$\begin{aligned}1001 &\geqslant |S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{2001}| \geqslant \sum_{i=1}^{2001} |S_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2001} |S_i \cap S_j| \\ &= 2001 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2001} |S_i \cap S_j| \\ &\geqslant 2001 - \frac{2001 \times 2000}{2} \cdot S,\end{aligned}$$

其中 $S = \max\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 2001} |S_i \cap S_j|$.

由上式立即可知 $S \geqslant \frac{1}{2001}$，故命题得证.

注　这是容斥原理的面积重叠形式.

6. 设配备新式武器的 5 个岗位序号从小到大依次是 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5. 作代换

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2 - a_1,\ x_3 = a_3 - a_2,$$
$$x_4 = a_4 - a_3,\ x_5 = a_5 - a_4,\ x_6 = 20 - a_5.$$

则有

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20,\ 2 \leqslant x_k \leqslant 5\ (1 \leqslant k \leqslant 5),\ 1 \leqslant x_6 \leqslant 4.$$

再作代换 $y_k = x_k - 1\ (1 \leqslant k \leqslant 5)$，$y_6 = x_6$，从而有

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 15,\ 1 \leqslant y_k \leqslant 4\ (1 \leqslant k \leqslant 6).$$

设 I 为不定方程 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 15$ 的正整数解全体，A_k 为 I 中有 $y_k > 4$ 成立的解的全体，则

$$\left|\bigcap_{k=1}^{6} \overline{A_k}\right| = |I| - \left|\bigcup_{k=1}^{6} A_k\right| = |I| - \sum_{k=1}^{6} |A_k| + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 6} |A_j \cap A_k|.$$

上式成立的原因是 $A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing$，因为 I 中不具有同时使 y_i，y_j，$y_k > 4$ 成立的解. 又根据对应原理可知上式中 $|I| = \mathrm{C}_{14}^5$，$|A_k| = \mathrm{C}_{10}^5$，$|A_j \cap A_k| = \mathrm{C}_6^5$，所以

$$\left|\bigcap_{k=1}^{6} \overline{A_k}\right| = \mathrm{C}_{14}^5 - 6\mathrm{C}_{10}^5 + \mathrm{C}_6^2 \mathrm{C}_6^5 = 2002 - 1512 + 90 = 580.$$

上面求得了 5 个岗位的选取方法数. 考虑到 5 种新式武器在 5 个岗位的

排列方法有 $5! = 120$ 种，故总共配备新式武器的方案数为

$$580 \times 120 = 69\,600.$$

7. 设 P_0 是满足 $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的一切有序集组 $(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ 的集合；对 $1 \leqslant i \leqslant m$，设 $P_i = \{(A_1, A_2, \cdots, A_m) \in P_0 \mid A_i = \varnothing\}$.

对每个 $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$x$ 关于集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 有 2^m 种不同的归属状况，其中使 $x \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ 的情况数为 $2^m - 1$. 根据乘法原理得，

$$|P_0| = (2^m - 1)^n.$$

对 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant m$，同理可得

$$|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_s}| = (2^{m-s} - 1)^n.$$

根据容斥原理有

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{k=1}^{m} \overline{P_k}\right| &= |P_0| - \sum_{i=1}^{m} |P_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |P_i \cap P_j| - \cdots + \\ &\quad (-1)^m |P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_m| \\ &= (2^m - 1)^n - C_m^1 (2^{m-1} - 1)^n + C_m^2 (2^{m-2} - 1)^n - \cdots + \\ &\quad (-1)^m C_m^m (2^{m-m} - 1)^n.\end{aligned}$$

上式最后一项等于零，所以

$$f(m, n) = \left|\bigcap_{k=1}^{m} \overline{P_k}\right| = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k (2^{m-k} - 1)^n.$$

注 关于本题，有个很有趣的结论：$f(m, n) = f(n, m)$. 事实上，考虑只含元素 0 和 1 的所有 $m \times n$ 矩阵，可以通过对应原理证明：每行、每列都出现 1 的矩阵个数既等于 $f(m, n)$，又等于 $f(n, m)$.

8. 记 $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. 我们将 I_n 看成全集，对集合

$$A_n = S(a) \cap I_n,\ B_n = S(b) \cap I_n,\ C_n = S(c) \cap I_n$$

用容斥原理，可得

$$\begin{aligned}|A_n \cup B_n \cup C_n| &= |A_n| + |B_n| + |C_n| - |A_n \cap B_n| - \\ &\quad |B_n \cap C_n| - |C_n \cap A_n| + |A_n \cap B_n \cap C_n|.\end{aligned}$$

上式中有 $|A_n \cup B_n \cup C_n| \leqslant n$，$|A_n \cap B_n \cap C_n| \geqslant 0$，又注意到

$$|A_n|\geqslant\left[\frac{n}{a}\right]>\frac{n}{a}-1,\ |B_n|\geqslant\left[\frac{n}{b}\right]>\frac{n}{b}-1,\ |C_n|\geqslant\left[\frac{n}{c}\right]>\frac{n}{c}-1,$$

所以

$$n>\left(\frac{n}{a}+\frac{n}{b}+\frac{n}{c}-3\right)-|A_n\cap B_n|-|B_n\cap C_n|-|C_n\cap A_n|.$$

由此可知

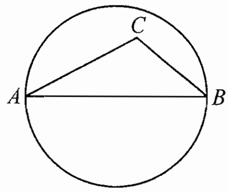
$$|A_n\cap B_n|+|B_n\cap C_n|+|C_n\cap A_n|>\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)n-3.$$

由于 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$，故当 $n\to\infty$ 时上式右端可以任意大，但对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，总有 $A_n\subseteq S(a)$，$B_n\subseteq S(b)$，$C_n\subseteq S(c)$，所以 $S(a)$，$S(b)$，$S(c)$中必有两个的交集为无限集.

习　题　6

1. 取 n 个选手中所赢局数最多的一位选手作 A（取极端!），由于 A 未全胜，所以存在选手 C 胜 A. 考虑 A 击败的选手全体，知其中必有选手 B 胜 C（否则，A 的败将也都是 C 的败将，从而 C 赢的局数超过了 A）. 于是所述的 A，B，C 即为所求.

2. 在这 100 个点中，每两点有一个距离，这有限个数$\left(\frac{100\times 99}{2}个\right)$中，一定有一个最大数，不妨设 A，B 两点间的距离最大，以线段 AB 为直径作一个圆，由题设，$AB\leqslant 1$，所以，此圆的半径$\leqslant\frac{1}{2}$.



(第 2 题)

在其余的 98 个点中任取一点 C，因为 $AB\geqslant AC$，$AB\geqslant BC$，又由题设知$\triangle ABC$是钝角三角形，如图所示，所以$\angle C$一定是钝角，于是点 C 位于以 AB 为直径的圆内，也就是说这 100 个点都被这个圆所覆盖.

3. 每一个点都连出了若干条线段（至多为 7 条），不妨设连出线段数目最多的点为 A，它共连出了 n 条线段.

如果所有 17 条线段都没有形成三角形，那么与 A 相连的 n 个点之间彼此都没有线段相连，而其余的$(7-n)$个点中，每一点所连出的线段条数不多于 n 条，因此，线段的总数目不超过

$$\begin{aligned}n+(7-n)n&=-n^2+8n\\&=-(n-4)^2+16\leqslant 16,\end{aligned}$$

这与已知的有 17 条线段矛盾. 从而命题成立.

注　其实本题的结论可加强为“三角形的数目不少于 4 个”，这个问题较难，留给有兴趣的读者思考.

4. 我们考虑(聚会者中)熟人最多的某个人(如果这样的人不止一个，那么任取其中一个)，记为 A，设 A 共认识 n 个人，这些熟人依次记为 B_1，B_2，…，B_n.

由于 B_1，B_2，…，B_n 中任意两个人 B_i 与 B_j 都认识 A，即是他俩的共同熟人，因此由题设推出了 B_i 与 B_j 的熟人数目不等. 此外，B_1，B_2，…，B_n 的熟人数目均不会超过 n(这里用到了 n 的“最大性”!)，于是他们的熟人数目恰好是

$$1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

现在已知有人至少认识 2012 人，这意味着 $n \geqslant 2012$，所以数 2012 在上述数列中出现，于是 B_1，B_2，…，B_n 中恰好有人有 2012 个熟人.

5. 由于凸多边形内任意一点 P 向各边所引的垂线只有有限条，故必存在一条垂线段是其中最短的，设为 PQ，PQ 与边 AB 垂直于 Q. 我们证明 Q 必在线段 AB 内.

假设 Q 不在线段 AB 内，由多边形的凸性知 Q 在线段 AB 端点或在多边形外，无论哪种情况，线段 PQ 必与多边形的某条不是 AB 的边有公共点.

不妨设 PQ 与边 MN 有公共点 R，此时 PR 与 MN 不垂直，故 P 到直线 MN 的距离 $d < PR \leqslant PQ$，这与先前最短垂线段的选取相矛盾！故假设不成立，因此垂足 Q 必在凸多边形的边 AB 内.

6. 考虑一条途经所有城市的最短的线路 l. 设 l 的长度为 N，起点和终点分别在 A 和 B，则在城市 A 和 B 的里程表上的数字均为 N. 对任何一座城市 C，C 必在 l 上，故 C 沿 l 到 A 和 B 之一的长度不大于 $\frac{N}{2}$，不妨设到 A 的长度不大于 $\frac{N}{2}$，则从 C 出发沿 l 到 A 然后沿 l 到 B 总长度不大于 $\frac{3N}{2}$ 且通过所有城市，这表明任何一座城市 C 的里程表上的数字不大于 $\frac{3N}{2}$，也不小于 N(因为 l 是最短线路)，得证.

7. 假设存在，由于整点多边形的面积一定是正整数或正整数的一半，故设其中面积最小的整点正 n 边形之一为 $A_1A_2\cdots A_n$，其边长为 a，外接圆半径为 R.

因为当 $n \geqslant 7$ 时，$\frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{3}$，故 $a < R$.

在坐标平面内作$\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$的位置向量$\overrightarrow{OB_i}$（$i=1, 2, \cdots, n$），则$B_1$，$B_2$，$\cdots$，$B_n$也是整点，且$\overrightarrow{OB_i}$，$\overrightarrow{OB_{i+1}}$的夹角相等（约定$A_{n+1}=A_1$，$B_{n+1}=B_1$），故$B_1B_2\cdots B_n$也为整点正$n$边形，它的外接圆半径为$a$，小于$A_1A_2\cdots A_n$的外接圆半径$R$，故$B_1B_2\cdots B_n$是面积比$A_1A_2\cdots A_n$更小的整点正$n$边形，矛盾.

所以不存在整点正n（$n\geqslant 7$）边形.

注 本题运用无穷递降思想求解，即在假设存在的前提下，构造一个比原先更小的整点正n边形，但整点多边形面积不能无限小，从而导出矛盾. 最后用极端原理进行表达.

8. 假设存在不全为0的2007个整数满足条件，不妨取出其中一组，它们按逆时针顺序依次为x_1，x_2，$\cdots$，x_{2007}，且使$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{2007}|$达到最小可能正值（正整数集合中必存在最小数）.

根据条件可得：圆周上任意相邻5个数之和是其中两个数之和的3倍，因此对$i=1, 2, \cdots, 2007$，都有

$$x_i+x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}+x_{i+4}\equiv 0 \pmod 3,$$

从而可知$x_i\equiv x_{i+5}\pmod 3$（约定当$j\equiv k\pmod{2007}$时，有$x_j=x_k$）. 又5和2007互素，故对一切$i=1, 2, \cdots, 2007$，有$x_i\equiv x_1\pmod 3$. 此时由于

$$x_i+x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}+x_{i+4}\equiv 5x_1\equiv 0 \pmod 3,$$

故$x_1\equiv 0\pmod 3$，因而x_1，x_2，$\cdots$，x_{2007}都是3的倍数.

设$y_i\equiv\dfrac{x_i}{3}$，$i=1, 2, \cdots, 2007$，则y_1，y_2，$\cdots$，y_{2007}也是一组满足条件的整数，但$|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_{2007}|<|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{2007}|$，这与$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_{2007}$的取法矛盾. 故假设不成立.

所以这2007个数都是0.

9. 设m是使m^2+m+n为合数的最小正整数，由已知得，$m>\sqrt{\dfrac{n}{3}}$.

若$m\leqslant n-2$，则$m^2+m+n\leqslant(n-2)(n-1)+n<n^2$.

令p是m^2+m+n的最小素因子，则$p\leqslant\sqrt{m^2+m+n}<n$.

(1) 若$m\geqslant p$，则$p\mid(m-p)^2+(m-p)+n$，又$(m-p)^2+(m-p)+n\geqslant n>p$，这与$m$是使$m^2+m+n$为合数的最小正整数矛盾.

(2) 若$m\leqslant p-1$，则

$$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n=p^2-2p(m+1)+m^2+m+n$$

被 p 整除，且$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n$ 大于 p，故为合数. 根据 m 的最小性可知 $p-1-m\geqslant m$，所以

$$2m+1\leqslant p\leqslant\sqrt{m^2+m+n},$$

平方整理得 $3m^2+3m+1\leqslant n$，但 $m>\sqrt{\frac{n}{3}}$，故 $3m^2+3m+1>3m^2>n$，矛盾！

所以对所有整数 k，$0\leqslant k\leqslant n-2$，$k^2+k+n$ 是素数.

注 在反证法假设下，找到最小的 m 和此时 m^2+m+n 的最小素因子 p，通过调整得到更小的，因而矛盾！

习 题 7

1. 因为

$$\begin{aligned}&b_1+b_2+\cdots b_{27}\\=&|a_1-a_2+a_3|+|a_4-a_5+a_6|+\cdots+|a_{79}-a_{80}+a_{81}|\\\equiv&a_1-a_2+a_3+a_4-a_5+a_6+\cdots+a_{79}-a_{80}+a_{81}\\\equiv&a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{79}+a_{80}+a_{81}\pmod 2,\end{aligned}$$

所以，将 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{81}$变换为 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{27}$，并不改变它们的和的奇偶性，因此经过多次变换后依然如此. 所以

$$\begin{aligned}x&\equiv a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{81}=1+2+3+\cdots+81\\&=41\times81\equiv1\pmod 2,\end{aligned}$$

即 x 为奇数.

2. 先证 n 为偶数. 用反证法.

假设 n 为奇数，则由 $a_1a_2\cdots a_n=n$ 知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为奇数，故

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\equiv n\equiv1\pmod 2,$$

与 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 矛盾. 故 n 为偶数.

再证 $4\mid n$. 仍用反证法. 如若不然，则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有且仅一个偶数，故

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\equiv n-1\equiv1\pmod 2,$$

仍与 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 矛盾. 故 $4\mid n$.

3. 1) ①式中共有 6 项，每项的值都是奇数($+1$ 或-1)，所以它们的代数

和为偶数.

2）显然，①式的值$\leqslant 6$，但它取不到 6 这个值，事实上，在

$$rvz,\ -rwy,\ -suz,\ swx,\ tuy,\ -tvx$$

这六项中，至少有一项是-1，要证明这一点，将上面这 6 项相乘，积是

$$-(rstuvwxyz)^2=-1.$$

所以六项中，至少一项是-1，这样，六项和至多是

$$5-1=4.$$

在 u，x，y 为-1，其他字母为 1 时，①式的值是 4，所以①的最大值为 4.

4. 不能作出这样的安排，为此，将 B 表中的各数去掉绝对值符号，所得到的表格记为表 C：

c_{11}	c_{12}	c_{13}
c_{21}	c_{22}	c_{23}
c_{31}	c_{32}	c_{33}

表 C

则

$$c_{11}=(a_{11}+a_{12}+a_{13})-(a_{11}+a_{21}+a_{31}),$$
$$c_{12}=(a_{11}+a_{12}+a_{13})-(a_{12}+a_{22}+a_{32}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$c_{33}=(a_{31}+a_{32}+a_{33})-(a_{13}+a_{23}+a_{33}),$$

易见，$c_{11}+c_{12}+\cdots+c_{33}=0$，故 C 表中有偶数个奇数，因为 $b_{ij}=|c_{ij}|$，故 b_{ij} 与 c_{ij} 同奇偶，所以 B 表中也有偶数个奇数，但 1，2，…，9 中有奇数个奇数，因此不能作出这样的安排.

5. 若 n 为奇数，则所有正约数均为奇数，从而 $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$ 为偶数，不可能等于 n. 故 n 为偶数，从而 $d_1=1$，$d_2=2$.

如果 n 是 4 的倍数，那么 d_3，d_4 中有一个等于 4，另一个必须为奇数，此时 $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2\equiv 2 \pmod 4$，不可能等于 n. 因此 $n=2m$，m 为奇数.

显然 d_3 为 m 的最小奇质因数，则 d_4 为偶数，故 d_4 必为除 2 之外 n 的最小偶约数，从而 $d_4=2d_3$.

以下可知 $n=1^2+2^2+d_3^2+4d_3^2=5(1+d_3^2)$，故 5 是 n 的约数，因此 d_3，d_4 不可能是 3 和 6，只能是 5 和 10，于是 $n=1^2+2^2+d_3^2+4d_3^2=5(1+5^2)=130$.

经检验，$n=130$ 满足题意.

6. 分两类情况讨论：

（1）若 n 为奇数，则 $n\geqslant 3$，设 $n=2k+1\ (k\in \mathbf{N}^*)$. 因为在排列 s 中至少有一个数与 $k+1$ 相邻，它与 $k+1$ 的差的绝对值不大于 k，故 $f(s)\leqslant k$；另一方面，对

排列$(k+1, 1, k+2, 2, \cdots, 2k, k, 2k+1)$而言，$f(s)=k=\dfrac{n-1}{2}$.

(2) 若 n 为偶数，设 $n=2k$ $(k\in\mathbf{N}^*)$，同理可知，数 $k+1$ 与其相邻数之差的绝对值不大于 k，故 $f(s)\leqslant k$；另一方面，对排列$(k+1, 1, k+2, 2, \cdots, 2k, k)$而言，$f(s)=k=\dfrac{n}{2}$.

综上所述，$f(s)$的最大值为$\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

7. 由已知得：数列$\{a_n\}$中每项都是大于 1 的正整数. 下用反证法证明结论：

先假设$\{a_n\}$中只有有限项为奇数，则其中必有最后一项，不妨设为 a_m. 于是对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 a_{m+n}是偶数.

设 $a_{m+1}=2^p\cdot q$，其中 $p\in\mathbf{N}^*$，q 为奇数，则由递推式可知

$$a_{m+2}=\left[\frac{3a_{m+1}}{2}\right]=3\cdot 2^{p-1}\cdot q,$$

$$a_{m+3}=\left[\frac{3a_{m+2}}{2}\right]=3^2\cdot 2^{p-2}\cdot q,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{m+p+1}=\left[\frac{3a_{m+p}}{2}\right]=3^p\cdot q.$$

这表明 a_{m+p+1}为奇数，与假设矛盾.

再假设$\{a_n\}$中只有有限项为偶数，则其中必有最后一项，不妨设为 a_l. 于是对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 a_{l+n}是大于 1 的奇数. 可设 $a_{l+1}-1=2^p\cdot q$，其中 $p\in\mathbf{N}^*$，q 为奇数. 由递推式可知

$$a_{l+2}=\left[\frac{3a_{l+1}}{2}\right]=\left[3\cdot 2^{p-1}\cdot q+\frac{3}{2}\right]=3\cdot 2^{p-1}\cdot q+1,$$

$$a_{l+3}=\left[\frac{3a_{l+2}}{2}\right]=3^2\cdot 2^{p-2}\cdot q+1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{l+p+1}=\left[\frac{3a_{l+p}}{2}\right]=3^p\cdot q+1.$$

这表明 a_{l+p+1}为偶数，与假设矛盾.

综上所述，命题成立.

8. 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的素因数分解，则 n 的所有正因子之和可表示

为 $(1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{\alpha_k})$.

若它是 2 的幂,则每个因子 $f_i=1+p_i+\cdots+p_i^{\alpha_i}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 都是 2 的幂,从而所有的 p_i, α_i 均为奇数.

若有某个 $\alpha_i>1$,则

$$f_i=(1+p_i)(1+p_i^2+p_i^4+\cdots+p_i^{\alpha_i-1}),$$

后一个因式必须为偶数,从而$\frac{\alpha_i-1}{2}$为奇数,于是进一步可得:$1+p_i^2$ 也是 f_i 的因子.

由于 $1+p_i$ 与 $1+p_i^2$ 均为 2 的幂,所以$(1+p_i)\mid(1+p_i^2)$,但

$$1+p_i^2=(1+p_i)(p_i-1)+2,$$

故$(1+p_i)\mid 2$,矛盾.因此必有 $\alpha_i=1$ $(i=1,2,\cdots,k)$.

从而 n 的正因子个数是 2 的幂.

9. 用数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n+1}分别表示这 $2n+1$ 个袋中的球的个数.显然,a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n+1}是非负整数,不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n+1}$.于是问题转化为:有 $2n+1$ 个非负整数,如果从中任意取走一个数,剩下的 $2n$ 个数可以分成两组,每组 n 个,和相等,证明这 $2n+1$ 个数全相等.

令 $A=a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}$,则对每个 i $(1\leqslant i\leqslant 2n+1)$, $A-a_i$ 都是偶数(否则剩下的数不能分成和数相等的两部分).从而 a_i 与 A 有相同的奇偶性.a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n+1}也具有相同的奇偶性.

易知把 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n+1}中的每一个都减去 a_1 后所得到的 $2n+1$ 个数

$$0,\ a_2-a_1,\ a_3-a_1,\ \cdots,\ a_{2n+1}-a_1$$

也满足题设性质(即从中任意取走一数,剩下的能分成和数相等的两部分).因为 a_i-a_1 $(i=2,3,\cdots,2n+1)$ 都是偶数,从而

$$0,\ \frac{a_2-a_1}{2},\ \frac{a_3-a_1}{2},\ \cdots,\ \frac{a_{2n+1}-a_1}{2}$$

这 $2n+1$ 个数也满足题意,故也都是偶数.

把它们再都除以 2,这个过程不可能永远继续下去,除非

$$a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1},$$

所以,每个袋中的球数相等.

习　题　8

1. 设 $S_{\triangle PP_2P_3}=S_1$, $S_{\triangle PP_3P_1}=S_2$, $S_{\triangle PP_1P_2}=S_3$.

易知 $\dfrac{P_1P}{PQ_1}=\dfrac{S_{\triangle P_1P_2P}}{S_{\triangle PP_2Q_1}}=\dfrac{S_{\triangle P_1P_3P}}{S_{\triangle PP_3Q_1}}$，故

$$\frac{P_1P}{PQ_1}=\frac{S_{\triangle P_1P_2P}+S_{\triangle P_1P_3P}}{S_{\triangle PP_2Q_1}+S_{\triangle PP_3Q_1}}=\frac{S_2+S_3}{S_1}.$$

同理可得

$$\frac{P_2P}{PQ_2}=\frac{S_3+S_1}{S_2},\ \frac{P_3P}{PQ_3}=\frac{S_1+S_2}{S_3}.$$

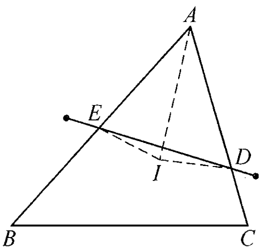
由对称性，不妨设 $S_1\geqslant S_2\geqslant S_3$，则有 $\dfrac{P_1P}{PQ_1}\leqslant 2$，$\dfrac{P_3P}{PQ_3}\geqslant 2$.

2. 设直线 l 平分 $\triangle ABC$ 的周长.

如果 l 过一个顶点，例如过顶点 A，则不难知道必有 $AB=AC$，从而 l 过内心 I.

如果 l 经过 $\triangle ABC$ 的两条边，设它与 AB、AC 交于点 E、D. 我们证明 $S_{\triangle IDE}=0$.

设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，p 为半周长，则



（第 2 题）

$$AE+AD=p,$$

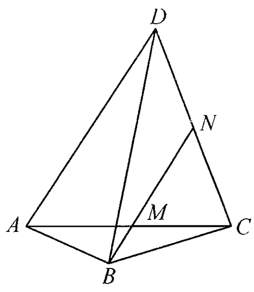
$$S_{\triangle AIE}+S_{\triangle AID}=\frac{1}{2}r\cdot AE+\frac{1}{2}r\cdot AD=\frac{1}{2}rp=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

但 $S_{\triangle AED}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，从而 $S_{\triangle IDE}=0$.

3. 设 $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CD}=r\ (0<r<1)$.

不妨设 $S_{\triangle ABC}=1$，则由已知条件可得

$$S_{\triangle ABD}=3,\ S_{\triangle BCD}=4,\ S_{\triangle ACD}=3+4-1=6.$$



（第 3 题）

从而有

$$S_{\triangle BMC}=\frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{MC}{AC}=1-r,$$

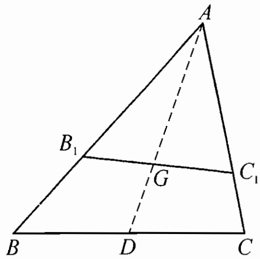
$$S_{\triangle MNC}=\frac{6S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ACD}}=6\cdot\frac{MC}{AC}\cdot\frac{CN}{CD}=6r(1-r),$$

$$S_{\triangle NBC}=\frac{4S_{\triangle NBC}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{4CN}{CD}=4r.$$

因此 $$4r=S_{\triangle NBC}=S_{\triangle MNC}+S_{\triangle BMC}=6r(1-r)+1-r,$$

化简得 $6r^2-r-1=0$，又 $0<r<1$，故 $r=\frac{1}{2}$，即 M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点.

4. 作边 BC 上的中线 AD. 设$\triangle ABC$ 的面积为 1，$\triangle AB_1C_1$ 的面积为 S. 我们用两种方法计算 S.



（第 4 题）

一方面，$S=\frac{S}{1}=\frac{AB_1\cdot AC_1}{AB\cdot AC}=\lambda\mu$. ①

另一方面，$S=S_{\triangle AB_1G}+S_{\triangle AGC_1}$.

与①类似地，$S_{\triangle AB_1G}=\frac{\lambda}{3}$，$S_{\triangle AGC_1}=\frac{\mu}{3}$，

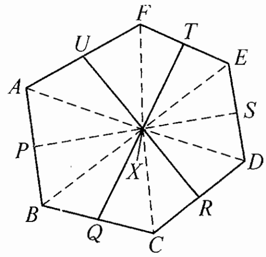
所以 $$S=\frac{\lambda+\mu}{3}.$$

综合两方面可得 $$\lambda\mu=\frac{\lambda+\mu}{3},$$

两边同乘$\frac{3}{\lambda\mu}$，即证.

5. 设 QT，RU 交于点 X. 连接 XA，XB，XC，XD，XE，XF，XP，XS. 由已知得

$$S_{ABQTF}=\frac{1}{2}S_{ABCDEF}=S_{ABCRU},$$



（第 5 题）

两边减去 S_{ABQXU}，得

$$S_{XTFU}=S_{XQCR}.$$

又

$$S_{XEFA}=S_{\triangle XEF}+S_{\triangle XFA}=2S_{\triangle XTF}+2S_{\triangle XFU}=2S_{XTFU},$$

$$S_{XBCD}=S_{\triangle XBC}+S_{\triangle XCD}=2S_{\triangle XQC}+2S_{\triangle XCR}=2S_{XQCR},$$

所以 $S_{XEFA}=S_{XBCD}$. 结合 $S_{\triangle XAP}=S_{\triangle XBP}$，$S_{\triangle XES}=S_{\triangle XDS}$ 可知，折线 PXS 平分凸六边形 $ABCDEF$ 的面积. 考虑到 PS 也平分 $ABCDEF$ 的面积，故 PS 过点 X.

从而 PS，QT，RU 三线共点.

6. 记原凸四边形为 $ABCD$，其中 A，B，C，D 的像点分别为 A'，B'，C'，D'，AC 与 BD 交于点 P.

设 AC 与 BD 的夹角为 α，$A'C'$ 与 $B'D'$ 的夹角为 β. 根据对称性，四边形 $A'B'C'D'$ 的对角线 $A'C'$ 与 $B'D'$ 过点 P，且 $A'C'=AC$，$B'D'=BD$，且 $\beta=3\alpha$ 或 $\pi-3\alpha$ 或 $3\alpha-\pi$，无论何种情形下均有 $\sin\beta=|\sin 3\alpha|=\sin\alpha\cdot|3-4\sin^2\alpha|$.

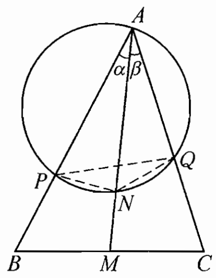
由四边形面积公式得

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha,\ S'=\frac{1}{2}A'C'\cdot B'D'\cdot\sin\beta$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha\cdot|3-4\sin^2\alpha|,$$

从而易知：$\frac{S'}{S}=|3-4\sin^2\alpha|<3.$

7. 连接 PQ，PN，NQ. 记 $\angle PAN=\alpha$，$\angle QAN=\beta$. 由于 M 为 BC 中点，故 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABM}=2S_{\triangle AMC}$，即

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha+\beta)=AB\cdot AM\cdot\sin\alpha=AM\cdot AC\cdot\sin\beta,$$



（第 7 题）

所以 $$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AC}{2AM},\ \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AB}{2AM}.\qquad ①$$

由正弦定理得

$$\frac{NP}{\sin\alpha}=\frac{NQ}{\sin\beta}=\frac{PQ}{\sin(\alpha+\beta)}.\qquad ②$$

因为 A，P，N，Q 四点共圆，由托勒密定理得

$$AN\cdot PQ=AP\cdot NQ+AQ\cdot NP,$$

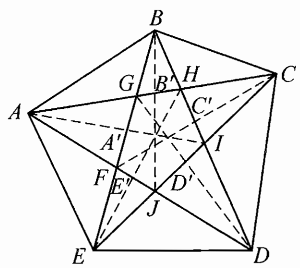
结合①，②可得

$$AN=AP\cdot\frac{NQ}{PQ}+AQ\cdot\frac{NP}{PQ}=\frac{AP\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}+\frac{AQ\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{AP\cdot AB}{2AM}+\frac{AQ\cdot AC}{2AM}.$$

从而 $AP\cdot AB+AQ\cdot AC=2AN\cdot AM.$

8. 由共边定理，有 $\frac{AB'}{B'C}=\frac{S_{\triangle ABJ}}{S_{\triangle CBJ}}$，其他的比例线段用同样的方法转化，即只须证明

$$\frac{S_{\triangle ABJ}}{S_{\triangle CBJ}}\cdot\frac{S_{\triangle CDG}}{S_{\triangle EDG}}\cdot\frac{S_{\triangle EAI}}{S_{\triangle BAI}}\cdot\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle DCF}}\cdot\frac{S_{\triangle DEH}}{S_{\triangle AEH}}=1.$$



（第 8 题）

因为

$$\frac{S_{\triangle ABJ}}{S_{\triangle BAI}}=\frac{S_{\triangle ABJ}}{S_{\triangle ABD}}\cdot\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BAI}}=\frac{AJ}{AD}\cdot\frac{BD}{BI},$$

用同样方法转化面积比，并消去上下相同的线段，只须证明：

$$\frac{AJ}{BI}\cdot\frac{BF}{CJ}\cdot\frac{CG}{DF}\cdot\frac{DH}{EG}\cdot\frac{EI}{AH}=1,$$

或

$$\frac{AJ}{CJ}\cdot\frac{BF}{DF}\cdot\frac{CG}{EG}\cdot\frac{DH}{AH}\cdot\frac{EI}{BI}=1.$$

利用正弦定理转换上式的线段比，只须证明

$$\frac{\sin\angle ECA}{\sin\angle CAD}\cdot\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle DBE}\cdot\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle ECA}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADB}\cdot\frac{\sin\angle DBE}{\sin\angle BEC}=1,$$

这显然成立. 证毕.

习　题　9

1. 因为每次变换改变表中 4 个数的符号，但是 $(-1)^4=1$，因此变换不会改变所变动的那行(或列)中 4 个数乘积的符号.

开始时，数表中 16 个数的乘积是负数(整体)，于是无论作多少次变换，表中的 16 个数的乘积总是负的. 因而，要使表中的数全变为正数，这是办不到的.

2. 我们考虑这 6 个数的乘积：

$$\begin{aligned}&(a_1a_5a_9)(a_2a_6a_7)(a_3a_4a_8)(-a_3a_5a_7)(-a_1a_6a_8)(-a_2a_4a_9)\\=&-(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9)^2<0,\end{aligned}$$

所以，这 6 个数中至少有一个是负数.

3. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_t\}$.

A 中元素个数为 t，二元子集数为 C_t^2，故至多有 $t+\mathrm{C}_t^2=\dfrac{t(t+1)}{2}$ 个正整数值出现在 A 中一个元素或两个元素的和所对应的值中.

由题意得，$\dfrac{t(t+1)}{2}\geqslant|S|=21\Rightarrow t\geqslant 6$.

若 $t=6$，则 S 中每个元素恰能表示成 $a_i(i=1,2,\cdots,6)$ 或 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant 6)$ 形式中的唯一一种方式.

记 $B=\{a_i+a_j\mid 1\leqslant i<j\leqslant 6,\ i,j\in\mathbf{N}^*\}$. 此时计算 $\sum\limits_{x\in S}x$.

一方面，$\sum\limits_{x\in S}x=1+2+\cdots+21=231$；

另一方面，

$$\sum_{x\in S}x=\sum_{x\in A}x+\sum_{x\in B}x=\sum_{i=1}^{6}a_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6}(a_i+a_j)=\sum_{i=1}^{6}a_i+5\sum_{i=1}^{6}a_i=6\sum_{i=1}^{6}a_i,$$

这是偶数，因此矛盾！从而 $t \geqslant 7$.

又当 $t=7$ 时，取 $A=\{1, 2, 3, 6, 10, 14, 18\}$，验证知该集合满足条件.

综上，集合 A 元素个数的最小值是 7.

4. 设 $S=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$，则由已知得 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 均满足方程 $x^2-Sx-1=0$.

由此可知 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 取值于 $\dfrac{S\pm\sqrt{S^2+4}}{2}$，所以

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{5S+\varepsilon\sqrt{S^2+4}}{2},$$

其中 $\varepsilon\in\{\pm1, \pm3, \pm5\}$. 从而有 $S=\dfrac{5S+\varepsilon\sqrt{S^2+4}}{2}$，即 $3S=-\varepsilon\sqrt{S^2+4}$.

进一步由 $|3S|=|-\varepsilon\sqrt{S^2+4}|>|\varepsilon S|$ 可知只能是 $\varepsilon=\pm1$，故易得 $S=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $S=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$x_1^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1-1=0$，解得 $x_1=\sqrt{2}$ 或 $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；当 $S=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，同理得 $x_1=-\sqrt{2}$ 或 $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 x_1 的所有可能值为 $\pm\sqrt{2}$，$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

注 条件中的 5 个方程具有明显的循环特征，这就提示我们从整体考虑问题. 纵观全局，联想到引入辅助量 $S=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$，从而将原先具有 5 个变元的方程组转化为考虑"x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 可能取 $x^2-Sx-1=0$ 两根各多少次"的简单问题.

5. 假定有这样的可能性. 因二次三项式至多有两个实根，而 $2n$ 个实数 a_i, b_i 互不相同，所以每个二次三项式 $x^2-a_ix+b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 必含有两个不相等的实根 u_i, v_i，且 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 构成 $(u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 的一个排列.

对 $1\leqslant i\leqslant n$，由韦达定理知 $u_i+v_i=a_i$，$u_iv_i=b_i$. 所以，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i,$$

因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=0$.

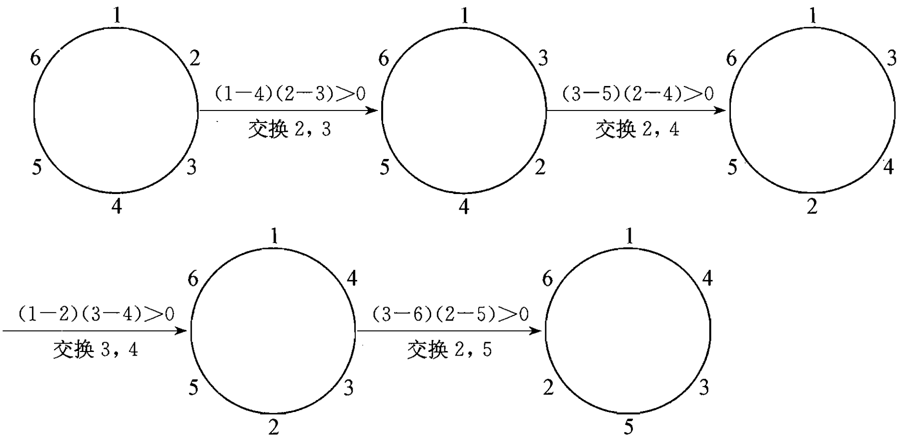
另一方面，还有 $u_i^2+v_i^2=(u_i+v_i)^2-2u_iv_i=a_i^2-2b_i$，从而，

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)=\sum_{i=1}^{n}(u_i^2+v_i^2)=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-2b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

这表明了 $\sum_{i=1}^{n}b_i^2=0$，于是所有 b_i 全为 0，矛盾.

因此不可能 a_i，$b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 中的每个数都是其中某个多项式的根.

6. (1) 答案是肯定的. 具体操作如下：



(2) 答案是肯定的. 考虑这 2006 个数的相邻两数乘积之和为 P.

开始时，$P_0=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+2005\times2006+2006\times1$，经过 $k(k\geqslant0)$ 次操作后，这 2006 个数的相邻两数乘积之和为 P_k，此时若圆周上依次相连的 4 个数 a，b，c，d 满足不等式 $(a-d)(b-c)>0$，即 $ab+cd>ac+bd$，交换 b，c 的位置后，这 2006 个数的相邻两数乘积之和为 P_{k+1}，有

$$P_{k+1}-P_k=(ac+cb+bd)-(ab+bc+cd)=ac+bd-ab-cd<0.$$

所以 $P_{k+1}-P_k\leqslant-1$，即每一次操作，相邻两数乘积的和至少减少 1，由于相邻两数乘积总大于 0，故经过有限次操作后，P 无法变得更小，此时对任意依次相连的 4 个数 a，b，c，d，一定有 $(a-d)(b-c)\leqslant0$.

7. 记数表中所有实数之和为 S，显然 $s_1+s_2+\cdots+s_n=t_1+t_2+\cdots+t_n=S$. 对 $k=0,1,\cdots,n-1$，在下标关于 n 同余的意义下，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i,\,i+k}=\sum_{i=1}^{n}(s_i-t_{i+k})=\sum_{i=1}^{n}s_i-\sum_{i=1}^{n}t_{i+k}=\sum_{i=1}^{n}s_i-\sum_{i=1}^{n}t_i=0,$$

因此 $a_{1,\,1+k}$，$a_{2,\,2+k}$，$\cdots$，$a_{n,\,n+k}$ 这 n 个数中至多只有 $n-1$ 个正数. 令 $k=0$，1，$\cdots$，$n-1$ 可知 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 中至多只有 $n(n-1)$ 个正数.

另一方面，若取如下数表，

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}$$

则容易验证

$$a_{1j}=s_1-t_j=-(n-1),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

$$a_{ij}=s_i-t_j=1,\ i=2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

此时 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 中正数个数为 $n(n-1)$.

综上可知 n^2 个数 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 中正数个数的最大值为 $n(n-1)$.

注　由于 a_{ij} 的值受到数表中第 i 行与第 j 列共 $2n-2$ 个数的影响(说明：其中第 i 行第 j 列位置的数的改变并不影响 a_{ij} 的值)，故先将 n^2 个数 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 按对角线分成 n 个组. 在每组中，整体考虑 n 个实数，推得它们的和为 0，因此容易看出每组最多只有 $n-1$ 个正数.

通常情况下，某些对象在一个整体中可能是相互制约的，因此将一个对象置于整体的视角下看待会比孤立地看待它获得更有用的信息.

习　题　10

1. 设原来电话号码的六位数为 $\overline{abcdef}$，则经过两次升位后电话号码的八位数为 $\overline{2a8bcdef}$. 根据题意，有 $81\times\overline{abcdef}=\overline{2a8bcdef}$.

记 $x=b\times10^4+c\times10^3+d\times10^2+e\times10+f$，于是

$$81\times a\times10^5+81x=208\times10^5+a\times10^6+x,$$

解得 $x=1250\times(208-71a)$.

因为 $0\leqslant x\leqslant10^5$，所以 $0\leqslant1250\times(208-71a)<10^5$，故 $\frac{128}{71}<a\leqslant\frac{208}{71}$.

因为 a 为整数，所以 $a=2$. 于是

$$x=1250\times(208-71\times2)=82500.$$

所以，小明家原来的电话号码为 282500.

2. 令 $f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{2009})$，则问题中要求的答案为 $f(x)$ 的展开式中，x 的奇次项的系数和. 故所求的答案为 $\frac{f(1)-f(-1)}{2}=$

$\frac{2^{2009}-0}{2}=2^{2008}$.

3. 证法一：原方程可以写为

$$m^2-(10n+7)m+25n^2-7n=0,$$

于是 $$\Delta=(10n+7)^2-4(25n^2-7n)=168n+49$$

是完全平方数.

取 $168n+49=49(12k+1)^2$，其中 k 是任意一个正整数，则 $n=42k^2+7k$. 于是

$$m=\frac{10n+7\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{10(42k^2+7k)+7\pm7(12k+1)}{2}$$
$$=210k^2-7k \text{ 或 } 210k^2+77k+7.$$

所以，存在无穷多对正整数 $(m,n)=(210k^2-7k,42k^2+7k)$（其中 k 是正整数）满足题设方程.

证法二：原方程可写为

$$(m-5n)^2=7(m+n),$$

所以可设

$$m+n=7x^2(x \text{ 是正整数}),\tag{①}$$

取 $$m-5n=7x.\tag{②}$$

①－②得 $$6n=7x(x-1).$$

令 $x=6y$（y 是任意正整数），则 $n=42y^2-7y$. 于是

$$m=7\cdot36y^2-(42y^2-7y)=210y^2+7y.$$

所以，存在无穷多对正整数 $(m,n)=(210y^2+7y,42y^2-7y)$（其中 y 是任意正整数）满足题设方程.

4. 显然 $d^2(1)=1$，故 $n=1$ 时满足题意.

下面考虑 n 和 $d(n)$ 大于 1 的情况.

设 $d(n)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 $d(n)$ 的标准素因数分解，由已知得 n 的标准分解为 $n=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}$，从而又有 $d(n)=(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_k+1)$，即

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_k+1).\tag{①}$$

显然①右边为奇数，故 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为奇素数，所以

$$p_i^{\alpha_i}\geqslant3^{\alpha_i}=(1+2)^{\alpha_i}\geqslant1+2\alpha_i(i=1,2,\cdots,k),$$

且等号当且仅当 $p_i=3$，$\alpha_i=1$ 时成立.

因此，为使①成立，只能是 $k=1$，$p_1=3$，$\alpha_1=1$，即 $n=3^2=9$.

综上可知满足条件的正整数 n 是 1 和 9.

5. 设 $x=(\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_0.b_1b_2\cdots})_2$ 为 x 的标准二进制表示，则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有

$$[2^nx]=(\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_0b_1b_2\cdots b_n})_2\equiv b_n(\bmod 2),$$

考虑到 $b_n\in\{0,1\}$，故必有 $(-1)^{[2^nx]}=(-1)^{b_n}=1-2b_n$，从而

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2b_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n}=1-2\cdot(\overline{0.b_1b_2\cdots})_2\\&=1-2(x-[x])=1+2[x]-2x.\end{aligned}$$

6. 考虑到

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\ e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$
$$e^{i(x+y+z)}=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z),$$

结合已知条件可得

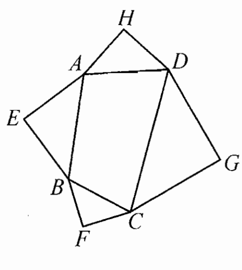
$$\begin{aligned}ae^{ix}+be^{iy}+ce^{iz}&=(a\cos x+b\cos y+c\cos z)+i(a\sin x+b\sin y+c\sin z)\\&=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z)=e^{i(x+y+z)}.\end{aligned}$$

上式两边乘以 $e^{-i(x+y+z)}$ 得

$$Z=ae^{-i(y+z)}+be^{-i(z+x)}+ce^{-i(x+y)}=1,$$

从而 $$\begin{cases}a\cos(y+z)+b\cos(z+x)+c\cos(x+y)=\operatorname{Re}Z=1,\\a\sin(y+z)+b\sin(z+x)+c\sin(x+y)=-\operatorname{Im}Z=0.\end{cases}$$

7. 用复数法. 设 A，B，C，D，E，F，G，H 分别对应复数 a，b，c，d，e，f，g，h. 不妨设 A，B，C，D 依逆时针排列，则 EG 所对应的复数



（第 7 题）

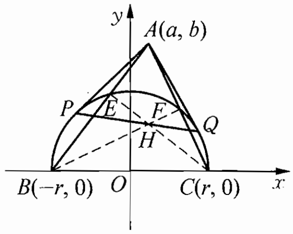
$$\begin{aligned}g-e&=(g-d)+(d-a)+(a-e)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}(c-d)+(d-a)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}(a-b)\\&=\frac{1+i}{2}(c-d)+(d-a)+\frac{1-i}{2}(a-b)\\&=\frac{-a-b+c+d}{2}+\frac{-a+b+c-d}{2}i.\end{aligned}$$

同理可求得 FH 所对应的复数

$$h-f=\frac{-b-c+d+a}{2}+\frac{-b+c+d-a}{2}\mathrm{i}.$$

所以 $h-f=(g-e)\mathrm{i}$，即 EG 与 FH 垂直且相等.

8. 本题是一个平面几何题，可以用纯几何的方法加以证明，这里，我们用解析法给出一个证明.



（第 8 题）

以直线 BC 为 x 轴，线段 BC 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系，设三角形 ABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(a, b)$，$B(-r, 0)$，$C(r, 0)$，其中 r 是圆 O 的半径，如图所示. 于是，圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$.

设点 P、Q 的坐标分别为 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，则切线 AP、BP 的方程为 $xx_1+yy_1=r^2$ 与 $xx_2+yy_2=r^2$，因为这两条切线都过 A 点，所以 $ax_1+by_1=r^2$，$ax_2+by_2=r^2$，即 P，Q 都在直线 $ax+by=r^2$ 上，此即直线 PQ 的方程.

设 BF 与 CE 是三角形 ABC 的两条高，因为直线 AC 的斜率为 $\frac{b}{a-r}$，所以直线 BF 的斜率为 $\frac{r-a}{b}$，故直线 BF 的方程为 $y=\frac{r-a}{b}(x+r)$，即

$$(a-r)x+by=r^2-ar; \tag{①}$$

同理可得，直线 CE 的方程为

$$(a+r)x+by=r^2+ar. \tag{②}$$

由①+②，得

$$ax+by=r^2, \tag{③}$$

即点 H 的坐标满足方程. 而③就是直线 PQ 的方程，所以，P，H，Q 三点共线.

9. 记 $x-[x]=\{x\}$，设 a，b 分别为 $\{\sqrt{2008}\}$ 与 $\{\sqrt{2009}\}$ 在二进制下的表示. 由于 $\sqrt{2008}$ 和 $\sqrt{2009}$ 是无理数，故 a，b 是不循环小数，而 f_n 的奇偶性取决于 a，b 小数点后第 n 位是否相同.

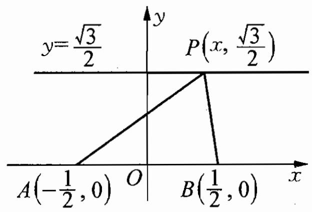
假设 f_1，f_2，…中只有有限个奇数，则存在某个 $n\in\mathbf{N}^*$，使 f_n，f_{n+1}，…均为偶数，即小数点后第 n 位起 a，b 是一样的，故 $a-b$ 实际上是有限小数，但

$a-b$ 显然是无理数，矛盾！再假设 f_1，f_2，… 中只有有限个偶数，则存在某个 $n\in\mathbf{N}^*$，使 f_n，f_{n+1}，… 均为奇数，即 a，b 在小数点后第 n 位起的每个数位上都不一样，于是 $a+b$ 在该数位上等于 1，这样 $a+b$ 是有限小数，但 $a+b$ 显然是无理数，矛盾！

从而原命题成立.

习　题　11

1. 因为 $\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|=$
$\left|\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|$
这可以看作直角坐标系中点 $P\left(x,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 到点 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 与点 $B\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的距离的差，如图所示.



（第 1 题）

根据三角形两边之差小于第三边及 $|AB|=1$，得

$$\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|<1.$$

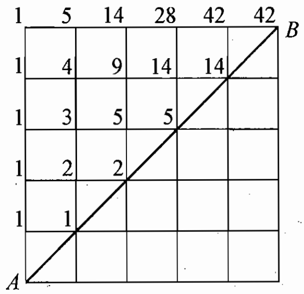
2. 考虑手持 5 元钞票的 5 个人在队中的位置，共 $C_{10}^5=252$ 种等概率的排队方式.

设 $p(m,n)$ 表示 m 个手持 5 元钞票、n 个手持 10 元钞票的人满足条件的排队方式数，则 $p(m,0)=1$. 当 $m<n$ 时，$p(m,n)=0$，且

$$p(m,n)=p(m,n-1)+p(m-1,n).$$

如图，$p(5,5)$ 等于从 A 到 B 不能穿过对角线的路径数，即 $p(5,5)=42$.

故所求的概率为 $\frac{42}{252}=\frac{1}{6}$.



（第 2 题）

3. 由韦达定理有 $\begin{cases}\alpha+\beta=-z_1,\\ \alpha\beta=z_2+m,\end{cases}$ 故

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=z_1^2-4z_2-4m,$$

所以 $|(\alpha-\beta)^2|=|z_1^2-4z_2-4m|=|16+20\mathrm{i}-4m|=4|m-(4+5\mathrm{i})|$.

另一方面，$|(\alpha-\beta)^2|=|\alpha-\beta|^2=28$，故 $|m-(4+5\mathrm{i})|=7$，即 m 在

以 $A(4, 5)$ 为圆心，以 7 为半径的圆上.

因为 $|OA|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}<7$，故原点 O 在上述圆内，连接 OA 延长交上述圆于 B，延长 AO 交上述圆于 C，则

$$|m|_{\max}=|OB|=\sqrt{41}+7,\ |m|_{\min}=|OC|=7-\sqrt{41}.$$

4. $f(x)$ 的图像与直线 $y=kx\ (k>0)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上无交点，在 $[0, \pi]$ 上恰有两个交点，因此在 $\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内必然相切，根据题意，切点的坐标可写为 $(\alpha, -\sin\alpha)$. 当 $x\in\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，由于 $f'(x)=(-\sin x)'=-\cos x$，故 $-\cos\alpha=\dfrac{-\sin\alpha}{\alpha}$，即 $\alpha=\tan\alpha$. 因此

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+\tan^2\alpha}{4\tan\alpha}=\frac{1+\alpha^2}{4\alpha}.$$

5. 构造 $\triangle ABC$，使 $AB=5$，$AC=4$，$BC=3$，显然 $\angle ACB=90°$.

以 AC 为一边向 $\triangle ABC$ 外作正三角形，再作该三角形的外接圆，与以 BC 为直径的圆交于 C，O 两点，连接 OA，OB，OC，则由平面几何知识得

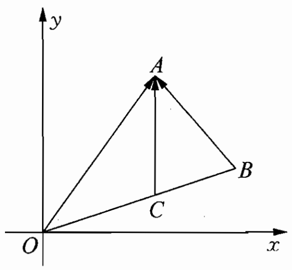
$$\angle BOC=90°,\ \angle AOC=120°,\ \angle AOB=150°.$$

设 $AO=x$，$BO=\dfrac{y}{\sqrt{3}}$，$CO=z$，由 $S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA}=S_{\triangle ABC}$ 得

$$\frac{1}{2}x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\sin 150°+\frac{1}{2}z\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}x\cdot z\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\times 3\times 4,\text{化简得}$$

$$xy+2yz+3xz=24\sqrt{3}.$$

6. 如图，在复平面内，点 A，B，C 对应的复数分别为 z_1，z_2，xz_2. 显然，点 C 在线段 OB 上. 向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 z_1-z_2. 向量 $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数为 z_1-xz_2. 由 $|z_1|\leqslant\alpha|z_1-z_2|$，得 $|\overrightarrow{OA}|\leqslant\alpha|\overrightarrow{BA}|$. 于是，



（第 6 题）

$$\begin{aligned}|z_1-xz_2|_{\max}&=|\overrightarrow{AC}|_{\max}=\max\{|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{BA}|\}\\&=\max\{|z_1|, |z_1-z_2|\}\\&=\max\{\alpha|z_1-z_2|, |z_1-z_2|\},\end{aligned}$$

故 $\lambda(\alpha)=\max\{\alpha, 1\}$.

7. 不妨设 $x_1>x_2>x_3$，$a\geqslant b\geqslant c$（此处两个等号不同时取到），由切比雪夫不等式得，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB_1}=x_1a+x_2b+x_3c>\frac{1}{3}(a+b+c)(x_1+x_2+x_3)=0$. 所以 $\cos\angle AOB_1>0$，又 O，A，B_1 不共线，故 $\angle AOB_1$ 为锐角.

另一方面，由切比雪夫不等式得，

$$x_3a+x_2b+x_1c<\frac{1}{3}(a+b+c)(x_3+x_2+x_1)=0,$$

故

$$\max\{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB_2},\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB_3}\}=\max\{x_1a+x_3b+x_2c,\ x_2a+x_1b+x_3c\}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}((x_1a+x_3b+x_2c)+(x_2a+x_1b+x_3c))=-\frac{1}{2}(x_3a+x_2b+x_1c)>0.$$

故 $\angle AOB_2$ 与 $\angle AOB_3$ 中至少有一个锐角.

综上，$\angle AOB_i(i=1,2,\cdots,6)$ 中锐角至少有两个.

8. 设 P，A，B，C 在复平面中分别对应复数 z_0，z_1，z_2，z_3. 令

$$f(z)=\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}+\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)},$$
$$g(z)=\frac{(z-z_1)^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_2)^2}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}+\frac{(z-z_3)^2}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}.$$

易验证 $f(z_i)=g(z_i)=1$，$i=1,2,3$，即 $f(z)-1=0$ 与 $g(z)-1=0$ 有至少三个复根，但 $f(z)-1$ 与 $g(z)-1$ 都是低于 3 次的多项式，从而 $f(z)\equiv1$，$g(z)\equiv1$.

由于

$$1=f(z_0)\leqslant\frac{|z_0-z_2|\cdot|z_0-z_3|}{|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|}+\frac{|z_0-z_3|\cdot|z_0-z_1|}{|z_2-z_3|\cdot|z_2-z_1|}+\frac{|z_0-z_1|\cdot|z_0-z_2|}{|z_3-z_1|\cdot|z_3-z_2|}$$
$$=\frac{PB\cdot PC}{cb}+\frac{PC\cdot PA}{ac}+\frac{PA\cdot PB}{ba},$$

故 $a\cdot PB\cdot PC+b\cdot PC\cdot PA+c\cdot PA\cdot PB\geqslant abc$，(1)成立；

类似地，由于

$$1=g(z_0)\leqslant\frac{|z_0-z_1|^2}{|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|}+\frac{|z_0-z_2|^2}{|z_2-z_3|\cdot|z_2-z_1|}+\frac{|z_0-z_3|^2}{|z_3-z_1|\cdot|z_3-z_2|}$$

$$=\frac{PA^2}{cb}+\frac{PB^2}{ac}+\frac{PC^2}{ba},$$

故 $a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2\geqslant abc$，(2)成立.

习　题　12

1. 圆上每 4 个点构成一个凸四边形，它的两条对角线（弦）交于一点，因此每 4 点组成的集合对应一个交点，由于没有三条弦交于一点，所以不同的 4 个点对应于不同的交点. 反之，设点 P 是弦 A_1A_3 与 A_2A_4 的交点，那么 P 是 4 点集 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 对应的点. 从而交点个数就是这 n 个点中取 4 点的取法总数 C_n^4.

2. 记集合 $A\subseteq\{1, 2, \cdots, n\}$ 的交替和为 $f(A)$. 约定 $f(\varnothing)=0$，不影响结果.

对每个 $X\subseteq\{1, 2, \cdots, n-1\}$，设 $Y=X\cup\{n\}=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中含有元素 n 的子集，其中 $n=a_1>a_2>\cdots>a_k\geqslant 1$，$k\in\mathbf{N}^*$. 则对集组 (X, Y) 有

$$\begin{aligned}f(Y)+f(X)&=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}a_i+\sum_{j=2}^{k}(-1)^{j}a_j\\&=n+\sum_{i=2}^{k}(-1)^{i-1}a_i-\sum_{j=2}^{k}(-1)^{j-1}a_j=n.\end{aligned}$$

由于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有子集可以分成 2^{n-1} 个这样的集组 (X, Y)，故所有这些交替和的总和为 $n\cdot 2^{n-1}$.

3. $\{1, 2, \cdots, n\}$ 共 C_n^r 个 r 元子集，下求这 C_n^r 个子集中最小数的总和.

对于 $P=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 r 元子集 A，设其最小数为 a，作 $n+1$ 元集 $Q=\{0, 1, \cdots, n\}$ 的 $r+1$ 元子集 $A\cup\{a-1\}$，$A\cup\{a-2\}$，$\cdots$，$A\cup\{0\}$ 与之对应，这样的 $r+1$ 元子集的个数恰好等于 A 的最小数 a. 又显然不同的 A 对应 Q 中不同的子集，因此，所有 P 的 r 元子集的最小数之和即为 Q 的 $r+1$ 元子集的总个数 C_{n+1}^{r+1}.

所以，$f(r, n)=\dfrac{C_{n+1}^{r+1}}{C_n^r}=\dfrac{n+1}{r+1}$.

4. (1) 设 A 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的奇子集. 考虑映射 f：

$$\begin{cases}A\mapsto A-\{1\}，若\ 1\in A,\\ A\mapsto A\cup\{1\}，若\ 1\notin A.\end{cases}$$

显然 f 是将奇子集映为偶子集的映射. f 是单射，即对不同的 A，$f(A)$ 不同.

f 是满射，即对每一个偶子集 B，都有一个 A，满足 $f(A)=B$. 事实上，当 $1\in B$ 时，令 $A=B-\{1\}$；当 $1\notin B$ 时，令 $A=B\cup\{1\}$，则 $f(A)=B$.

于是 f 是从奇子集族到偶子集族的一一对应. 从而 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的奇子集与偶子集个数相等，都等于 $\frac{1}{2}\times 2^n=2^{n-1}$.

(2) 若集合族 P 含有有限个数集，且每个数集的元素个数有限，则将所有这些数集的元素和的总和 $\sum\limits_{A\in P}\sum\limits_{x\in A}x$ 称为“相应于 P 的和”，记为 $m(P)$.

对集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}(n\geqslant 3)$，将其含有元素 n，$n-1$ 的奇、偶子集全体分别记为 S_1、T_1；含有 n 但不含 $n-1$ 的奇、偶子集全体分别记为 S_2、T_2；不含 n 但含有 $n-1$ 的奇、偶子集全体分别记为 S_3、T_3；不含 n，$n-1$ 的奇、偶子集全体分别记为 S_4、T_4. 作为(1)的推论，S_i 与 T_i 中的集合个数都等于 $2^{(n-2)-1}=2^{n-3}$，$i=1, 2, 3, 4$.

我们可将 S_1 中每个集合去掉元素 n，$n-1$，对应于 T_4 中的一个集合，因此考虑相应于 S_1 的和及相应于 T_4 的和，有

$$m(S_1)=m(T_4)+2^{n-3}(2n-1),$$

同理可得

$$m(S_4)=m(T_1)-2^{n-3}(2n-1),$$
$$m(S_2)=m(T_3)+2^{n-3},$$
$$m(S_3)=m(T_2)-2^{n-3}.$$

上述 4 式相加可知，相应于 X 的所有奇子集的和 $m(S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4)$ 与相应于 X 的所有偶子集的和 $m(T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4)$ 相等. 注意到

$$m(X)=2^{n-1}\times(1+2+\cdots+n)=2^{n-2}n(n+1)$$

(因为每个 $i\in X$ 均在 2^{n-1} 个子集中出现)，故所求奇子集元素和的总和为 $m(X)$ 的一半，即 $2^{n-3}n(n+1)$.

5. 记 $S=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. 当 $n\equiv 1(\bmod 4)$ 时，显然 S 是奇数.

对 $(1, 2, \cdots, n)$ 的给定排列 $P=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，由 k_P 的定义可知

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k_P}<a_{k_P+1}+a_{k_P+2}+\cdots+a_n,$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_{k_P+1}\geqslant a_{k_P+2}+a_{k_P+3}+\cdots+a_n,$$

注意到 $(a_1+a_2+\cdots+a_{k_P+1})+(a_{k_P+2}+a_{k_P+3}+\cdots+a_n)=1+2+\cdots+n=S$ 为奇数，故上述不等式取不到等号.

取 P 的反序排列 $P'=(b_1, b_2, \cdots, b_n)=(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1)$，由上面的

讨论可知：

$$b_1+b_2+\cdots+b_{n-k_P-1}<b_{n-k_P}+b_{n-k_P+1}+\cdots+b_n,$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_{n-k_P}<b_{n-k_P+1}+b_{n-k_P+2}+\cdots+b_n,$$

故 $k_{P'}=n-k_P-1$，即对互为反序的排列 P 与 P' 有：$k_P+k_{P'}=n-1$.

注意到 $(1, 2, \cdots, n)$ 的 $n!$ 个排列可两两配对，使每对中的两个排列互为反序，则所有 k_P 的和等于 $\frac{n!}{2}\cdot(n-1)$.

6. 设 $a<n$，且 $(a, n)=1$，则 $n-a<n$，且 $(n-a, n)=1$. 而且都有 $a=n-a$，将导出 $a=\frac{n}{2}$，仅在 n 为偶数时发生，而这时 a 与 n 不互素. 所以 a 与 $n-a$ 可以两两配对，而

$$a^3+(n-a)^3=n[a^2-a(n-a)+(n-a)^2]$$

是 n 的倍数，从而命题得证.

7. 下面证明对 $k=1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}$，有

$$k^{k^2-k+1}+(p-k)^{(p-k)^2-(p-k)+1}\equiv 0\pmod p. \quad ①$$

事实上，此时有

$$(p-k)^2-(p-k)+1=k^2-k+1+(p-2k)(p-1)\equiv k^2-k+1\pmod{p-1},$$

又注意 $(p-k, p)=1$，由 Fermat 小定理得 $(p-k)^{p-1}\equiv 1\pmod p$，所以

$$(p-k)^{(p-k)^2-(p-k)+1}\equiv(p-k)^{k^2-k+1}\equiv(-k)^{k^2-k+1}=(-1)^{k(k-1)+1}k^{k^2-k+1}$$
$$\equiv -k^{k^2-k+1}\pmod p,$$

从而①成立.

在①中令 $k=1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}$，并求和得

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{k^2-k+1}=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(k^{k^2-k+1}+(p-k)^{(p-k)^2-(p-k)+1}\right)\equiv 0\pmod p,$$

故 p 整除 $\sum\limits_{k=1}^{p-1}k^{k^2-k+1}$.

8. 构造 A 的对偶式 $B=k+\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}$，则 $A+B=2k+1$，$AB=k$，故 A，B 是方程 $x^2-(2k+1)x+k=0$ 的两个实根，从而对任意正整数 $n\geqslant 3$，有

$$A^n-(2k+1)A^{n-1}+kA^{n-2}=0,$$
$$B^n-(2k+1)B^{n-1}+kB^{n-2}=0.$$

记 $a_n=A^n+B^n-1$，将上述两式相加得

$$(a_n+1)-(2k+1)(a_{n-1}+1)+k(a_{n-2}+1)=0,$$

即
$$a_n=(2k+1)a_{n-1}-ka_{n-2}+k, \tag{①}$$

再注意到 $a_1=A+B-1=2k$，$a_2=A^2+B^2-1=4k^2+2k$ 均为 k 的整数倍，结合递推关系可知对一切正整数 n，a_n 被 k 整除. 又 $0<B<1$，所以

$$a_n=[a_n]=[A^n+B^n-1]=[A^n],$$

故 $[A^n]$ 能被 k 整除.

9. 记 $S_{i,j}$ 是 S 中形如 (x, i, j) 的点的集合，即在 Oyz 平面内投影坐标为 (i, j) 的一切点的集合.

显然 $S=\bigcup\limits_{(i,j)\in S_1}S_{i,j}$. 由柯西不等式得

$$|S|^2=\Big(\sum_{(i,j)\in S_1}|S_{i,j}|\Big)^2\leqslant\sum_{(i,j)\in S_1}1^2\times\sum_{(i,j)\in S_1}|S_{i,j}|^2=|S_1|\sum_{(i,j)\in S_1}|S_{i,j}|^2.$$

构作集合 $X=\bigcup\limits_{(i,j)\in S_1}(S_{i,j}\times S_{i,j})$，那么 $|X|=\sum\limits_{(i,j)\in S_1}|S_{i,j}|^2$.

作映射

$f: X\to S_2\times S_3$ 为 $f((x, i, j), (x', i, j))=((x, j), (x', i))$.

显然 f 是单射，所以 $|X|\leqslant|S_2|\cdot|S_3|$. 从而有

$$|S|^2=|S_1|\cdot|X|\leqslant|S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|.$$

习　题　13

1. 用 a_n 表示有 n 人排队时，满足条件的排队方法数.

易验证 $a_1=1$，$a_2=2$.

当 $n\geqslant3$ 时，考虑第 n 个人重新排队后的位置，共有两种可能：

若第 n 个人仍排在第 n 个位置，则前 $n-1$ 人的排队方式数恰好为 a_{n-1}；

若第 n 个人排在第 $n-1$ 个位置，则第 $n-1$ 人必排在第 n 个位置，而前 $n-2$ 人的排队方式数恰好为 a_{n-2}.

因此 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3)$.

由初值与递推式即得 $a_{12}=233$，故共有 233 种不同的排队方法.

2. 我们建立 A_{n+1} 与 A_n 之间的关系. 第 n 次可能由 A 来掷，也可能由 B 来

掷，第 n 次若由 A 来掷，则第 $n+1$ 次仍由 A 来掷，这样的事件发生的概率是 $\frac{1}{6}A_n$，若第 n 次由 B 来掷(这样的概率是 $1-A_n$)，则第 $n+1$ 次由 A 来掷，这样的事件发生的概率是 $\frac{5}{6}(1-A_n)$.

故 $A_{n+1}=\frac{1}{6}A_n+\frac{5}{6}(1-A_n)=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}A_n$，且 $A_1=1$. 易得

$$A_n=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right).$$

3. 这样的 n 位数可由如下两种情况生成：

(1) 在不含数字 5 的 $n-1$ 位数前面加上 5，有 4^{n-1} 个；

(2) 在含有数字 5 且 5 的前面不出现 3 的 $n-1$ 位数之前加上 1，2，4，5，这样的数有 $4f(n-1)$ 个.

故
$$f(n)=4(n-1)+4^{n-1}，且 f(1)=1，$$
$$\frac{f(n)}{4^n}=\frac{f(n-1)}{4^{n-1}}+\frac{1}{4},$$
$$\frac{f(n)}{4^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(n-1)=\frac{1}{4}n,$$

从而 $f(n)=n\cdot 4^{n-1}$.

注　本题若不用递推方法亦很方便求解.

4. 记 $P_k(x)=((\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2-2)^2$(共 k 重括号)，其常数项等于 $P(0)=((\cdots(((0-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2-2)^2=4$.

再以 A_k 和 B_k 表示 $P_k(x)$ 的一次项和二次项系数，其中由于 $P_1(x)=(x-2)^2$，故 $A_1=-4$，$B_1=1$.

下面寻找 A_k 和 B_k 的递推关系.

一方面，$P_k(x)=4+A_kx+B_kx^2+O(x)$(其中 $O(x)$ 代表一个多项式，它不含小于等于二次的项，下同)；另一方面，当 $k\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}P_k(x)&=(P_{k-1}(x)-2)^2=(4+A_{k-1}x+B_{k-1}x^2+O(x)-2)^2\\&=4+4A_{k-1}x+(4B_{k-1}+A_{k-1}^2)x^2+O(x),\end{aligned}$$

比较两式中 $P_k(x)$ 的 x，x^2 项系数可得：

$$A_k=4A_{k-1}，B_k=4B_{k-1}+A_{k-1}^2(k\geqslant 2).$$

由此可先推出 $A_n=4^{n-1}A_1=-4^n$. 再将后一个递推式变形为 $\frac{B_k}{4^k}=\frac{B_{k-1}}{4^{k-1}}+$

$\frac{A_{k-1}^2}{4^k}$，故

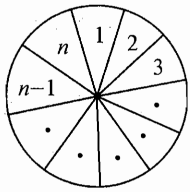
$$\frac{B_n}{4^n}=\frac{B_1}{4}+\frac{A_{n-1}^2}{4^n}+\frac{A_{n-2}^2}{4^{n-1}}+\cdots+\frac{A_1^2}{4^2}$$
$$=\frac{1}{4}+4^{n-2}+4^{n-3}+\cdots+4^0=\frac{1}{4}\cdot\frac{4^n-1}{3}.$$

因此 $P_n(x)$中 x^2 的系数 $B_n=\frac{4^{n-1}(4^n-1)}{3}$.

5. 先一般化为下述问题：设 $n\geqslant 3$，从 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$B=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，$D=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 这四个数列中选取 n 个项，且满足：

(1) $1, 2, \cdots, n$ 每个下标都出现；

(2) 下标相邻的任意两项不在同一个数列中(下标 n 与 1 视为相邻).



(第 5 题)

设选取方法数为 x_n. 今确定 x_n 的表达式：将一个圆盘分成 n 个扇形格，顺次编号为 $1, 2, \cdots, n$，并将数列 A, B, C, D 各对应一种颜色，对于任意一个选项方案，如果下标为 i 的项取自某颜色数列，则将第 i 号扇形格染上该颜色. 于是 x_n 就成为将圆盘的 n 个扇形格染四色，使相邻格不同色的染色方法数，易知，

$$x_1=4,\ x_2=12,\ x_n+x_{n-1}=4\cdot 3^{n-1}(n\geqslant 3), \qquad ①$$

将①写作 $$(-1)^n x_n-(-1)^{n-1}x_{n-1}=-4\cdot(-3)^{n-1}.$$

因此 $$(-1)^{n-1}x_{n-1}-(-1)^{n-2}x_{n-2}=-4\cdot(-3)^{n-2};$$

$$\cdots\cdots$$

$$(-1)^3x_3-(-1)^2x_2=-4\cdot(-3)^2;$$
$$(-1)^2x_2=-4\cdot(-3).$$

相加得，$(-1)^n x_n=(-3)^n+3$，于是 $x_n=3^n+3\cdot(-1)^n(n\geqslant 2)$.

因此 $x_{13}=3^{13}-3$. 这就是所求的取牌方法数.

注 若将 4 种颜色推广到 m 种颜色，那么将圆盘的 n 个扇形格染 m 种颜色，使相邻格不同色的染色方法数为 $(m-1)^n+(-1)^n(m-1)$.

6. 显然 S 中不存在最大元素，故 S 是无限集.

记 $A_k=\{x\in\mathbf{N}^*\mid x\equiv k(\mathrm{mod}\ 7)\}$ $(k=0, 1, \cdots, 6)$，并将命题“$S\cap A_k$ 为无限集”记为 P_k. 显然 P_0 即为题目需证之结论.

先证明一个引理：若 P_k 成立，则 P_{k^2+3} 成立(下标在模 7 的意义下理解).

证明：若 P_k 成立，则存在一列正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$，满足 $a_1\equiv a_2\equiv\cdots\equiv k(\bmod 7)$，则

$$a_1a_i+3\equiv k^2+3(\bmod 7),\ a_1a_i+3<a_1a_{i+1}+3(i\in\mathbf{N}^*),$$

故 $S\cap A_{k^2+3}$ 含有无限多个元素，即 P_{k^2+3} 成立.

在原题中，由于 S 是无限集，根据抽屉原理，命题 P_0，P_1，…，P_6 中必有一个成立. 反复利用引理可得：$P_1\Rightarrow P_4\Rightarrow P_5\Rightarrow P_0$，而 $P_2\Rightarrow P_0$，$P_3\Rightarrow P_5$，$P_6\Rightarrow P_4$，故 P_0 总成立，即 S 中必含有无穷多个 7 的倍数.

7. 记有搁浅黑格的 $2\times n$ 矩形的数目为 a_n，无搁浅黑格的 $2\times n$ 矩形的数目为 b_n，则 $b_n=2^{2n}-a_n$，且 $a_1=0$.

由题意知，搁浅的黑格只可能位于第 2 行.

(1) 若第 2 行前 $n-1$ 个方格中已有搁浅的黑格，则第 n 列无论怎样染色，均使 $2\times n$ 矩形中存在搁浅的黑格，此时共有 $2^2a_{n-1}=4a_{n-1}$ 种情况.

(2) 若第 2 行前 $n-1$ 个方格中无搁浅的黑格，则第 2 行第 n 列的方格必为 $2\times n$ 矩形中唯一的搁浅的黑格，所以它上面的方格确定为白格，且第 2 行前 $n-1$ 个方格中存在白格，而在第 2 行前 $n-1$ 个方格均为黑格的情况下，第一行任意一种染色方法均可使前 $n-1$ 列无搁浅的黑格，所以这里 2^{n-1} 种情况需要排除，故共有 $b_{n-1}-2^{n-1}=2^{2(n-1)}-a_{n-1}-2^{n-1}$ 种情况.

综合(1)、(2)知 $a_n=4a_{n-1}+2^{2(n-1)}-a_{n-1}-2^{n-1}=3a_{n-1}+4^{n-1}-2^{n-1}$. 即

$$\frac{a_n}{3^{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{3^{n-2}}+\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

将该式中的 n 分别代换成 2，3，…，n 并累加，注意 $a_1=0$，有

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{3^{n-1}}&=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=4\times\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-1\right)-2\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)=\frac{4^n+2^n}{3^{n-1}}-6,\end{aligned}$$

即 $a_n=4^n+2^n-6\times 3^{n-1}=4^n+2^n-2\times 3^n$.

从而 $b_n=2^{2n}-a_n=2\times 3^n-2^n$.

8. 首先可验证 $n=1$，2，5，6，… 时不满足题意，$n=3$，4，7，8，… 时满足题意，故猜想当且仅当 $n\equiv 0$，$3(\bmod 4)$ 时，先取方有必胜策略.

用四元正整数组表示 4 堆火柴的根数(若仅是顺序不同，则认为是同一数组)，并将游戏的胜状态和负状态集合分别记为 W 和 L.

我们先证引理：当正整数组被写成 $P=(2^{n_1}a_1,\ 2^{n_2}a_2,\ 2^{n_3}a_3,\ 2^{n_4}a_4)$

的形式(其中 $n_i \in \mathbf{N}$, a_i 为奇数, $i=1, 2, 3, 4$)时,若存在两两不同的 i, j, k,使 $n_i=n_j<n_k$(情形 1),则 $P \in W$;若 $n_1=n_2=n_3=n_4$(情形 2),则 $P \in L$.

事实上,在情形 1 下,可取走非 i, j, k 的那堆,并将第 k 堆拆成根数分别为 2^{n_i}, $2^{n_i}(2^{n_k-n_i}a_k-1)$ 的两堆,此时 a_i, a_j, 1, $2^{n_k-n_i}a_k-1$ 均为奇数,故产生的数组属于情形 2;在情形 2 下,设 $n_1=n_2=n_3=n_4=n$,不妨设取走第 1 堆,并将第 2 堆拆成根数为 $2^{m_1}b_1$, $2^{m_2}b_2$ 的两堆(m_1, $m_2 \in \mathbf{N}$, b_1, b_2 为奇数),考虑到 a_2 是奇数且 $2^{m_1}b_1+2^{m_2}b_2=2^n a_2$,故要么 $m_1=m_2<n$,要么 $m_1=n<m_2$ 或 $m_2=n<m_1$,无论如何总变为情形 1.

由于情形 1 下总能进行操作且游戏必在有限步内结束,递归可知引理成立.

下面再证明:对任意 k, $l \in \mathbf{N}^*$,若 $P=(2, 2, 4k, l)$, $(2, 2, 4k-1, l)$(情形 3),则 $P \in W$;若 $P=(2, 2, 2, 4k-2)$, $(2, 2, 2, 4k-3)$(情形 4),则 $P \in L$.

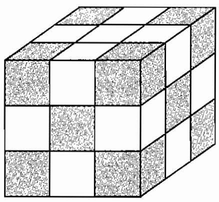
事实上,在情形 3 下,可取走第 4 堆,并将第 3 堆拆成根数分别为 2, $4k-2$ 或 2, $4k-3$ 的两堆,化为情形 4. 而在情形 4 下,我们证明任何操作不是得到一个胜状态就是回到情形 3:若是将前三堆中的某堆拆开,则产生数组 $(1, 1, 2, m)$,据引理知 $(1, 1, 2, m) \in W$. 若在前三堆中取走某一堆,而拆开第 4 堆,那么产生数组 $(2, 2, c, d)$. 此时若 c, d 中有某个模 4 余 3,则回到情形 3;若 c 和 d 模 4 均余 1 或 2,由于 $c+d \equiv 1, 2 \pmod 4$,只可能是 $c, d \equiv 1 \pmod 4$ 的情况,由引理知 $(2, 2, c, d) \in W$.

根据递归可知结论成立. 从该结论易看出,当且仅当 $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ 时,先取方有必胜策略.

习 题 14

1. 答案是不能把这个残缺的方格表盖住. 事实上,把 8×8 的方格表按国际象棋棋盘黑白染色,每张骨牌盖住一个黑格和一个白格. 若有能够盖住棋盘的方法,他们将盖住 31 个黑格和 31 个白格. 但缺角方格表上 30 个格子是一种颜色的,32 个格子是另一种颜色的.

2. 甲虫不能走遍所有的小房间. 我们如右图将正方体分割成 27 个小正方体(每个小正方体表示一间房间),涂上黑白相间的两种颜色,使得中心的小正方体染成白色,再使两个相邻的小正方体染上不同的颜色. 显然,在 27 个小正方体中,14 个是黑的, 13 个是白的. 甲虫从中间的白色小正方体出发,每走一步,方格就改变

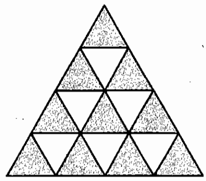


(第 2 题)

一种颜色. 故它走 27 步，应该经过 14 个白色的小正方体、13 个黑色的小正方体. 因此在 27 步中至少有一个小正方体，甲虫进去过两次. 由此可见，如果要求甲虫到每一个小房间只去一次，那么甲虫不能走遍所有的小房间.

3. 将 n^2 小正三角形如右图黑、白染色，则黑三角形共有

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\text{ 个},$$



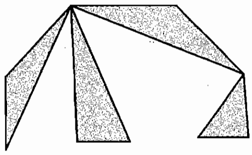
（第 3 题）

白三角形共有

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)\text{ 个}.$$

由于要求“号码相邻的三角形有相邻边”，且有相邻号码的两个三角形染有不同的颜色，因此标上号码的黑三角形至多比标上号码的白三角形多 1 个，所以 $m\leqslant 2\times\frac{1}{2}n(n-1)+1=n^2-n+1$.

4. 用黑白两种颜色给这些三角形染色，使得任何有公共边的两个三角形的颜色不同. 由于已知 n 边形的每个顶点都是奇数个三角形的顶点，所以这 n 边形的每条边都属于同一颜色的三角形（不妨染为黑色，如图所示），可知黑色三角形比白色三角形多 n 个角. 假设 n 边形被分成 x 个黑色三角形及 y 个白色三角形，则它们的数目之差为 $n=3x-3y=3(x-y)$，为 3 的整数倍，命题得证.



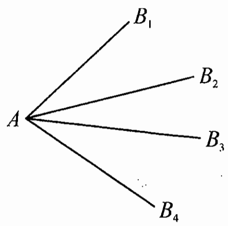
（第 4 题）

5. 将人对应成点，两人间的关系对应成两点连线的颜色，两人不相识对应为红色，两人相识对应为蓝色，于是原题变成如下染色问题：

二染色 K_9，设不存在红色三角形，证明必存在一个各边为蓝色的 K_4.

考虑一点 A 引出的 8 条线段，分以下 3 种情况：

(1) 有 4 条（或 4 条以上）红色线段，如图. 现考虑 B_1，B_2，B_3，B_4 间所连线段的颜色.



（第 5 题）

由题意，不存在红色三角形，因此 B_1，B_2，B_3，B_4 组成蓝色的 K_4，原命题成立.

(2) 有 6 条（或 6 条以上）蓝色线段. 现考虑这 6 条蓝色线段除 A 点外的 6 个端点. 熟知它们组成的 K_6 中必存在单色三角形，由于不存在红色三角形，因此必是蓝色三角形，此蓝色三角形加上 A 点组成蓝色的 K_4.

(3) 恰有 3 条红色线段、5 条蓝色线段，此时另外 8 个点中必存在一点，它引出的红色线段不是 3 条，于是可用(1)或(2)去证明. 否则，每个点引出的红色线段都恰好 3 条，则红色线段总数为 $\frac{3\times 9}{2}=13.5$，这是不可能的.

6. 记 6 个点为 A_1，A_2，…，A_6. 将 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant 6)$ 中可作为某个三角形最长边的边都染为红色，其余边染为蓝色，构成 2 色完全图 K_6.

由例 1 后面的讨论知，K_6 中至少有两个同色三角形 T_1，T_2，但由染色方法可知 T_1，T_2 的最长边均为红色，因此 T_1，T_2 为红色三角形. 对 $i=1,2$，由于 T_i 的最短边是红的，必为另一个三角形 T_i'的最长边，所以(T_i, T_i')是一对满足条件的三角形. 命题得证.

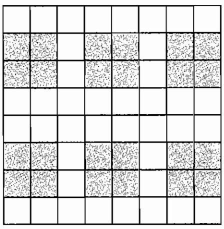
7. 将 $9\times9\times9$ 正方体每个侧面上的方格都相间染成黑色与白色，且使得各个角上的方格均为黑色. 这种染色方案导致如下结论：

(1) 每个面上都有 41 个黑格和 40 个白格，黑格总数比白格多 6 个；

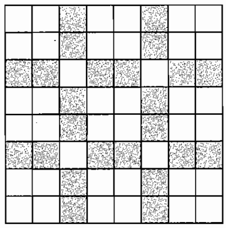
(2) 每个 2×1 矩形中的两个方格同色当且仅当这个矩形“跨越”两个侧面.

所以，在“跨越”两个侧面的 2×1 矩形中，黑色矩形比白色矩形多 3 个，因此它们的个数之和为奇数.

8. 按图(1)的方法将棋盘中的 24 个方格涂上颜色. 假如一开始染色方格上的所有数之和 S 为奇数(这很容易做到)，那么由于每个 3×3 或 4×4“子棋盘”恰好覆盖这 24 个方格中的偶数个，因此每次操作必使 S 增加一个偶数，从而 S 总为奇数，不可能使所有方格内都出现 10 的倍数.



(第 8 题(1))



(第 8 题(2))

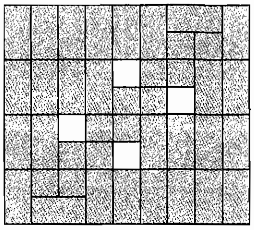
注　本题的染色方法有很多种，例如按图(2)的染色方法可以证明更强的命题：即使允许对任意一个 2×2 的“子棋盘”进行每个数都加 1 的操作，仍不能保证棋盘中的数都变成偶数.

9. 设方格表中已被多米诺骨牌占据的 12 个小方格的集合为 C；右上角、左下角的小方格分别为 B、D；$B\cup C\cup D$左上方的小方格集合为A；$B\cup C\cup D$ 右下方的小方格集合为 E.

将方格表黑白相间染色，使右上角 B 为白格，则推算知：D 为黑格；A 中

含有 16 个白格、13 个黑格；E 中含有 16 个黑格、13 个白格.

再放入一块多米诺骨牌必须全属于 $A\cup B\cup D$ 或全属于 $E\cup B\cup D$，每一集合至多包含 14 块多米诺骨牌(因为每块骨牌占据一个黑格和一个白格)，因此最多还能两两不重叠地放置不超过 28 块多米诺骨牌. 易知可以如图所示放 28 块骨牌，因此本题所求结果为 28.



(第 9 题)

习 题 15

1. 将杯口朝上的杯子赋值为 1，杯口朝下的杯子赋值为 -1，然后计算每操作一次后 11 只杯子乘积的正负号：

刚开始时，11 只杯子都口朝上，所以它们乘积的符号为：$1^{11}=1$，当翻动 n 个杯子(n 为偶数且 $n\leqslant 10$) 使其杯口朝下时，它们乘积的符号为：

$$1^{11-n}\cdot(-1)^n=1\times 1=1,$$

显然，无论 n 是小于 11 的什么偶数，乘积的符号均为正，而 11 只杯子都口朝下时，乘积为 $(-1)^{11}=-1$，故不可能使 11 只杯子杯口都朝下.

2. 将每个小三角形的各条边按如下规则赋值：若边的两端点同色，赋值为 0；若边的两端点异色，赋值为 1. 这样每个小三角形各边赋值之和，有如下三种情况：

(1) 三个顶点都不同色的小三角形，赋值和为 3；

(2) 只有两个顶点同色的小三角形，赋值和为 2；

(3) 三个顶点都同色的小三角形，赋值和为 0.

另设所有小三角形的边赋值总和为 S，上述(1)、(2)、(3)三类小三角形的个数分别为 x, y, z，于是有

$$S=3x+2y+0z=3x+2y. \qquad ①$$

在计算所有小三角形边的赋值总和 S 时，除了$\triangle ABC$ 三边 AB, BC, CA 外，其余各边都被重复计算了两次，设这些边的赋值和为 k，则 $S=3+2k$，显然 S 是一个奇数，由①式知 x 是一个奇数，即三个顶点颜色都不同的三角形的个数是一个奇数.

3. 对所有小正方形的顶点 $P_i(i=1,2,\cdots,(n+1)^2)$ 进行赋值，将 P_i 与数 a_i 相对应：若 P_i 为红色，记 a_i 为 1；若 P_i 为蓝色，记 a_i 为 -1.

对 n^2 个小正方形进行编号. 对 $j=1,2,\cdots,n^2$，设第 j 个小正方形的四

个顶点上的数字之积为A_j，于是，若一个小正方形恰有三个顶点同色，则$A_i=-1$；否则$A_i=1$. 于是问题就转化为证明在$A_1, A_2, \cdots, A_{n^2}$中，$-1$的个数为偶数.

现在考虑乘积$A_1A_2\cdots A_{n^2}$. 对于正方形内部的交点，每一点上相应的数在乘积中出现4次；大正方形边上而不是顶点的交点上相应的数在乘积中出现2次；A, B, C, D这四点上相应的数在乘积中各出现一次，于是

$$A_1A_2\cdots A_{n^2}=1\times(-1)\times1\times(-1)=1.$$

所以，在$A_1, A_2, \cdots, A_{n^2}$中，$-1$的个数为偶数. 即恰有三个顶点同色的小正方形的数目必是偶数.

4. 我们对第i行第j列的格子赋值λ^{i+j}，$i, j\in\mathbf{N}^*$，其中$\lambda=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

由于$\lambda^{i+(j+1)}+\lambda^{i+(j+2)}=\lambda^{(i+1)+j}+\lambda^{(i+2)+j}=\lambda^{i+j}$，故每下一步棋不改变所有棋子所在格的赋值之和，记这个和为S，其中初始情况下的$S=\lambda^2$.

假设下棋过程中某一时刻所有棋子都不出现在前4列，那么此时

$$S\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=5}^{\infty}\lambda^{i+j}=\lambda^6\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\Big)^2=\lambda^6\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2=\lambda^6\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^2=\lambda^2,$$

说明从第5列开始的所有格子都已被摆满，这是不可能的.

因此，有限步后无法让所有棋子都不出现在前4列中.

5. 不可能.

不妨设B的起始位置在A右方相邻格点上. 现为每个格点赋值如下：

先将A初始所在格点赋值1，以后赋值规则如下：任意一个格点赋值为它左边相邻格点处乘以ω（其中$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$），又是它斜左下方与之相邻格点处值乘以$\omega^2$.

开始时$A=1$, $B=\omega$，而由规则知，任意一轮跳跃不改变A、B所在格点的值的比值. 若最终A、B能换位，则$\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega}{1}$，矛盾！所以不能做到.

6. 首先将3000×3000的方格表中(i, j)位置的方格填上数$a_{ij}\in\{1, 2, 3\}$，其中$a_{ij}\equiv i+j-1\pmod 3$.

1	2	3	1	…
2	3	1	2	…
3	1	2	3	…
1	2	3	1	…
…	…	…	…	…

（第6题图①）

我们按下面原则染色：如果多米诺骨牌不含数字$k\in\{1, 2, 3\}$，则将其染成颜色k. 下面证明这种染色是符合要求的.

考虑任意一个多米诺骨牌A，不妨设它水平放置且是颜色3的，这样它包含的小方格所含数字为1、2. 由a_{ij}的

填法知，与 A 相邻的 6 个小方格中有 4 个含数字 3，因此在上述染色方案下，这 4 个小方格不会包含在颜色 3 的多米诺骨牌中. 这样，与 A 相邻的颜色 3 的多米诺骨牌至多只有 2 个.

最后证明，所有三种颜色的多米诺骨牌个数一样. 考虑颜色 2 与颜色 3 的多米诺骨牌的个数和，它正好等于表格中含 1 的小方格的个数 3 000 000. 类似可得，颜色 1 与颜色 3 多米诺骨牌个数之和以及颜色 1 与颜色 2 多米诺骨牌个数之和都为 3 000 000. 这样我们得到每种颜色的多米诺骨牌的个数都为 1 500 000.

2	3	1	2
3	1	2	3
1	2	3	1

（第 6 题图②）

习　题　16

1. 如果有这样一个 17 项的数列，设为 $a_1, a_2, \cdots, a_{17}$. 它的每 7 个连续项之和为正，每 11 个连续项之和为负. 在 7×11 的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{11} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_7 & a_8 & a_9 & \cdots & a_{17} \end{pmatrix}$$

中，一方面，每一行的元素和为负的，因此矩阵中所有数的和是负的. 另一方面，每一列的元素和是正的，因此矩阵中所有数的和应为正的. 两方面的结果矛盾，从而命题得证.

2. 用两种方法计算区域 $A=\{(x, y) \mid 1\leqslant x\leqslant n, 1\leqslant xy\leqslant n\}$ 中的整点数目 S.

一方面，对每个固定的 $i\ (i=1, 2, \cdots, n)$，使 $1\leqslant iy\leqslant n$ 即 $\frac{1}{i}\leqslant y\leqslant \frac{n}{i}$ 的整数 y 的个数为 $\left[\frac{n}{i}\right]$，因此区域 A 中处在直线 $x=i(i=1, 2, \cdots, n)$ 上的整点数为 $\left[\frac{n}{i}\right]$，故有

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]. \tag{①}$$

另一方面，对每个固定的 $j\ (j=1, 2, \cdots, n)$，使 $xy=j$ 且 $1\leqslant x\leqslant n$ 的整点数恰为 j 的正约数个数 $d(j)$，故有

$$S=\sum_{j=1}^{n}d(j). \tag{②}$$

由①，②得原式成立.

3. 如果一名教师 $t_i(1\leqslant i\leqslant b)$ 同时教两名学生 s_j，$s_l(1\leqslant j<l\leqslant c)$，则称三元组$(t_i, s_j, s_l)$为一个"教学三人组".

一方面，由条件①得，对任意 i $(1\leqslant i\leqslant b)$，含教师 t_i 的"教学三人组"恰有 C_k^2 个，从而"教学三人组"共 bC_k^2 个.

另一方面，由条件②得，对任意 j，l $(1\leqslant j<l\leqslant c)$，含学生 s_j，s_l 的"教学三人组"恰有 h 个，而 s_j，s_l 有 C_c^2 种取法，故"教学三人组"共 hC_c^2 个.

综上可得 $bC_k^2=hC_c^2$，即$\dfrac{b}{h}=\dfrac{c(c-1)}{k(k-1)}$.

4. 如果命题的结论不成立，12 人中任取两个人 A 和 B，再在其余 10 个人中选出刚好只认识 A 和 B 中一个的人 C_1，C_2，…，C_k，那么 $k\geqslant 6$(因为若 $k\leqslant 5$，则有 $10-k\geqslant 5$ 个人满足题目结论). 现在用两种方法来计算 3 人组(A, B, C)的数目 N.

一方面，由于一共有 $C_{12}^2=66$ 个不同的两人对(A, B)，而每一对都对应着不少于 6 个人 C_i. 所以 $N\geqslant 66\times 6=396$.

另一方面，将 C_i 固定，找出与他对应的两人对(A, B)，他在这些对中恰好认识一个人，如果 C_i 有 n 个熟人，那么与他对应的两人对的数目为

$$n(11-n)\leqslant\left(\frac{n+(11-n)}{2}\right)^2<31,$$

而这样的 C_i 有 12 个，因此 $N\leqslant 12\times 30=360$.

以上两方面导致矛盾. 从而命题得证.

5. 对 $1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$，设第 i 行第 j 列的数为 a_{ij}，第 i 行的元素和为 r_i，第 j 列的元素和为 c_j. 已知条件即为：r_i，$c_j>0$，且当 $a_{ij}>0$ 时，$r_i=c_j$.

对 $1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$，无论 $a_{ij}>0$ 还是 $a_{ij}=0$，总有$\dfrac{a_{ij}}{r_i}=\dfrac{a_{ij}}{c_j}$.

用两种方法计算 $S=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{a_{ij}}{r_i}$.

一方面，有

$$S=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{r_i}\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{r_i}\cdot r_i=m;$$

另一方面，有

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}}{c_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{c_j}\cdot\sum_{i=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{c_j}\cdot c_j=n.$$

所以 $m=n$.

6. 设 $B=(b_{ij})_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}$. 定义 $S=\sum\limits_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}(x_i+y_j)(a_{ij}-b_{ij})$.

一方面，有

$$S=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\Big)+\sum_{j=1}^{n}y_j\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\Big)=0.$$

另一方面，对任意 $i, j\ (1\leqslant i, j\leqslant n)$，都有 $(x_i+y_j)(a_{ij}-b_{ij})\geqslant 0$（事实上，若 $x_i+y_j\geqslant 0$，则 $a_{ij}-b_{ij}=1-b_{ij}\geqslant 0$；若 $x_i+y_j<0$，则 $a_{ij}-b_{ij}=-b_{ij}\leqslant 0$）.

从而这些不等式只能同时取等号，即 $(x_i+y_j)(a_{ij}-b_{ij})=0$ 对所有 i, j 成立.

特别地，若 $a_{ij}=0$，则 $x_i+y_j<0$，只能 $a_{ij}-b_{ij}=0$，即 $b_{ij}=0$，因此对所有 i, j，总有 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$. 但 B 的每一行元素之和与 A 对应行的元素之和相等，从而只能 $a_{ij}=b_{ij}$ 对所有 i, j 成立，即有 $B=A$.

习　题　17

1. 先固定 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}$，注意到 $(1-x_{n-1})(1-x_n)=1-x_{n-1}-x_n+x_{n-1}x_n$，其中 $x_{n-1}+x_n$ 为定值，所以 $x_{n-1}x_n$ 的值越小则原式值越小，故令

$$x_i'=x_i,\ i=1, 2, \cdots, n-2,\ x_{n-1}'=x_{n-1}+x_n,\ x_n'=0,$$

此时 $x_{n-1}'x_n'=0\leqslant x_{n-1}x_n$，所以

$$(1-x_1')(1-x_2')\cdots(1-x_{n-1}')\leqslant(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n),$$

其中 $x_1'+x_2'+\cdots+x_{n-1}'=x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\dfrac{1}{2}$.

再进行 $n-2$ 次类似的调整过程可知

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\geqslant 1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqslant\frac{1}{2},$$

等号当 $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=x_3=\cdots=x_n=0$ 时可取到，所以所求最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

2. 由于把 49 写成 10 个正整数的和，写法只有有限种，所以一定有一种使得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2$ 达到最大值，也一定有一种使得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2$ 达到最小值.

假设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{10}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=49$，且使得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2$ 达到最大值，若 $x_1>1$，取 $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2+1$, $y_k=x_k$, $k=3, 4,$

…，10，则

$$y_1+y_2+\cdots+y_{10}=49,$$

且 $y_1^2+y_2^2=(x_1-1)^2+(x_2+1)^2=x_1^2+x_2^2+2(x_2-x_1)+2>x_1^2+x_2^2$，从而 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2>x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2$，矛盾.

所以 $x_1=1$，进而 $x_2=1$，…，$x_9=1$，所以 $x_{10}=40$. 于是 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2$ 的最大值为 $9+40^2=1609$.

假设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{10}$ 是满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=49$，且使得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2$ 达到最小值，则 x_1，x_2，…，x_{10} 中任意两个数的差的绝对值不超过 1.

事实上，若存在 x_i，x_j，$1\leqslant i\leqslant j\leqslant 10$，有 $x_j-x_i\geqslant 2$，令

$$y_i=x_i+1,\ y_j=x_j-1,\ x_k=y_k,\ k\neq i,\ j$$

则 $y_i^2+y_j^2=(x_i+1)^2+(x_j-1)^2=x_i^2+x_j^2-2(x_j-x_i)+2<x_i^2+x_j^2$，矛盾.

所以，当 $x_1=4$，$x_2=x_3=\cdots=x_{10}=5$ 时，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2$ 取得最小值 241.

3. 由于把 2006 分成若干个互不相等的正整数的和的分法只有有限种，因而一定存在一种分法，使得这些正整数的乘积最大.

若把 1 作为因子，乘积显然不会最大(只需将 1 加到另一个因子上去即可). 把 2006 分成若干个互不相等的正整数的和，因子个数越多，乘积越大，为了使因子个数尽可能地多，我们把 2006 分成 $2+3+4+\cdots+n$ 直到和不小于 2006.

如果和比 2006 大 1，这时，因子个数至少减少 1 个，为了使乘积最大，应去掉最小的 2，并将最后一个数(最大)加上 1.

如果和比 2006 大 $m(m\neq 1)$，那么去掉等于 m 的那个数，便可使乘积最大.

令

$$2+3+4+\cdots+n\geqslant 2006,$$

$$\frac{n(n+1)}{2}-1\geqslant 2006,$$

$$n^2+n-4014\geqslant 0. \qquad ①$$

由于 n 是满足不等式①的最小正整数，所以 $n=63$(因 $62^2+62-4014=-108<0$，$63^2+63-4014=18>0$). 这时

$$2+3+4+\cdots+63=2015,$$
$$2015-2006=9.$$

所以，把 2006 分成

$$(2+3+\cdots+8)+(10+11+\cdots+63),$$

这一形式时，这些数的乘积最大，其积为

$$2\times3\times\cdots\times8\times10\times\cdots\times63=\frac{63!}{9}.$$

4. 对正整数 m，定义 $f(m)$ 为 $m, m+1, \cdots, m+n-1$ 这 n 个连续正整数中素数的个数. 显然 $f(1)=\pi(n)$.

取 $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \cdots, (n+1)!+(n+1)$ 这 n 个连续正整数，它们都是合数，即 $f((n+1)!+2)=0$. 所以

$$f((n+1)!+2)\leqslant k\leqslant\pi(n)=f(1). \qquad ①$$

另一方面，考虑 $f(m+1)$ 与 $f(m)$ 的关系：

当 $m, m+n$ 都为素数或都为合数时，有 $f(m+1)=f(m)$；

当 m 为素数且 $m+n$ 为合数时，有 $f(m+1)=f(m)-1$；

当 m 为合数且 $m+n$ 为素数时，有 $f(m+1)=f(m)+1$.

总之 $|f(m+1)-f(m)|\leqslant1$，结合①式知必有某个 $i\in\{1, 2, \cdots, (n+1)!+2\}$ 使得 $f(i)=k$，即连续 n 个正整数 $i, i+1, \cdots, i+n-1$ 中恰含有 k 个素数.

5. 引理：令 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{m^2}{n}$. 当 S 取最小值时，对任意 i、j，都有 $|x_i-x_j|\leqslant1$.

证明：假定存在情形 $x_1\geqslant x_2+2$. 令 $x_1'=x_1-1$, $x_2'=x_2+1$, $x_3'=x_3$, $\cdots$, $x_n'=x_n$, $m'=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i'$, $S'=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i'^2-\frac{m'^2}{n}$，则 $m'=m$, $S'-S=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i'^2-x_i^2)=x_1'^2-x_1^2+x_2'^2-x_2^2=(x_1-1)^2-x_1^2+(x_2+1)^2-x_2^2=2-2x_1+2x_2<0$. 故在 m 不变的前提下，通过调整可使 S 取到更小的 S'，又这样的调整只能做有限次，故 S 可取最小值，且此时任何 x_i, x_j 之差不超过 1. 引理证毕.

下面对(1)、(2)一并解决.

设 $m=nk-t$, $k\in\mathbf{N}^*$, $t\in\{0, 1, \cdots, n-1\}$.

设 $x_1=x_2=\cdots=x_t=k-1$, $x_{t+1}=x_{t+2}=\cdots=x_n=k$，它们的和恰为 m，且由引理知，已使 S 尽可能小(由于其他形式的一切解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都对应一组这样的调整后的解，所以此设法不失一般性). 此时

$$S=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{m^2}{n}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2,$$

$$t(n-t)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2=nS<2n,$$

故 $f(t)=t^2-nt+2n>0$.

当 $n\leqslant 7$ 时,对一切 t,都成立 $f(t)=\left(t-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n(8-n)}{4}>0$,即对一切正整数 m,条件组都存在整数解.

当 $n\geqslant 8$ 时,$f(4)=16-2n\leqslant 0$,故对 $m=nk-4$,无整数解满足.

这样,第(1)问的结果为 $n=1, 2, \cdots, 7$.

此外,对 $n\geqslant 8$ 寻求别的正整数组(m, n).

经算得:$f(0)=2n>0$, $f(1)=f(n-1)=n+1>0$, $f(2)=f(n-2)=4>0$.

当 $n=8$ 时,$f(3)=f(5)=1>0$,故可取 $t=0, 1, 2, 3, 5, 6, 7$.

当 $n\geqslant 9$ 时,$f(3)=f(n-3)=9-n\leqslant 0$,由二次函数性质知,当 $t\in(3, n-3)$ 时,$f(t)<\max\{f(3), f(n-3)\}\leqslant 0$,故恰可取 $t=0, 1, 2, n-2, n-1$. 结合所设的 $m=nk-t$, $k=1, 2, \cdots$, $t\in\{0, 1, \cdots, n-1\}$ 可知,第(2)问的一切正整数组(m, n)有如下3类:

(1) $(a, 1), (a, 2), \cdots, (a, 7)$,其中 a 为任意正整数;

(2) $(bk-t, b)$,其中 $b\geqslant 8$, k 为任意正整数, $t=0, 1, 2, b-2, b-1$;

(3) $(8k-3, 8), (8k-5, 8)$,其中 k 为任意正整数.

而"$x_1=x_2=\cdots=x_t=k-1$, $x_{t+1}=x_{t+2}=\cdots=x_n=k$"保证了每组$(m, n)$都对应了一组具体的解$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

6. 设这1989个点分成的30组中,每组的点数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$,且不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_{30}$. 按题设组成的三角形总数为

$$S=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k.$$

本题是要在 $\sum_{i=1}^{30}n_i=30$,且 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$ 互不相同的约束条件下,求 S 的最大值.

由于把1989个点分成30组的不同分法只有有限种,故必有一种分法使得 S 取到最大,即 S 的最大值是存在的. 下面我们用逐步调整方法来求得 S 的最大值.

(1) 欲使 S 最大,相邻两个点组的点数之差 $n_{i+1}-n_i(i=1, 2, \cdots, 29)$ 均不超过2. 如果有 i_0,使得 $n_{i_0+1}-n_{i_0}\geqslant 3$,不妨设 $i_0=1$. 于是

$$S=n_1n_2\sum_{k=3}^{30}n_k+(n_1+n_2)\sum_{3\leqslant j<k\leqslant 30}n_jn_k+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k.$$

令 $n_1'=n_1+1$，$n_2'=n_2-1$，因为

$$n_1'n_2'=(n_1+1)(n_2-1)=n_1n_2+(n_2-n_1-1)>n_1n_2,$$

所以用 n_1'，n_2'代替 n_1，n_2 时，S 中的第一项 $n_1n_2\sum_{k=3}^{30}n_k$ 变大，而后面两项不变，从而 S 的值增大，矛盾. 所以，$n_{i+1}-n_i\leqslant 2$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 29)$.

(2) 欲使 S 最大，$n_{i+1}-n_i=2$ 的 i 值至多只有一个，若不然，设 $n_{i+1}-n_i=2$，$n_{j_0+1}-n_{j_0}=2$. 那么作如下调整：用 $n_{i_0}'=n_{i_0}+1$ 及 $n_{j_0+1}'=n_{j_0+1}-1$ 代替 n_{i_0}、n_{j_0+1}，S 便会增大. 所以使得 $n_{i+1}-n_i=2$ 的下标 i 最多只有一个.

(3) 如果 n_1，n_2，$\cdots$，n_{30} 组成公差为 1 的等差数列，那么

$$n_1+n_2+\cdots+n_{30}=15\times(2n_1+29)=1989,$$

而 15 不整除 1989，故上式不成立，因此 n_1，n_2，$\cdots$，n_{30} 中，必有两项的差为 2.

现设各组点数为

$$n_1,\ n_1+1,\ \cdots,\ n_1+i_0-1,\ n_1+i_0+1,\ \cdots,\ n_1+30.$$

其中 $1\leqslant i_0\leqslant 29$，它们的总和为 $1989=(2n_1+30)\times 31-(n_1+i_0)$，所以

$$30n_1-i_0=1524.$$

易知 $n_1=51$，$i_0=6$. 所以，当 30 组点数依次为 51，52，$\cdots$，56，58，59，$\cdots$，81 时，S 最大.

7. 不妨设 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，并记

$$f(a,\ b,\ c,\ d)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}.$$

先往证：　$f(a,\ b,\ c,\ d)\geqslant f(\sqrt{ac},\ b,\sqrt{ac},\ d).$　①

事实上，上式等价于

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c+d}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{9}{2\sqrt{ac}+b+d}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{ac}\geqslant\frac{9(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{(a+b+c+d)(2\sqrt{ac}+b+d)}$$

$\Leftarrow(a+b+c+d)(2\sqrt{ac}+b+d)\geqslant 9ac$ （因为$(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\geqslant 0$）

$\Leftarrow\left(a+c+\dfrac{2}{\sqrt{ac}}\right)\left(2\sqrt{ac}+\dfrac{2}{\sqrt{ac}}\right)\geqslant 9ac$ （因为 $b+d\geqslant 2\sqrt{bd}=\dfrac{2}{\sqrt{ac}}$）　②

而 $1=abcd\geqslant a\cdot a\cdot c\cdot c\Rightarrow ac\leqslant 1\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{ac}}\geqslant 2\sqrt{ac}$. 且 $a+c\geqslant 2\sqrt{ac}$，故

② 左边 $\geqslant\left(2\sqrt{ac}+\frac{2}{\sqrt{ac}}\right)\left(2\sqrt{ac}+\frac{2}{\sqrt{ac}}\right)\geqslant 4\sqrt{ac}\cdot 4\sqrt{ac}=16ac>9ac=$ ② 右边.

所以 ① 成立.

①说明，$f(a, b, c, d)$（其中 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$）的最小值（或极小值）总是在 $a=c$，即 $a=b=c$ 时取得. 欲得到该四元函数的下界，我们就可不妨设 $(a, b, c, d)=\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^3\right)$，这里 $t\geqslant 1$；这也说明了只需证明对 $\forall t\geqslant 1$，总有

$$f\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^3\right)\geqslant\frac{25}{4}, \quad ③$$

就证明了原不等式成立.

$f\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^3\right)\geqslant\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow 3t+\frac{1}{t^3}+\frac{9}{t^3+\frac{3}{t}}\geqslant\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow 12t^8-25t^7+76t^4-75t^3+12\geqslant 0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(12t^6-t^5-14t^4-27t^3+36t^2+24t+12)\geqslant 0$

$\Leftarrow 12t^6-t^5-14t^4-27t^3+36t^2+24t+12\geqslant 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(12t^5+11t^4-3t^3-30t^2+6t+30)+42\geqslant 0 \quad ④$

而 $t\geqslant 1$，$12t^5+6t\geqslant 2\sqrt{12t^5\cdot 6t}=12\sqrt{2}t^3>3t^3$，

$$11t^4+30\geqslant 2\sqrt{11t^4\cdot 30}=2\sqrt{330}t^2>30t^2.$$

故 $(t-1)(12t^5+11t^4-3t^3-30t^2+6t+30)+42>0$，④成立.

至此，③成立，原不等式得证.

习　题　18

1. (1) $(2k^2)^2+(2k)^2+1=(2k^2+1)^2$；

(2) $2(k^2+k)^2+2(k^2-k)^2+1=(2k^2+1)^2$；

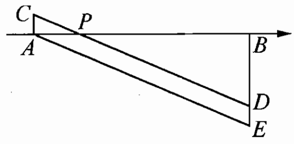
(3) $(k^2)^2+((k+1)^2)^2+1=2(k^2+k+1)^2$.

2. 构造方程 $f(x, y, z)=(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)$，则第一个方程等价于 $f(x, y, z)=0$.

若 $x, y, z \geqslant 1$，则 $f(x, y, z) \geqslant 0$ 当且仅当 $x = y = z = 1$ 时等号成立.

但若 $x = y = z = 1$，则不满足第二个方程. 所以，如果假设此方程组解存在，则任意一组解中至少有一个未知数小于 1，不妨设 $x < 1$，则 $x^2 + y^2 + z^2 > y^2 + z^2 \geqslant 2yz > xyz$ 与已知矛盾，因此原方程组没有正实数解.

3. 如图，取 A 为数轴原点，$AB = 12$，再作 AB 垂线 AC，BD，使 $AC = 1$，$BD = 4$，在数轴上取点 P，使 $AP = x$，则 $f(x) = |CP| + |DP|$，当 C，P，D 共线时，f 值最小，此时 $f_{\min} = |CD| = |AE| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.



（第 3 题）

4. 由 $\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0, \\ 4y^3 + \dfrac{1}{2}\sin 2y + a = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x^3 + \sin x = 2a, \\ 8y^3 + \sin 2y = -2a. \end{cases}$

构造函数 $f(t) = t^3 + \sin t$，则 $f(t)$ 为单调增函数，因为 $f(x) = -f(2y) = f(-2y)$，所以，$x + 2y = 0$，故 $\cos(x + 2y) = 1$.

5. 因为 $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)^3 + 2(x - 1)$，构造函数 $f(t) = t^3 + 2t$，显然 t 为奇函数.

由 $\begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1 \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 3 = -2, \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta - 3 = 2, \end{cases}$

所以
$$f(\alpha - 1) = -f(\beta - 1) = f(1 - \beta).$$

由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调增函数，所以 $\alpha - 1 = 1 - \beta$，故 $\alpha + \beta = 2$.

6. 当 $n = 1$ 时，就一个方程，显然解为 $x_1 = 1$.

以下不妨设 $n \geqslant 2$. 此时构造函数

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)\cdots(t - x_n) = t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1}t + a_n.$$

则 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0$. 而另一方面，结合原方程组可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i + a_n \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= n + a_1 n + a_2 n + \cdots + a_{n-1} n + a_n n = nf(1), \end{aligned}$$

对照可得 $f(1) = 0$，这说明 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有一个为 1，不妨设 $x_n = 1$，则剩下的未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 满足方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^k = n - 1\ (k = 1, 2, \cdots, n)$. 以此类推可得所有的 $x_i = 1$. 从而原方程组的解为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

7. (1) 不能. 因为 $1+2+\cdots+96=\frac{96\times(96+1)}{2}=48\times 97$ 不被 32 整除.

(2) 能. 每个三元集的元素和为 $\frac{1+2+\cdots+99}{33}=\frac{99\times(99+1)}{33\times 2}=150$. 将 1, 2, 3, …, 66 每两个一组，分成 33 个组，每组两数之和可以排成一个公差为 1 的等差数列：

$$1+50,\ 3+49,\ \cdots,\ 33+34,\ 2+66,\ 4+65,\ \cdots,\ 32+51.$$

故如下 33 组数，每组三个数之和均相等：

$$\{1,50,99\},\{3,49,98\},\cdots,\{33,34,83\},$$
$$\{2,66,82\},\{4,65,81\},\cdots,\{32,51,67\}.$$

注 此题的一般情况是

对哪些正整数 n，能将集合 $M=\{1,2,3,\cdots,3n\}$ 表示为它的 n 个三元子集的并集，且这几个三元子集的元素之和都相等？

解 首先，要求 $n\mid 1+2+3+\cdots+3n$，即

$$n\left|\frac{3n(3n+1)}{2}\right.\Rightarrow 2\mid 3n+1.$$

所以，n 为奇数.

当 n 为奇数时，可将 1, 2, 3, …, $2n$ 每两个一组，分成 n 个组，每组两数之和可以排成一个公差为 1 的等差数列：

$$1+\left(n+\frac{n+1}{2}\right),\ 3+\left(n+\frac{n-1}{2}\right),\ \cdots,\ n+(n+1);$$

$$2+2n,\ 4+(2n-1),\ \cdots,\ (n-1)+\left(n+\frac{n+3}{2}\right).$$

其通项公式为

$$a_k=\begin{cases}2k-1+\left(n+\frac{n+1}{2}+1-k\right), & 1\leqslant k\leqslant \frac{n+1}{2},\\ [1-n+2(k-1)]+\left[2n+\frac{n+1}{2}-(k-1)\right], & \frac{n+3}{2}\leqslant k\leqslant n.\end{cases}$$

易知 $a_k+3n+1-k=\frac{9n+3}{2}$ 为一常数，故如下 n 组数每组三个数之和均相等：

$$\left\{1,\ n+\frac{n+1}{2},\ 3n\right\},\ \left\{3,\ n+\frac{n-1}{2},\ 3n-1\right\},\ \cdots,\ \left\{n,\ n+1,\ 3n+1-\frac{n+1}{2}\right\};$$

$$\left\{2,\ 2n,\ 3n+1-\frac{n+3}{2}\right\},\ \cdots,\ \left\{n-1,\ n+\frac{n+3}{2},\ 2n+1\right\}.$$

当 n 为奇数时，依次取上述数组为 A_1，A_2，…，A_n，则其为满足题设的三元子集族. 故 n 为所有的奇数.

8. 能.

取 2008 个素数 $p_1<p_2<\cdots<p_{2008}$. 构造正整数集合 $\mathbf{N}^*$ 的子集 A_1，A_2，…，A_{2009} 如下：A_1 表示所有被 p_1 整除的数所组成的集合；A_2 表示所有被 p_2 整除但不被 p_1 整除的数所组成的集合；……；A_{2008} 表示所有被 p_{2008} 整除但不被 p_1，p_2，…，p_{2007} 整除的数所组成的集合；A_{2009} 表示所有不被 p_1，p_2，…，p_{2008} 整除的数所组成的集合.

则 A_1，A_2，…，A_{2009} 两两不交且并集为 $\mathbf{N}^*$.

此时，对任意 $x\in A_m$，$y\in A_n$，$m<n$，有 $p_m\mid x$，故 $p_m\mid xy$；另一方面，x，y 均不被 p_1，p_2，…，p_{m-1} 整除，故 xy 不被 p_1，p_2，…，p_{m-1} 整除. 从而 $xy\in A_m$.

故将每个集合 A_i 各染上一种颜色即满足题意.

9. 首先，$m=1$，$n=2$ 使得 $\frac{n+1}{m}+\frac{m+1}{n}$ 是一个整数.

设正整数 m，$n(m<n)$ 使得 $\frac{n+1}{m}+\frac{m+1}{n}\in\mathbf{N}$，记 $\frac{n+1}{m}+\frac{m+1}{n}=t$，则

$$tn=\frac{n(n+1)}{m}+m+1,$$

所以，$\frac{n(n+1)}{m}\in\mathbf{N}$. 令 $\frac{n(n+1)}{m}=s$，则 $s>n$，于是

$$tn=\frac{n(n+1)}{m}+m+1=s+\frac{n(n+1)}{s}+1,$$

所以
$$t=\frac{s+1}{n}+\frac{n+1}{s}.$$

即若 $(m,\ n)$ 是满足题意的数对，则 $(n,\ s)$ 也是满足题意的数对. 且 $s>n>m$.

故存在无穷多组正整数 $(m,\ n)$，使得 $\frac{n+1}{m}+\frac{m+1}{n}$ 是一个整数.

注　试比较第 6 节极端原理中的例 8.

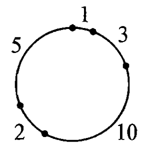
10. 由于 k 个点中，每两个点间可得一段优弧和一段劣弧，故至多可得

$k(k-1)$ 个弧长值.

当 $k(k-1) \geqslant 20$ 时,则 $k \geqslant 5$;

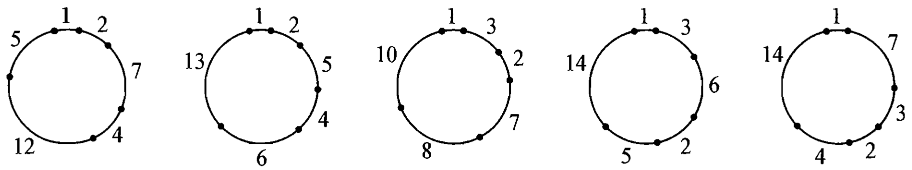
而当 $k(k-1) \geqslant 30$ 时,则 $k \geqslant 6$.

另一方面,在 $k=5$ 时,可以给出剖分图



所以,$P_{21}=5$,$T_{21}=(1, 3, 10, 2, 5)$.

对于 $n=31$,在 $k=6$ 时,类似可给出剖分图



(第 10 题)

所以,$P_{31}=6$,$T_{31}=(1, 2, 7, 4, 12, 5)$, $(1, 2, 5, 4, 6, 13)$, $(1, 3, 2, 7, 8, 10)$, $(1, 3, 6, 2, 5, 14)$ 或 $(1, 7, 3, 2, 4, 14)$ 等.

11. (1) 取定整数 $q>n$,取 $S_1=\{n!q, n!q^2, \cdots, n!q^n\}$,则对任意两个不同的非空集 $A, B \subseteq S_1$, $f(A)$ 和 $f(B)$ 显然是正整数. 假设此时 $f(A)=f(B)$,那么

$$|B| \sum_{n!q^i \in A} q^i = |A| \sum_{n!q^j \in B} q^j.$$

因为 $q>n \geqslant \max\{|A|, |B|\}$,故上述等式中的正整数 $|B| \sum\limits_{n!q^i \in A} q^i$ 与 $|A| \sum\limits_{n!q^j \in B} q^j$ 的 q 进制表示分别是 $\sum\limits_{n!q^i \in A} |B| q^i$ 与 $\sum\limits_{n!q^j \in B} |A| q^j$,从而它们的形式应当完全相同,由此可得 $A=B$,矛盾!

所以对 S_1 的任意两个不同的非空子集 A, B, $f(A)$ 和 $f(B)$ 是两个不相等的正整数.

(2) 由 S_2 的定义易知,对任意两个不同的非空集 $A, B \subseteq S_2$,有两个非空集 $A_1, B_1 \subseteq S_1$ 满足 $|A_1|=|A|$, $|B_1|=|B|$,且

$$f(A)=K!xf(A_1)+1, \ f(B)=K!xf(B_1)+1. \qquad ①$$

显然 $f(A)$ 与 $f(B)$ 都是正整数.

若正整数 d 是 $f(A)$ 与 $f(B)$ 的一个公约数,则 $d \mid f(A)f(B_1)-f(B)f(A_1)$,故由 ① 可知 $d \mid f(A_1)-f(B_1)$,但由 K 的选取及 S_1 的构作可知,$|f(A_1)-f(B_1)|$ 是小于 K 的非零整数,故为 $K!$ 的约数,从而 $d \mid K!$. 再结合 $d \mid f(A)$ 及 ① 可知 $d=1$,因此 $f(A)$ 与 $f(B)$ 互素.

（3）显然可选择 2^n-1 个大于 K 且互不相同的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_{2^n-1}$. 将 S_1 中一切非空子集的元素平均值分别记为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2^n-1}$，则

$$(p_i, K!\alpha_i)=1,\ 1\leqslant i\leqslant 2^n-1,$$

且

$$(p_i^2, p_j^2)=1,\ 1\leqslant i<j\leqslant 2^n-1.$$

故由中国剩余定理可知，同余方程组

$$K!x\alpha_i\equiv-1(\bmod p_i^2),\ i=1, 2, \cdots, 2^n-1$$

有正整数解.

任取这样一个解 x，则对任意非空集 $A\subseteq S_2$，$f(A)=K!xf(A_1)+1$ 是某个 p_i^2 的倍数，故为合数，因此 $S_2=\{K!x\alpha+1\mid\alpha\in S_1\}$ 满足题意.

习　题　19

1. 因为

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\right]^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\right]^2=a^2+b^2,$$

所以，每一次操作后，这三个数的平方和保持不变（即三个数的平方和是不变量）. 而 $5^2+12^2+18^2=493$，$3^2+13^2+20^2=578$，于是，无论如何操作，数 5，12，18 不会变为数 3，13，20.

2. 考虑到 $(1+a)(1+b)=1+a+b+ab$，因此操作前后 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)$ 保持不变，其中 n 为黑板上数的个数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为这 n 个数的值.

设最后剩下的数为 x，则

$$x+1=\prod_{i=1}^{100}\left(1+\frac{1}{i}\right)=\prod_{i=1}^{100}\frac{i+1}{i}=101,$$

所以 $x=100$.

3. 答案是否定的.

对于如图所示的一个 4×4 的数表，每经过一次操作，仍然是它本身，即这个数表在上述操作中是不变量. 所以，这个数表不可能经过有限次操作后，使得所有的小方格中的数都变为 1.

1	−1	−1	1
−1	1	1	−1
−1	1	1	−1
1	−1	−1	1

（第 3 题）

4. 每一次变化，都有两条不同颜色的变色龙消失，而增

加了两条第三种颜色的变色龙.用三元数组(a, b, c)来表示变色龙的条数，其中a, b, c分别表示灰色，褐色，紫色的变色龙的条数.在一次变化后，(a, b, c)变为$(a-1, b-1, c+2)$，或者变为$(a-1, b+2, c-1)$，或者变为$(a+2, b-1, c-1)$.

由于灰色和褐色变色龙的数目之差的变化只能是0，-3和3，也就是说，这个差被3除所得的余数不变，这是一个不变量！开始时，$a-b=13-15=-2$，如果变为同一颜色，则有$a-b\equiv 0 \pmod 3$，不可能.

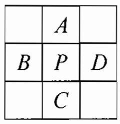
5. 对于每次有效的移动，按照规则存在唯一的反向移动，因此只需证明不能从最终位置按照规则移动到开始位置.

在最终的情形下，4个筹码的坐标$(x, y)=(0,0),(1,1),(3,0),(2,-1)$均满足$x\equiv y \pmod 3$，根据筹码的移动规则可知，无论多少次移动，4个筹码的坐标仍满足$x\equiv y \pmod 3$，因此不可能移到最初情形$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.从而命题成立.

6. 考虑黑色区域周长之和(注意两个相邻黑格的公共边界并不计入周长).

一开始任选$n-1$个方格染成黑色，此时黑色区域周长至多为$4(n-1)$.在此后逐步将一些方格染黑的过程中，我们证明黑色区域的周长之和是个不增的量.

事实上，如右图，若在某一时刻与未染色的P格相邻的四格A, B, C, D中已有k个为黑色，那么添上P后黑色区域少去k条边界，同时增加$4-k$条边界，但P能染色的前提是$k\geqslant 2$，从而$4-k\leqslant k$，这样P格染色后黑色区域周长之和不增.



(第 6 题)

假设最终所有方格都染黑，那么黑色区域周长应为$4n>4(n-1)$，矛盾！所以必定无法染黑所有的方格.

7. 显然黑板上只能出现正有理数.设某一时刻黑板上有有理数$x=\dfrac{p}{q}$，$(p, q)=1$，则由x可得到$2x+1=\dfrac{2p+q}{q}$或$\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{p}{p+2q}$.

注意到

$$(2p+q, q)=(2p, q)\leqslant 2(p, q)=2,\ (p, p+2q)=(p, 2q)\leqslant 2(p, q)=2,$$

而
$$(2p+q)+q=p+(p+2q)=2(p+q),$$

故由x得到的最简分数的分子与分母之和为$p+q$或$2(p+q)$，即分子分母之和或者不变或者变为原来的两倍.由于后来出现的2008的分子分母之和为2009是一个奇数，故从初始数到2008的变化过程中没有出现过加倍的情况.

因此初始数的分子分母之和就是 2009. 再考虑到初始数是一个正整数，故它为 2008.

8. 将给定的这一排硬币从左至右依次编号为 1，2，…，2009.

在任何一步操作之前，设所有黑面朝上的硬币所在位置从左至右分别对应编号 a_1，a_2，…，a_k(其中 k 亦可能随操作而变化).

构造一个量 $S=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}a_i$.

设此时对编号 a_j 的硬币进行操作. 考虑操作后相应于 S 的量 S'.

(1) 硬币 a_j 不是第一枚或最后一枚，即 $a_j\neq 1$，2009. 我们来验证 $S'=S$：

若与 a_j 相邻的两枚硬币同色面朝上，可不妨假定操作前第 a_j-1，a_j+1 枚硬币均白面朝上，则操作后它们黑面朝上，其余硬币无变化，故

$$S'-S=((-1)^{j+1}(a_j-1)+(-1)^{j+2}a_j+(-1)^{j+3}(a_j+1))-(-1)^{j+1}a_j=0.$$

若第 a_j-1，a_j+1 枚硬币异色面朝上，可不妨假定操作前第 a_j-1 枚硬币白面朝上，第 a_j+1 枚硬币黑面朝上(即 $a_{j+1}=a_j+1$)，类似地有

$$S'-S=((-1)^{j+1}a_j+(-1)^{j+2}(a_j+1))-((-1)^{j+1}(a_j-1)+(-1)^{j+2}a_j)=0.$$

(2) 硬币 a_j 是最后一枚，即 $j=k$，$a_k=2009$.

我们引进编号为 $a_{k+1}=2010$ 的“虚拟硬币”，操作前它黑面朝上. 记

$$S_1=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}a_i=S+(-1)^{k+2}2010.$$

由前一种情形的讨论知 $S_1'=S_1$，而操作后第 2010 枚硬币白面朝上，所以

$$S'=S_1'=S_1=S+(-1)^{k+2}2010.$$

(3) 硬币 a_j 就是第一枚，即 $j=1$，$a_1=1$.

若操作前 $a_2=2$，则

$$S'=1-\sum_{i=3}^{k}(-1)^{i+1}a_i=-a_1+a_2-\sum_{i=3}^{k}(-1)^{i+1}a_i=-S;$$

若操作前 $a_2>2$，则

$$S'=1-2+\sum_{i=3}^{k+1}(-1)^{i+1}a_{i-1}=-a_1+\sum_{i=2}^{k}(-1)^{i+2}a_i=-S.$$

综合(1)、(2)、(3)可知，操作前后 S，S' 总满足 $S'\equiv\pm S(\bmod 2010)$. 若要使所有硬币均黑面朝上，则最终的 $S=\sum_{i=1}^{2009}(-1)^{i+1}i=1005$，故仅有一种可

能的初始状态，即起初第 1005 个位置上的硬币黑面朝上.

最后构造一种操作方式使上述初始状态最终达到所有硬币黑面朝上的状态.

记第 1005 个位置为 m. 假如黑面朝上的硬币刚好出现在 $m-k$ 到 $m+k$ 位置上($k\in\mathbf{N}$)，若 $k=2l$ ($l\in\mathbf{N}$)，则依次对如下位置的硬币进行操作：

$$m-2l,\ m+2l,\ m-(2l-2),\ m+(2l-2),\ \cdots,\ m-2,\ m+2,\ m;$$

若 $k=2l+1$($l\in\mathbf{N}$)，则依次对如下位置的硬币进行操作：

$$m-(2l-1),\ m+(2l-1),\ m-(2l-3),\ m+(2l-3),\ \cdots,\ m-1,\ m+1.$$

两种情况下均可使黑面朝上的硬币刚好出现在 $m-k-1$ 到 $m+k+1$ 位置上. 由于初始状态就是 $k=0$ 的情形，因此根据数学归纳法可知 $k=1004$ 的情形可以通过适当操作而得到，此时所有硬币均黑面朝上.

从而满足题意的位置就是第 1005 个位置.

习　题　20

1. 设任意给定的一群人有 n 个. 用顶点表示这 n 个人. 当且仅当顶点 u，v 表示的两个人是朋友时令 u，v 相邻，得到 n 个顶点的简单图 G.

G 中任意顶点 x 的度 $d(x)$ 满足 $0\leqslant d(x)\leqslant n-1$. 如果图 G 的顶点的度都不相同，则图 G 具有 0 度顶点 u 和 $n-1$ 度顶点 v. $n-1$ 度顶点和 G 中其他顶点都相邻，特别地和 0 度顶点 u 相邻，矛盾. 这就证明了 G 中必定有两个顶点，它们的度相同. 也就是说，这群人中必有两个人，他们的朋友一样多.

2. 不存在这样的多面体. 事实上，如果这样的多面体存在，那么用顶点表示这个多面体的面，并且仅当 v_i，v_j 所代表的两个面有公共棱时，在图 G 相应的两顶点之间连一条边，依题意，每个 $d(v)$ 是奇数，于是奇数个顶点度数之和也是奇数，这与定理相违. 证毕.

3. 把该团体的成员视为顶点，其顶点全体记做 V. 对于任意两个顶点 u，v 所代表的成员，当且仅当彼此认识，则在 u，v 之间连一条边，得到一个含 100 个顶点的简单图 G. 已知条件是，图 G 中任意四个顶点中都至少有一顶点和其他三个顶点相邻. 要求图 G 中度为 99 的顶点个数的最小值 m.

当图 G 是完全图时，每个顶点的度都是 99，所以有 100 个度为 99 的顶点.

当图 G 是非完全图时，图 G 中必有两个不相邻的顶点 u 和 v. 如果除 u 和 v 外另有两个顶点 x，y 不相邻，则 u，v，x 和 y 中不存在和其他三个顶点都相邻的顶点，与题意矛盾(与图 G 的性质矛盾). 因此 G 中除 u，v 外任意两个

顶点相邻.

此时，如果 G 中除 u、v 外的任何 x 都和 u，v 相邻，则 $d(x)=99$，即 G 中度为 99 的顶点个数为 98. 设 G 中除 u、v 外有个顶点 x 和 u、v 不都相邻，则由 G 的性质知，G 中除 u，v，x 外的任意顶点 y 和 u、v、x 都相邻. 因此 $d(u)\leqslant 98$，$d(v)\leqslant 98$，$d(x)\leqslant 98$，$d(y)=99$. 所以 G 中度为 99 的顶点个数为 97.

这表明图 G 中度为 99 的顶点个数的最小值为 97.

回到原问题，即得：该团体中认识其他所有人的成员最少是 97 个.

注　例题中的成员数 100 改为任意的 $n(n\geqslant 4)$，其他条件不变，则结论为该团体至少有 $n-3$ 人认识其他所有人.

4. 将 5 个数看成 5 个顶点，当且仅当两数之和为有理数时，令相应的两个顶点相邻，得一个简单图 G，只需证明 G 中存在 3 个顶点两两不相邻即可.

首先说明图中不存在三角形（即长为 3 的圈）. 事实上，若顶点 x，y，z 两两相邻，那么 $x+y$，$y+z$，$z+x$ 都是有理数，从而 x，y，z 都是有理数，与已知矛盾. 同理可知图中无五边形（即长为 5 的圈）.

若某个顶点 x 与至少三个顶点 y，z，u 相邻，则 y，z，u 两两不相邻（否则将产生以 x 为一个顶点的三角形），这三个顶点即为所求.

若某个顶点 x 与至多一个顶点 v 相邻，那么由于其余三个顶点 y，z，u 不构成三角形，所以必有两点，例如 y，z 不相邻，则 x，y，z 即为所求.

假如以上两种情况都不满足，那么每个顶点恰好是两条边的端点，由一笔画理论易知这个图是一个长为 5 的圈，矛盾！故这种情况不会发生.

综上所述，必有三个顶点两两不相邻，故命题得证.

注　实际上，这里相当于证明了：对 5 阶完全图 K_5 所有的边染 A，B 两种颜色之一，若不存在颜色 A 的五边形，则必存在同色三角形.

5. 作一个图 G：将 1，2，…，13 看成 13 个顶点，其中对满足 $3\leqslant|i-j|\leqslant 5$ 的正整数 i，j，令顶点 i，j 相邻.

如果可以按照题目要求进行编号，则图 G 必有一个哈密顿圈 C（经过图中每个顶点恰好一次的圈）.

将 G 的顶点分成如下两个集合

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 11,\ 12,\ 13\},\ B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}.$$

由于每个顶点必是哈密顿圈 C 中两条边的端点，但 A 中任意两个顶点不相邻，因此 A，B 之间共有 C 中的 12 条边，因此 C 中恰有一条边是连接 B 中两个顶点的，不妨记为 e.

对于 B 的顶点 4，A 中只有一个顶点 1 与之相邻，所以 4 必是边 e 的一个

端点. 同理 10 也是边 e 的端点. 但 4 与 10 不相邻. 矛盾.

所以满足题意的编号方式不存在.

6. 以凸 n 边形的顶点以及所有对角线的交点为顶点，以顶点间已连有的线段为边构成一个平面图 G. 设 G 的顶点数为 V，边数为 E，面数为 F(其中，凸多边形的外部也算作一个面，故所求的结果即为 $F-1$).

由于凸 n 边形的任意 4 个顶点唯一对应形内的一个交点，从而形内的交点总数为 C_n^4，故 G 的顶点数 $V=n+C_n^4$.

又由于 G 中作为凸 n 边形顶点的顶点具有度数 $n-1$，而作为凸 n 边形对角线交点的顶点具有度数 4，所以边数 $E=\frac{1}{2}(n(n-1)+4C_n^4)$.

将以上两式代入平面图的欧拉公式 $V-E+F=2$ 得

$$\begin{aligned}F-1=E-V+1&=\frac{1}{2}(n(n-1)+4C_n^4)-(n+C_n^4)+1\\&=\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12),\end{aligned}$$

即该凸 n 边形被它的对角线分成 $\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)$ 个部分.

7. 用 20 个顶点 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{20}$ 代表 20 名成员，两名选手比赛过，则在相应顶点间连一条边，得图 G.

设各顶点度数为 $d_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20$，由题意得 $d_i\geqslant 1$，又图 G 中有 14 条边，因此有 $d_1+d_2+\cdots+d_{20}=2\times 14=28$.

在每个顶点 v_i 处抹去 d_i-1 条边，至多抹去

$$(d_1-1)+(d_2-1)+\cdots+(d_{20}-1)=8$$

条边. 此时所得的图 G' 中至少还有 $14-8=6$ 条边，并且 G' 中每个顶点的度数至多是 1. 因此这 6 条边的 12 个端点各不相同，从而相应的 6 场比赛的 12 名参赛者各不相同.

8. 设数列的 n 项可分成每组之和为 49 的 41 个组 $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{41}$，又可分成每组之和为 41 的 49 个组 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{49}$. 把 $u_i(1\leqslant i\leqslant 41)$ 和 $v_j(1\leqslant j\leqslant 49)$ 看成顶点，如果存在 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 同时属于 u_i 和 v_j，就在 $u_i,\ v_j$ 间连一条边，得简单图 G. 下面证明 G 是连通图.

考虑 G 的最大连通分支 G'. 设 G' 含有 a 个顶点 $u_{i_s},\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ 和 b 个顶点 $v_{j_t},\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ b$，则所有出现在某个 $u_{i_s}(1\leqslant s\leqslant a)$ 中的项 x_k 必同时出现在某个 $v_{j_t}(1\leqslant t\leqslant b)$ 中(否则 G 中将有比 G' 更大的连通分支)，反之

亦然. 这些数的总和一方面等于 $49a$，一方面又等于 $41b$，故 $49a=41b$，所以 $a+b\geqslant 41+49=90$，只能 $G'=G$. 这样 G 至少有 89 条边，又数列的项数不少于 G 的边数，故 $n\geqslant 89$.

另一方面，当 $n=89$ 时，若数列满足

$$x_1=x_2=\cdots=x_{41}=41,\ x_{42}=x_{43}=\cdots=x_{81}=8,\ x_{82}=x_{83}=\cdots=x_{89}=1,$$

则容易验证满足题意. 因此 n 的最小值为 89.

9. 首先注意到，只要存在某个 $x\in\mathbf{Q}$，则对其余任意数 t，由 $x+t$ 与 xt 之一为有理数即可推知 $t\in\mathbf{Q}$(注意这些数均非零)，从而 10 个数均为有理数.

作一个 2 色完全图 K_{10}，在它的 10 个顶点上分别放上这 10 个数. 如果某两数的和为有理数，就在相应的顶点间连一条蓝边，否则，这两数的积必为有理数，那么连一条红边. 由 Ramsey 定理得，该图中必有同色三角形.

(1) 若存在蓝色三角形，则表明存在 3 个数 $x,\ y,\ z$ 两两之和为有理数，故 $x,\ y,\ z\in\mathbf{Q}$，从而 10 个数均为有理数.

(2) 若存在红色三角形，则表明存在 3 个数 $x,\ y,\ z$ 两两之积为有理数，因而 $x^2=\dfrac{xy\cdot xz}{yz}\in\mathbf{Q}$. 设 $x=m\sqrt{a}$，其中 $a\in\mathbf{Q}$，$m=\pm 1$. 由于 $xy=m\sqrt{a}\,y=b\in\mathbf{Q}$，所以 $y=\dfrac{b\sqrt{a}}{ma}=c\sqrt{a}$，其中 $c\in\mathbf{Q}$，$c\neq m$. 对其余任意数 t，如果 xt 或 yt 为有理数，那么经过类似的讨论，可知 $t=d\sqrt{a}$，其中 $d\in\mathbf{Q}$，因而 $t^2\in\mathbf{Q}$. 反之，如果 $xt,\ yt\notin\mathbf{Q}$，则 $x+t,\ y+t\in\mathbf{Q}$，但 $(x+t)-(y+t)=(m-c)\sqrt{a}\notin\mathbf{Q}$，矛盾.

综上，我们证明了或者每个数都是有理数，或者每个数的平方都是有理数，这正是所要证明的.

10. 将 X 的 n 个元素视作顶点，对任意 $x,\ y\in X,\ x\neq y$，若 $f(x,\ y)=1$，则作一条有向边 $x\rightarrow y$，得有向图 G. 由已知条件得，图 G 的任意两个顶点 $x,\ y$ 之间恰有一条有向边相连(这样的图 G 是 n 阶有向完全图 $\overline{K_n}$，称作"竞赛图").

情况(1)表明不存在从顶点 $y\in B$ 到顶点 $x\in A$ 的有向边，情况(2)表明可以沿有向边遍历 X 各点恰好一次，即 G 存在有向哈密顿圈. 显然两者不能同时成立.

假设上述情况(1)不成立，我们证明情况(2)必成立.

任取一点 $x\in X$，记 $P=\{a\in X\mid x\rightarrow a\}$，$Q=\{a\in X\mid a\rightarrow x\}$. 因情况(1) 不成立，故 $P,\ Q$ 均为非空集，且存在 $y\in P,\ z\in Q$，使 $y\rightarrow z$，这表明图 G 中存在圈 $x\rightarrow y\rightarrow z\rightarrow x$.

设 $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_k \to x_1$ 是图 G 中的圈. 下面证明,若 $k < n$,则 G 中存在更长的圈,从而 G 中必存在长为 n 的圈,即哈密顿圈.

设 $k < n$. 记 $X_0 = X - \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$,则 X_0 为非空集.

若有某个 $u \in X_0$,使得存在边 $x_i \to u$ 及 $u \to x_j$,其中 $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$,不失一般地可设 $i = 1$,则必存在这样的 $s \in \{1, 2, \cdots, j-1\}$,使 $x_s \to u \to x_{s+1}$,这表明 G 中有更长的圈

$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_s \to u \to x_{s+1} \to \cdots \to x_k \to x_1.$$

若不出现这样的 $u \in X_0$,记 $P = \{a \in X_0 \mid x_1 \to a\}$, $Q = \{a \in X_0 \mid a \to x_1\}$,则对任意 $y \in P$(如果 P 非空),必有 $x_i \to y$, $i = 1, 2, \cdots, k$;对任意 $z \in Q$(如果 Q 非空),必有 $z \to x_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 因情况(1)不成立,故 P, Q 均为非空集,且存在 $y \in P$, $z \in \mathbf{Q}$,使 $y \to z$,这时 G 中仍有更长的圈

$$x_1 \to y \to z \to x_2 \to \cdots \to x_k \to x_1.$$

从而 G 中必存在哈密顿圈 $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n \to x_1$,即情况(2)成立. 证毕.

“奥数”联赛冲刺篇——《高中数学联赛考前辅导》

- ◆ 选题经典且贴近高中联赛
- ◆ 知识上查漏补缺，能力上全面提升
- ◆ 全新模拟题让你提前感受考场氛围

读者对象：参加联赛的高中生、竞赛教练员、高中教师

“奥数”IMO终极篇——《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦》

- ◆ 从2009年起，每年出版一册
- ◆ 以国家集训队测试题和国家队训练题为主
- ◆ 收集了国内主要竞赛：全国联赛、联赛加试、冬令营、女子数学奥林匹克、西部数学奥林匹克、东南地区数学奥林匹克
- ◆ 附有美国、俄罗斯、罗马尼亚和国际数学奥林匹克

读者对象：参加联赛、冬令营等赛事的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

“奥数”域外篇——《全俄中学生数学奥林匹克(1993－2006)》

俄罗斯是世界上开展数学活动最早、最广泛、也是影响最大的国家之一。俄罗斯是世界上竞赛试题的最大生产国，不仅产量高，而且质量好，其中最出色的当数组合题。

本书收录1993－2006年俄罗斯9—11年级数学奥林匹克第四轮（联邦区域竞赛）和第五轮（全俄决赛）竞赛的所有试题和解答。

读者对象：参加数学竞赛的中学生、竞赛教练员、数学爱好者

更多图书信息及免费资料请登录：

http://www.hdsdjf.com/downloadfileinfor.aspx? classid=69

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书.高中卷.高中数学竞赛中的解题方法与策略/熊斌，何忆捷编著.—上海：华东师范大学出版社，2011.12
ISBN 978-7-5617-9202-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①熊…②何… Ⅲ.①中学数学课－高中－题解 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第279694号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷
高中数学竞赛中的解题方法与策略

编　　著　熊　斌　何忆捷
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　刘丽丽
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　苏州工业园区美柯乐制版印务有限责任公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　15.5
字　　数　274千字
版　　次　2012年7月第一版
印　　次　2013年1月第二次
印　　数　11001—16100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9202-5/G·5501
定　　价　29.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)