数学奥林匹克小丛书

第二版

高中卷 13

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG SHU

组合极值

马跃峰 编著

华东师范大学出版社

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂"，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前 言

极值问题历来是数学竞赛中的热点问题之一，而组合极值则是极值问题中的一个难点.

所谓组合极值，是指其函数自变量的取值为自然数或整数，或者问题涉及集合、子集与元素等一些离散的变量，要求在特定条件(未必是变量满足的等式或不等式，它常常是变量具有的某种性质)下，求出有关量能达到的最大值或最小值.

从问题结构上看，组合极值包括这样两个方面：论证与构造."论证"是论证某种量满足某个不等式或论证某些对象具有某种性质，"构造"是构造一组合乎题设条件的对象或构造使命题论断不成立的反例.这两个方面无论是从思考问题的角度还是从处理问题的方式上往往都有着较大的差别，而且两者都需要灵活的思路、丰富的想象与创造性的构想，因而它常常是数学竞赛考察的重点.

从极值对象的类型上看，组合极值可分为"和积型"极值和"参数型"极值.所谓"和积型"极值，是指求极值的函数的表现形式是"和"或"积"的形式，本书前5单元介绍的就是求这种类型极值的5种常用方法.所谓"参数型"极值，是指求极值的对象或问题涉及某个参数，这种极值的主要特点是没有确定的待求极值的函数表达式，本书后8单元介绍的就是求这种类型极值的8种常用方法.

对于"参数型"极值，根据问题的提法不同，又可分为"存在型参数"极值与"全范围型参数"极值.所谓"存在型参数"极值，是指参数 k 具有这样的性质：存在某些与 k 有关的对象具有性质 p.此时，其"论证"是要证明：如果 $k>k_0$(或 $k<k_0$)，则任何合乎题设条件的对象都不具有性质 p，由此得到不等式 $k\leqslant k_0$(或 $k\geqslant k_0$).其"构造"是对 $k=k_0$，构造一个具有性质 p 的合乎题设条件的对象.简言之，是"论证用于不等式，构造用于等式".所谓"全范围型参数"极值，是指对任何合乎题设条件的对象，参数 k 都具有某种性质 p.此时，其"构造"是要解决这样的问题：如果 $k>k_0$(或 $k<k_0$)，则存在合乎题设条件

的对象使k不具有性质p，从而得到关于k的一个不等式$k\leqslant k_0$（或$k\geqslant k_0$）. 而其“论证”则是证明$k=k_0$时，k确实具有性质p. 简言之，是“论证用于等式，构造用于不等式”. 读者在阅读这两类问题时要注意它们在解题手法上的区别.

本书各单元虽有联系，但又相对独立，阅读时未必要遵循单元的先后顺序，可以先阅读自己感兴趣的部分，一些难度较大的问题也可先跳过去，待对书中所述方法有比较全面的把握时，再回过头来解决先前遗留的问题. 每个单元都配有习题，一般可采用相应单元介绍的方法求解，书后附有解答以供查对. 但读者不必囿于书中的方法，应尽量提出自己独特的创造性的见解.

本书可供高中学生、师范院校数学系师生和广大奥林匹克数学爱好者阅读.

本书在第一版的基础上，增加了一些例题和习题，改正了一些错误. 限于作者水平，书中谬误难免，敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2012年4月

目 录

1 不等式控制

组合极值的一个显著特点，就是其约束条件或所求的极值的函数式较复杂. 所谓不等式控制，就是对约束条件或极值函数进行放缩，使条件与极值函数之间的联系趋于明显. 通过放缩，使问题接近于一种标准形式：在 $f(x, y)=0$ 下，求 $u=g(x, y)$ 的最值，从而将组合极值化归为一般的极值求解.

不等式控制，通常有两种方式：一是对约束条件进行放缩，使隐蔽的约束条件明显化；二是对极值函数进行放缩，使复杂的函数式简单化.

例 1 设 m 个互异的正偶数与 n 个互异的正奇数的和为 1987，求 $3m+4n$ 的最大值.（第 2 届 CMO 试题）

分析与解 本题的难点在于约束条件较复杂，可先利用不等式将其化简，进而将其放缩到出现目标函数式.

设题给的 m 个正偶数为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，n 个正奇数为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=1987. \qquad ①$$

注意到极值函数是关于 m、n 的函数，而在约束条件中，m、n 仅作为各变量的下标. 于是，应将①中对 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的约束转化为对 m、n 的约束.

因为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是互异的正偶数与正奇数，所以

$$\begin{aligned}1987&=(a_1+a_2+\cdots+a_m)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&\geqslant(2+4+6+\cdots+2m)+(1+3+\cdots+2n-1)\\&=m^2+n^2+m. \qquad ②\end{aligned}$$

注意到我们的目标是：$3m+4n\leqslant A$（常数）的形式，呈现 Cauchy 不等式结构，所以应将 ② 的右边配方，化为“平方和”. 从而

$$1987+\frac{1}{4}\geqslant\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2,$$

$$\left(1987+\frac{1}{4}\right)(3^2+4^2)\geqslant(3^2+4^2)\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\right]$$
$$\geqslant\left(3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n\right)^2,$$

所以 $3m+\frac{3}{2}+4n\leqslant5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}$，所以 $3m+4n\leqslant\left[5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\right]=221$.

下面构造一组数，使不等式成立等号. 先找 (m, n)，使 $3m+4n=221$.

此不定方程有多个解，但为了使 (m, n) 满足②，应使相应的偶数和奇数都尽可能小，这就要求 m 与 n 充分接近. 通过试验，得到 $m=27$，$n=35$ 时，$3m+4n=221$，且 $m^2+n^2+m=1981<1987$，满足②.

取最小的 27 个正偶数为 $a_1=2$，$a_2=4$，…，$a_{27}=54$，最小的 35 个正奇数为 $b_1=1$，$b_2=3$，…，$b_{34}=67$，$b_{35}=69$，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{27})+(b_1+b_2+\cdots+b_{35})=1987-6,$$

再将 b_{35} 修改为：$69+6=75$，得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{27})+(b_1+b_2+\cdots+b_{35})=1987.$$

综上所述，$3m+4n$ 的最大值为 221.

注　本例解题的关键，是将①式化为②式，而后面利用 Cauchy 不等式则不是本质的. 实际上，得到②式后，求 $3m+4n$ 的极值也可用三角代换：

由②，可令 $r=\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}$，$m=-\frac{1}{2}+r\cos\theta$，$n=r\sin\theta$，

则 $3m+4n=3r\cos\theta+4r\sin\theta-\frac{3}{2}=5r\sin(\theta+t)-\frac{3}{2}\leqslant5r-\frac{3}{2}\leqslant5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}$（下同）.

例 2　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in\mathbf{R}^+$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=A$（常数），对给定的正整数 k，求 $\sum\frac{1}{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}$ 的最大值. 其中求和对 $1, 2, \cdots, n$ 中的所有 k-元数组 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 进行.

分析与解　本题的难点在于目标函数较复杂，期望利用不等式将其化简. 由目标函数的结构特征，想到将 $\frac{1}{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}$ 化为 $\frac{1}{x_{i_1}}+\frac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\frac{1}{x_{i_k}}$ 以利用条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=A$. 这恰好符合“倒数型不等式”：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\geqslant$

$\dfrac{k^2}{a_1+a_2+\cdots+a_k}$的特征. 于是,利用“倒数型不等式”,有

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\leqslant\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}}{k^2}.$$

所以
$$\sum\frac{1}{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}\leqslant\sum\frac{\frac{1}{x_{i_1}}+\frac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\frac{1}{x_{i_k}}}{k^2}$$
$$=\frac{1}{k^2}\sum\left(\frac{1}{x_{i_1}}+\frac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\frac{1}{x_{i_k}}\right).$$

考察上式右边“和式”中每个项$\dfrac{1}{x_{i_j}}(j=1,2,\cdots,k)$出现的次数. 显然,$\dfrac{1}{x_{i_j}}$出现一次,等价于出现一个$\left(\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\cdots,\dfrac{1}{x_k}\right)$的含$\dfrac{1}{x_{i_j}}$的$k$-组合. 因为含有$\dfrac{1}{x_{i_j}}$的$k$-组合有$\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$个,所以$\dfrac{1}{x_{i_j}}$在“和式”中共出现$\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$次,所以

$$\frac{1}{k^2}\sum\left(\frac{1}{x_{i_1}}+\frac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\frac{1}{x_{i_k}}\right)=\frac{1}{k^2}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\frac{A}{k^2}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}.$$

其中等式在$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{n}{A}$时成立.

故$\sum\dfrac{1}{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}$的最大值为$\dfrac{A}{k^2}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

例3　设P是体积为1的正四面体T内(包括边界)的一个点,过P作4个平面平行T的4个面,将T分成14块,$f(P)$是那些既不是四面体也不是平行六面体的几何体的体积之和,求$f(P)$的取值范围.(第31届IMO备选题)

解　设P到正四面体$ABCD$的四个面的距离为d_1、d_2、d_3、d_4.

令$x_i=\dfrac{d_i}{h}$,h为正四面体的高. 则$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i=1$.

由于T分成的14块中,显然有4个体积分别为x_i^3的四面体. 此外,还有4个体积分别为$6\prod\limits_{\substack{j\neq i\\1\leqslant j\leqslant 4}}x_j$的平行六面体$(i=1,2,3,4)$. 比如,以$A$出发的3条棱为3度方向可得一个平行六面体,由对称性可作出4个平行六面体. 于是,

$$f(P)=1-\sum_{i=1}^{4}x_i^3-6\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}x_ix_jx_k.$$

显然，$f(P)\geqslant 0$.

其次，不妨设 $x_1+x_2\leqslant\frac{1}{2}$. 令 $x_1+x_2=t\leqslant\frac{1}{2}$，$x_1x_2=u\geqslant 0$，$x_3x_4=v\geqslant 0$. 由 $\sum_{i=1}^{4}x_i=1$，有

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^3=(t^3-3tu)+(1-t)^3-3(1-t)v,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}x_ix_jx_k=(1-t)u+tv,$$

所以
$$\begin{aligned}1-f(P)&=1-3t+3t^2+3(2-3t)u+3(3t-1)v\\&\geqslant 1-3t+3t^2+3(3t-1)v.\end{aligned}$$

(1) 若 $\frac{1}{3}<t\leqslant\frac{1}{2}$，则

$$3t-1\geqslant 0,\ 1-f(P)\geqslant 1-3t+3t^2\geqslant\frac{1}{4},$$

其中等式在 $t=\frac{1}{2}$，$u=v=0$，即 P 为棱的中点时成立.

(2) 若 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3}$，则 $3t-1\leqslant 0$，而 $v=x_3x_4\leqslant\frac{(x_3+x_4)^2}{4}=\frac{(1-t)^2}{4}$，所以

$$\begin{aligned}1-f(P)&\geqslant 1-3t+3t^2+3(3t-1)\cdot\frac{(1-t)^2}{4}\\&=\frac{3(3t^2+1-3t)t}{4}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

所以，不论哪种情形，都有 $0\leqslant f(P)\leqslant\frac{3}{4}$.

又 P 为四面体的顶点时，$f(P)=0$；P 为四面体的棱的中点时，$f(P)=\frac{3}{4}$.

综上所述，$f(P)$ 的取值范围是 $0\leqslant f(P)\leqslant\frac{3}{4}$.

例 4　设 $a_1, a_2, \cdots, a_6$；$b_1, b_2, \cdots, b_6$ 和 $c_1, c_2, \cdots, c_6$ 都是 $1, 2, \cdots,$

6 的排列，求 $\sum_{i=1}^{6} a_i b_i c_i$ 的最小值.（2005 年中国国家队选拔考试试题）

解　记 $S=\sum_{i=1}^{6} a_i b_i c_i$，由平均不等式得

$$S \geqslant 6\sqrt[6]{\prod_{i=1}^{6} a_i b_i c_i}=6\sqrt[6]{(6!)^3}=6\sqrt{6!}=72\sqrt{5}>160.$$

下证 $S>161$.

因为 $a_1b_1c_1$，$a_2b_2c_2$，…，$a_6b_6c_6$ 这 6 个数的几何平均为 $12\sqrt{5}$，而 $26<12\sqrt{5}<27$，所以 $a_1b_1c_1$，$a_2b_2c_2$，…，$a_6b_6c_6$ 中必有一个数不小于 27，也必有一个数不大于 26，而 26 不是 1，2，3，4，5，6 中某三个（可以重复）的积，所以必有一个数不大于 25.

不妨设 $a_1b_1c_1\geqslant 27$，$a_2b_2c_2\leqslant 25$，于是

$$\begin{aligned}S&=(\sqrt{a_1b_1c_1}-\sqrt{a_2b_2c_2})^2+2\sqrt{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}+(a_3b_3c_3+a_4b_4c_4)+(a_5b_5c_5+a_6b_6c_6)\\&\geqslant(\sqrt{27}-\sqrt{25})^2+2\sqrt{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}+2\sqrt{a_3b_3c_3a_4b_4c_4}+2\sqrt{a_5b_5c_5a_6b_6c_6}\\&\geqslant(3\sqrt{3}-5)^2+2\cdot 3\sqrt[6]{\prod_{i=1}^{6}a_ib_ic_i}\\&=(3\sqrt{3}-5)^2+72\sqrt{5}>161,\end{aligned}$$

所以 $S\geqslant 162$.

又当 a_1，a_2，…，a_6；b_1，b_2，…，b_6 和 c_1，c_2，…，c_6 都分别为 1，2，3，4，5，6；5，4，3，6，1，2；5，4，3，1，6，2 时，有 $S=1\times5\times5+2\times4\times4+3\times3\times3+4\times6\times1+5\times1\times6+6\times2\times2=162$，所以，$S$ 的最小值为 162.

例 5　给定整数 $n\geqslant 3$，实数 a_1，a_2，…，a_n 满足 $\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|=1$，求 $\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3$ 的最小值.（2009 年中国数学奥林匹克试题）

解　不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则对 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$|a_k|+|a_{n-k+1}|\geqslant|a_{n-k+1}-a_k|\geqslant|n+1-2k|,$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^3+|a_{n+1-k}|^3)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|a_{n+1-k}|)\left(\frac{3}{4}(|a_k|-|a_{n+1-k}|)^2+\right.$$

$$\left.\frac{1}{4}(|a_k|+|a_{n+1-k}|)^2\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|a_{n+1-k}|)^3$$
$$\geqslant\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3.$$

当 n 为奇数时，$\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3=2\cdot 2^3\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}i^3=\frac{1}{4}(n^2-1)^2$；

当 n 为偶数时，$\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3=2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i-1)^3=2(\sum_{j=1}^{n}j^3-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i)^3)=\frac{1}{4}n^2(n^2-2)$.

所以，当 n 为奇数时，$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3\geqslant\frac{1}{32}(n^2-1)^2$；

当 n 为偶数时，$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3\geqslant\frac{1}{32}n^2(n^2-2)$，等号均在 $a_i=i-\frac{n+1}{2}$，$i=1,2,\cdots,n$ 时成立.

因此，$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3$ 的最小值为$\frac{1}{32}(n^2-1)^2$（n 为奇数），或者$\frac{1}{32}n^2(n^2-2)$（n 为偶数）.

例 6　对正整数M，如果存在整数a、b、c、d，使得$M\leqslant a<b\leqslant c<d\leqslant M+49$，$ad=bc$，则称$M$为好数，否则称$M$为坏数，试求最大的好数和最小的坏数.（2006 年国家队选拔考试试题）

解　最大的好数是 576，最小的坏数是 443.

M 为好数的充分必要条件是：存在正整数 u、v，使得 $uv\geqslant M$，$(u+1)\cdot(v+1)\leqslant M+49$（$*$）

充分性：设 u、v 存在，不妨设 $u\leqslant v$，则$M\leqslant uv<u(v+1)\leqslant v(u+1)<(u+1)(v+1)\leqslant M+49$，取 $a=uv$，$b=u(v+1)$，$c=v(u+1)$，$d=(u+1)(v+1)$ 即可（$ad=bc$ 显然）.

必要性：设 a、b、c、d 存在，由 $ad=bc$ 知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，设其既约分数形式为$\frac{u}{r}$，则可设 $a=uv$，$b=rv$，$c=us$，$d=rs$. 由 $a<b$ 知 $u<r$，$r\geqslant u+1$，由 $a<c$ 知 $v<s$，$s\geqslant v+1$.

因此 $uv=a\geqslant M$，$(u+1)(v+1)\leqslant rs=d\leqslant M+49$.

现在求最大的好数，若 M 为好数，则由（$*$）及柯西不等式，知

$$\sqrt{M+49} \geqslant \sqrt{(u+1)(v+1)} \geqslant \sqrt{uv}+1 \geqslant \sqrt{M}+1,$$

因此 $M \leqslant 576$. 当 $M=576$ 时，取 $u=v=24$ 即可，故最大好数为 576.

下求最小的坏数. 首先，可证 443 是坏数.

实际上，假设对 $M=443$ 存在 u、v，使得（$*$）成立，则

$$\sqrt{492} \geqslant \sqrt{(u+1)(v+1)} \geqslant \sqrt{uv}+1.$$

于是 $uv \leqslant (\sqrt{492}-1)^2 = 493-2\sqrt{492} < 493-2\sqrt{484} = 449$，因此 $443 \leqslant uv \leqslant 448$.

此外，当 uv 固定时，熟知 u、v 越接近，$u+v$ 越小，$(u+1)(v+1)=uv+u+v+1$ 也越小.

设 $uv=443=1\cdot 443$，则 $u+v \geqslant 444$，$(u+1)(v+1) \geqslant 888$；

设 $uv=444=12\cdot 37$，则 $u+v \geqslant 49$，$(u+1)(v+1) \geqslant 494$；

设 $uv=445=5\cdot 89$，则 $u+v \geqslant 94$，$(u+1)(v+1) \geqslant 540$；

设 $uv=446=2\cdot 223$，则 $u+v \geqslant 225$，$(u+1)(v+1) \geqslant 672$；

设 $uv=447=3\cdot 149$，则 $u+v \geqslant 152$，$(u+1)(v+1) \geqslant 600$；

设 $uv=448=16\cdot 28$，则 $u+v \geqslant 44$，$(u+1)(v+1) \geqslant 493$.

这些均与 $(u+1)(v+1) \leqslant 492$ 矛盾，因此 443 确为坏数.

下证：小于 443 的正整数都是好数.

当 M 属于下列区间：[245, 258]；[259, 265]；[266, 274]；[275, 280]；[281, 292]；[293, 300]；[301, 311]；[312, 322]；[323, 328]；[329, 334]；[335, 341]；[342, 350]；[351, 358]；[359, 366]；[367, 375]；[376, 382]；[383, 385]；[386, 391]；[392, 400]；[401, 406]；[407, 412]；[413, 418]；[419, 425]；[426, 430]；[413, 433]；[434, 436]；[437, 442]时，对应的取 (u, v) 为(13, 20)；(13, 21)；(14, 20)；(17, 17)；(14, 21)；(17, 18)；(13, 24)；(18, 18)；(11, 30)；(17, 20)；(17, 24)；(18, 23)；(20, 21)；(17, 25)；(18, 24)；(14, 31)；(20, 22)；(17, 26).

最后对 $1 \leqslant M \leqslant 245$，设 $t^2 \leqslant M < (t+1)^2$，则 $1 \leqslant t \leqslant 15$. 若 $t^2 \leqslant M < t(t+1)$，则取 $u=t$，$v=t+1$，有 $uv \geqslant M$，$(u+1)(v+1)-M \leqslant (t+1)(t+2)-t^2 = 3t+2 \leqslant 47$；若 $t(t+1) \leqslant M < (t+1)^2$，则取 $u=v=t+1$，有 $uv \geqslant M$，$(u+1)(v+1)-M \leqslant (t+2)^2-t(t+1) = 3t+4 \leqslant 49$，综上所述，最大好数为 576，最小坏数为 443.

习 题 1

1 设 a、b、c、$a+b-c$、$b+c-a$、$c+a-b$、$a+b+c$ 是 7 个两两不同的质数，且 a、b、c 中有两个数的和是 800. 设 d 是这 7 个质数中最大数与最小数的差，求 d 的最大可能值.（2001 年中国数学奥林匹克试题）

2 设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$，满足条件 $\sum_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$，求 $(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的最大值.（2003 年西部数学奥林匹克试题）

3 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，求 $S_n=|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$ 的最大值.

4 设 $x_k(k=1, 2, \cdots, 1991)$ 满足 $|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{1990}-x_{1991}|=1991$. 令 $y_k=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}(k=1, 2, \cdots, 1991)$. 求 $F=|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1990}-y_{1991}|$ 的最大值.（第 25 届全俄数学奥林匹克试题）

5 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{1990}$ 是 $1, 2, \cdots, 1990$ 的一个排列，求 $F=|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-x_{1990}|$ 的最大值.（第 24 届全俄数学奥林匹克试题）

6 设 $0<p\leqslant a_i\leqslant q$，$b_i$ 是 a_i 的一个排列 $(1\leqslant i\leqslant n)$，求 $F=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{b_i}$ 的最值.（匈牙利数学奥林匹克试题）

2 累次极值

组合极值的一个特点是极值函数中变动的量较多，难于发现函数的变化趋势. 如果我们先冻结若干个变量，即视若干个变量为常数，则其函数的变化对剩下的变量的依赖关系就趋于明显，由此可比较容易地求出第一次极值. 然后“解冻”原来的变量，进而求出函数的极值.

冻结变量一般有两种方法：一是冻结一个变量，它通常用于求三元函数的极值：对于三元函数 $f(x, y, z)$，若固定变量 z，则函数可看成是关于 x、y 的二元函数. 在此基础上求出二元函数的极值 $G(z)$，再视 z 为变量，对$G(z)$求极值. 它的基本思路是：

$$u = f(x, y, z) = g(x, y) \leqslant G(z) \leqslant C.$$

但在有的情况下，$G(z)$的表达式是一种分段函数，则上述思路又可表示为

$$u = f(x, y, z) = g(x, y) \leqslant G(z) = \begin{cases} G_1(z), & (z \in A) \\ G_2(z), & (z \in B) \end{cases}$$

$$\leqslant \begin{cases} A_1, & (z \in A) \\ A_2, & (z \in B) \end{cases} \Rightarrow u \leqslant \max\{A_1, A_2\}.$$

特别地，如果 $g(x, y) \leqslant G(z) \leqslant C$ 中的等式不同时成立，则固定 z 的取值时，须分类处理(单独讨论 z 的若干特殊取值). 其基本思路为：

$$u = f(x, y, z) = \begin{cases} g_1(x, y) & (z = z_1) \\ \cdots & \cdots \\ g_k(x, y) & (z = z_k) \\ g(x, y) & (z \in A) \end{cases} \leqslant \begin{cases} G_1 & (z = z_1) \\ \cdots & \cdots \\ G_k & (z = z_k) \\ G(z) \leqslant G_A & (z \in A) \end{cases}$$

$\Rightarrow u \leqslant G$，其中 $G = \max\{G_1, G_2, \cdots, G_k, G_A\}$.

二是冻结多个变量，它通常用于求多(超过 3)元函数的极值：在多元函数

的解析式中，选择其中一个字母为主变元，冻结其他的所有变元，则函数变为一元函数 $f(t)$. 至此，先求出 $f(t)$的极值点 $f(t_0)$，再对 $f(t_0)$冻结变元（因为 $f(t_0)$是关于其他变元的函数），又化为一元函数求解. 如此下去，直至求出函数的极值.

从实质上看，累次极值就是放缩法，只是放缩方式是采用固定变量逐步消元.

我们先看一个求一般函数的极值的例子.

例1 设 x、y、z 为非负实数，$x+y+z=1$，求 $F=2x^2+y+3z^2$ 的最值.

解 首先，采用代入消元，有 $y=1-x-z$，所以

$$\begin{aligned} F &= 2x^2+1-x-z+3z^2 \\ &= 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+3\left(z-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{19}{24} \\ &\geqslant \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

又 $F\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}\right)=\frac{19}{24}$，所以 F 的最小值为$\frac{19}{24}$.

下面用求累次极值的方法求 F 的最大值. 固定变量 z，则 $x+y=1-z$（常数）.

对 $F=2x^2+y+3z^2$，因为 z 为常数，所以只须求 $2x^2+y=A$ 的最大值，其中 $x+y=1-z$. 为叙述问题方便，令 $1-z=t$，则 $x+y=t$，$0\leqslant x$，$y\leqslant t\leqslant 1$，t 为常数.

因为 $A=2x^2+y=2x^2+t-x$（代入消元），注意到 $0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1$，而二次函数的开口向上，顶点处不是最大值，所以 A 只能在 $x=0$ 或 $x=t$ 处取最大值. 所以，

$$g(z)=A_{\max}=\max\{t,\ 2t^2\}=\begin{cases} t & \left(0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\right), \\ 2t^2 & \left(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right). \end{cases}$$

还原成原变量，有

$$g(z)=A_{\max}=\max\{1-z,\ 2(1-z)^2\}=\begin{cases} 1-z & \left(\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1\right), \\ 2(1-z)^2 & \left(0\leqslant z\leqslant \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

再对 $g(z)$ 求最大值.

当 $0\leqslant z\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$F\leqslant g(z)+3z^2=2(1-z)^2+3z^2=5z^2-4z+2\leqslant 2$.

当 $\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1$ 时，$F\leqslant g(z)+3z^2=(1-z)+3z^2\leqslant 3$.

由此可见，对一切 x、y、z，恒有 $F\leqslant 3$，其中等式在 $x=y=0$，$z=1$ 时成立. 所以 F 的最大值为 3.

综上所述，F 的最小值为 $\frac{19}{24}$，最大值为 3.

注　本题求 F 的最大值时，若对次数与系数进行放缩，则解答异常简单. 实际上，$2x^2+y+3z^2\leqslant 2x+y+3z\leqslant 3x+3y+3z\leqslant 3$.

例 2　有 1988 个单位立方体，用它们(全部或一部分)拼成高为 1，底边长为 a、b、$c(a<b<c)$ 的三个正四棱柱 A、B、C. 现在把 A、B、C 都摆在第一象限，使各个底边都平行于坐标轴，C 的一个顶点在坐标原点，B 在 C 上，且 B 的任何一个单位立方体均在 C 的某个单位立方体上，但 B 的边界不与 C 的任何边界对齐. 同样，A 在 B 上，且 A 的任何一个单位立方体均在 B 的某个单位立方体上，但 A 的边界不与 B 的任何边界对齐. 这样得到一个三层楼. 问：a、b、c 取何值时，能摆出的三层楼的个数最多?(第 11 届奥地利—波兰数学竞赛试题)

分析与解　由“边界不对齐”，有 $a\leqslant b-2\leqslant c-4$，这样，$A$ 放在 B 上有 $(b-a-1)^2$ 种放法，B 放在 C 上有 $(c-b-1)^2$ 种放法. 于是，共有 $P=(b-a-1)^2(c-b-1)^2$ 个不同的三层楼. 这样，问题等价于：对所有满足 $1\leqslant a\leqslant b-2\leqslant c-4$，$a^2+b^2+c^2\leqslant 1988$ 的正整数 a、b、c，求 $P=(b-a-1)^2(c-b-1)^2$ 的最大值.

显然，$P\leqslant(b-2)^2(c-b-1)^2$，其中等式在 $a=1$ 时成立. 于是，只须对所有满足 $3\leqslant b\leqslant c-2$，$b^2+c^2\leqslant 1987$ 的正整数 b、c，求 $Q=(b-2)(c-b-1)$ 的最大值.

容易想到

$$Q\leqslant\frac{[(b-2)+(c-b-1)]^2}{4}=\frac{(c-3)^2}{4}. \qquad (*)$$

至此，只须求 c 的取值范围就能得出 $\frac{(c-3)^2}{4}$ 的最大值. 由条件，有 $c^2\leqslant 1987-b^2\leqslant 1987$，$c\leqslant 44$，所以 $Q\leqslant\frac{(44-3)^2}{4}<421$，$Q\leqslant 420$.

遗憾的是，等号不能成立，只能改求累次极值.

固定 c，则

$$Q=-b^2+(1+c)b+2-2c$$
$$=-\left(b-\frac{1+c}{2}\right)^2+\frac{(1+c)^2}{4}+2-2c, \qquad (**)$$

由二次函数图象可知，$Q\leqslant\frac{(1+c)^2}{4}+2-2c=A(c)$（当 c 为奇数时，$b=\frac{1+c}{2}$）；或 $Q\leqslant\frac{(1+c)^2}{4}-\frac{1}{4}+2-2c=B(c)$ $\left(\text{当 } c \text{ 为偶数时}, b=\frac{c}{2}\right)$.

现在，再求 $A(c)$、$B(c)$ 的最大值.

由 $b^2+c^2\leqslant 1987$，有 $c\leqslant 44$，于是，当 c 为奇数时，

$$Q\leqslant A(c)\leqslant A(43)=\frac{(1+43)^2}{4}+2-86=400. \qquad ①$$

当 c 为偶数时，

$$Q\leqslant B(c)\leqslant B(44)=\frac{(1+44)^2}{4}-\frac{1}{4}+2-88=420. \qquad ②$$

虽然恒有 $Q\leqslant 420$，但等号不成立. 实际上，要使式②式取等号，则有 $c=44$，且 $b=\frac{c}{2}=22$. 而 $(44,\ 22)$ 不满足 $b^2+c^2\leqslant 1987$. 由此可知，不能统一固定 c 求 $Q=(b-2)(c-b-1)$ 的最大值，应对 c 的取值分类讨论，得到不同形式的极值函数.

当 $c=44$ 时，$Q=-b^2+45b-86$. 因为 $b^2\leqslant 1987-c^2=51$，$3\leqslant b\leqslant 7$，所以，当 $b=7$ 时，Q 取最大值 180；

当 $c=43$ 时，$3\leqslant b\leqslant 11$，此时，$Q\leqslant 279$，等式在 $b=11$ 时成立；

当 $c=42$ 时，$3\leqslant b\leqslant 14$，此时，$Q\leqslant 324$，等式在 $b=14$ 时成立；

当 $c=41$ 时，$3\leqslant b\leqslant 17$，此时，$Q\leqslant 345$，等式在 $b=17$ 时成立；

当 $c=40$ 时，$3\leqslant b\leqslant 19$，此时，$Q\leqslant 340$，等式在 $b=19$ 时成立；

当 $c\leqslant 39$ 时，$Q\leqslant\frac{[(b-2)+(c-b-1)]^2}{4}=\frac{(c-3)^2}{4}\leqslant 18^2=324$.

由上可知，恒有 $Q\leqslant 345$ 成立. 又当 $(a,\ b,\ c)=(1,\ 17,\ 41)$ 时成立等式. 故当 $(a,\ b,\ c)=(1,\ 17,\ 41)$ 时 P 取最大值 345^2.

例 3　给定正整数 k 及正数 a，又 $k_1+k_2+\cdots+k_r=k$（k_i 为正整数，$1\leqslant r\leqslant k$），求 $F=a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值.（第 8 届中国数学奥林匹克试题）

分析与解　本题的实质是将 k 分解为若干个正整数 k_i，使 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的值最大. 但其分解出的正整数的个数不确定，因而应分两步走（求累次最

值). 先固定 r,假定 k 分解为 r 个正整数 $k_i (i=1, 2, \cdots, r)$,求 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值 $f(r)$. 然后再解冻变量 r,求 $f(r)$ 的最大值.

先走第一步. 取 $k=6$, $r=3$,则 $k_1+k_2+k_3=6$, $F=a^{k_1}+a^{k_2}+a^{k_3}$.

(1) 若$(k_1, k_2, k_3)=(2, 2, 2)$,则 $F_1=a^2+a^2+a^2=3a^2$;

(2) 若$(k_1, k_2, k_3)=(1, 2, 3)$,则 $F_2=a+a^2+a^3$;

(3) 若$(k_1, k_2, k_3)=(1, 1, 4)$,则 $F_3=a+a+a^4=2a+a^4$.

$F_2-F_1=a-2a^2+a^3=a(1-2a+a^2)=a(1-a)^2\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}F_3-F_2&=a+a^4-a^2-a^3=a(1+a^3-a^2-a)\\&=a(1-a^2)(1-a)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 F_3 最大.

一般地,不难想到,当指数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 尽量集中到某一个指数时,F 的值最大. 即 F 的极值点为$(1, 1, \cdots, k-r+1)$. 我们先证明下面的

引理: 设 $a>0$, $x, y\in\mathbf{N}^*$,则 $a^x+a^y\leqslant a^{x+y-1}+a$.

实际上,$a^{x+y-1}+a-a^x-a^y=a[a^{x-1}-1][a^{y-1}-1]\geqslant 0$.

反复利用引理,得

$$\begin{aligned}F&=a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant a+a^{k_1+k_2-1}+a^{k_3}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant a+a+a^{k_1+k_2+k_3-2}+a^{k_4}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant\cdots\leqslant a+a+\cdots+a+a^{k_1+k_2+\cdots+k_r-(r-1)}\\&=(r-1)a+a^{k-r+1}.\end{aligned}$$

下面再对 $1\leqslant r\leqslant k$,求 $f(r)=(r-1)a+a^{k-r+1}$ 的最大值.

令 $f(x)=a(x-1)+a^{k-x+1}$,则因 $a(x-1)$、a^{k-x+1} 都是凸函数,所以 $f(x)$ 是凸函数. 于是 $f(r)\leqslant\max\{f(1), f(k)\}=\max\{a^k, ka\}$.

综上所述,F 的最大值为 $\max\{a^k, ka\}$.

例 4 圆内接四边形 $ABCD$ 的四条边长 AB, BC, CD, DA 的长均为正整数,$DA=2005$, $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$,且 $\max\{AB, BC, CD\}<2005$,求四边形 $ABCD$ 的周长的最大值和最小值. (2005 年中国国家集训队测试题)

解 设 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$,则 $a^2+b^2=AC^2=c^2+2005^2$,所以 $2005^2-a^2=b^2-c^2=(b+c)(b-c)$,其中 $a, b, c\in\{1, 2, \cdots, 2004\}$.

不妨设 $a\geqslant b$,先固定 a,令 $a_1=2005-a$,则

$$(b+c)(b-c)=2005^2-a^2=a_1(4010-a_1) \quad ①$$

由 $a^2+b^2>2005^2$,得 $a>\dfrac{2005}{\sqrt{2}}>1411$,所以 $1\leqslant a_1<2005-1411=$

594.

所以，由 ① 有 $b+c>\sqrt{(b+c)(b-c)}=\sqrt{a_1(4010-a_1)}$.

当 $a_1=1$ 时，$a=2004$，$(b+c)(b-c)=4009=19\times 211$，所以，$b+c\geqslant 211$，$a+b+c\geqslant 2004+211=2215>2155$；

当 $a_1=2$ 时，$a=2003$，$(b+c)(b-c)=2^4\times 3\times 167$，又 $b+c$ 与 $b-c$ 同奇偶，所以，$b+c\geqslant 2\times 167$，$a+b+c\geqslant 2003+2\times 167>2155$；

当 $a_1=3$ 时，$a=2002$，$(b+c)(b-c)=3\times 4007$，所以，$b+c\geqslant 4007$，$a+b+c\geqslant 2002+4007>2155$；

当 $a_1=4$ 时，$a=2003$，$(b+c)(b-c)=2^3\times 2003$，所以，$b+c\geqslant 2\times 2003$，$a+b+c\geqslant 2001+2\times 2003>2155$；

当 $a_1=5$ 时，$a=2000$，$(b+c)(b-c)=3^2\times 5^2\times 89$，所以，$b+c\geqslant 225$，$a+b+c\geqslant 2000+225>2155$；

当 $a_1=6$ 时，$a=1999$，$(b+c)(b-c)=6\times 4004=156\times 154$，所以，$b+c\geqslant 156$，$a+b+c\geqslant 1999+156=2155$；

当 $a_1\geqslant 7$ 时，因为 $b+c>\sqrt{a_1(4010-a_1)}$，所以 $a+b+c>\sqrt{a_1(4010-a_1)}+2005-a_1$，但 $7\leqslant a_1<594$，我们可证明 $\sqrt{a_1(4010-a_1)}+2005-a_1>2155$.

实际上，$\sqrt{a_1(4010-a_1)}+2005-a_1>2155\Leftrightarrow\sqrt{a_1(4010-a_1)}>150+a_1\Leftrightarrow -a_1^2+4010a_1>a_1^2+300a_1+150^2\Leftrightarrow a_1^2-1855a_1+11\,250<0$，由二次函数性质可知，此不等式在 $7\leqslant a_1<594$ 时成立.

综上所述，恒有 $a+b+c\geqslant 2155$，于是 $AB+BC+CD+DA\geqslant 2155+2005=4160$.

当 $AB=1999$，$BC=155$，$CD=1$ 时等号成立，所以四边形 $ABCD$ 的周长的最小值为 4160.

下面求四边形 $ABCD$ 的周长的最大值：

因为 $a\geqslant b$，$c<2005$，所以 $b+c<a+2005=4010-a_1$，所以由 ① 式知 $a_1<b-c<b+c<4010-a_1$.

由于 a_1 与 $b-c$ 同奇偶，所以 $b-c\geqslant a_1+2$，于是

$$b+c=\frac{a_1(4010-a_1)}{b-c}\leqslant\frac{a_1(4010-a_1)}{a_1+2}.$$

当 $b-c=a_1+2$ 时，

$$a+b+c=2005-a_1+\frac{a_1(4010-a_1)}{a_1+2}=6021-2\left(a_1+2+\frac{4012}{a_1+2}\right),$$

而 $4012=2^2\times17\times59=68\times59$，所以 $a+b+c\leqslant6021-2\cdot(68+59)=5767$.

当 $b-c\neq a_1+2$ 时，$b-c\geqslant a_1+4$，从而

$$a+b+c\leqslant2005-a_1+\frac{a_1(4010-a_1)}{a_1+4},$$

而 $2005-a_1+\dfrac{a_1(4010-a_1)}{a_1+4}\leqslant5767\Leftrightarrow a_1^2-122a_1+7524\geqslant0$.

注意到 $\Delta=122^2-4\times7524<0$，故上式恒成立.

所以，$AB+BC+CD+DA\leqslant5767+2005=7772$，当 $a=1948$，$b=1939$，$c=1880$ 时等号成立，故四边形 $ABCD$ 的周长的最大值为 7772.

习 题 2

1 设 x、y、z 为非负实数，$x+y+z=a$ $(a\geqslant1)$，求 $F=2x^2+y+3z^2$ 的最大值.

2 求一个十进制 3 位数，使它与其各位数字之和的比最小.

3 设 x_1，x_2，…，x_n 是非负实数，记 $H=\dfrac{x_1}{(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}+\dfrac{x_2}{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2}+\cdots+\dfrac{x_n}{(1+x_n)^2}$ 的最大值为 a_{n+1}. 问：当 x_1，x_2，…，x_n 为何值时，H 的值达到最大？并求出 a_n 与 a_{n-1} 之间的关系及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

4 设 n 是给定的整数 $(n>1)$，正整数 a、b、c、d 满足 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}<1$，$b+d\leqslant n$，求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$ 的最大值.

3 局部调整

这种方法，是先证明所求的极值存在，然后由问题的直观性，猜想出极值点. 最后从反面证明函数在其他点不能达到极值：假设函数在另外的点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$处达到极值，经过适当调整(常常是将小的分量变大，大的分量变小)，发现函数在$(x_1', x_2', \cdots, x_n')$处的值更大或更小，从而断定它不是极值点. 它的基本步骤是：

证明极值存在——猜出极值点——证明其他点非极值点——得出结论.

例 1 若干个正整数之和为1976，求其积的最大值.(第 18 届 IMO 试题)

分析 先看若干个数的和为 4、5、6、7、8 的简单情形. 使积最大的分拆分别为：

$$4=2+2,\ 5=2+3,\ 6=3+3,\ 7=2+2+3,\ 8=2+3+3.$$

由此猜想：要使积最大，其分拆的和中只含有 2 和 3，且最多有两个 2.

解 首先，“和”为 1976 的正整数组只有有限个，于是，其中必有一个正整数组使各数的积达到最大.

不妨设使积达到最大的正整数组为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中$x_1+x_2+\cdots+x_n=1976$. 此时，数组的各数的积为$P=x_1x_2\cdots x_n$. 我们证明，当P最大时，可使所有x_i具有如下性质：

(1) $x_i \leqslant 3$.

若有某个$x_i \geqslant 4$，则将x_i换作两个数：2 和x_i-2，得到一个新的数组：$(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i-2, 2, x_{i+1}, \cdots, x_n)$. 注意到$2(x_i-2)=2x_i-4 \geqslant x_i$，所以，调整后$P$值不减.

(2) $x_i \neq 1$.

若有某个$x_i=1$，则在数组中任取一个x_j，将 1 和x_j换作一个数：$(1+x_j)$，得到一个新的数组：$(x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n, x_j+1)$. 注意到$1 \cdot x_j<1+x_j$，所以，调整后$P$值增加.

(3) 其中等于 2 的x_i的个数不多于 2.

若有$x_i=x_j=x_k=2$，则将x_i、x_j、x_k换成两个数：3 和 3，得到一个新

的数组. 注意到 $2\times2\times2<3\times3$，所以，调整后 P 值增加.

由此可知，x_i 为 2 或 3，且 2 的个数不多于 2. 注意到 $1976=658\times3+2$，所以，P 的最大值为 $3^{658}\times2$.

注　若将 1976 换作 1975，则由 $1975=658\times3+1=657\times3+2+2$，知 P 的最大值为 $3^{657}\times2^2$.

例 2　空间有 1989 个点，无 3 点共线，将其分成点数互异的 30 组. 在任何 3 个不同的组中各取一点，以这 3 个点为顶点作三角形. 问：要使这种三角形的总数最大，各组的点数应为多少？（第 4 届中国数学奥林匹克试题）

分析　直觉告诉我们，各组点数相等时，三角形总数最大. 但仔细阅读题目又发现，分组要求各组点数互异，于是想到各组点数应当充分接近. 为了强化这一感觉，可用特例加以印证.

先看 10 点分为 3 组的情形. 当各组点数分别为 1、2、7 时，三角形总数 $S=14$，简记为 $S(1,2,7)=14$. 类似地，$S(1,3,6)=18$，$S(1,4,5)=20$，$S(2,3,5)=30$. 其中以 $S(2,3,5)=30$ 最大. 对一般情形，由上述特例可大胆猜想：各组点数 n_i 彼此接近时 S 最大. 所谓各 n_i 彼此接近，是指任意相邻两个 n_t、n_{t+1} 相差尽可能小. 显然，n_t、n_{t+1} 至少相差 1，但能否对所有 n_t、n_{t+1}，都有 $n_{t+1}-n_t=1$？对此进行研究，即可找到解题的途径.

解　设各组的点数分别为：$n_1<n_2<\cdots<n_{30}$，则三角形的总数为：

$$S=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant30}n_in_jn_k\text{，其中 }n_1+n_2+\cdots+n_{30}=1989.$$

由于分组的方法是有限的，从而 S 存在最大值. 若 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 使 S 达到最大值，不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_{30}$，则 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 具有以下一些性质：

(1) 对任何 $t=1,2,\cdots,29$，都有 $n_{t+1}-n_t\leqslant2$.

实际上，假定存在 $1\leqslant t\leqslant29$，使 $n_{t+1}-n_t\geqslant3$（也可以不妨设 $n_2-n_1\geqslant3$）. 令 $n_t'=n_t+1$，$n_{t+1}'=n_{t+1}-1$，则各组点数仍互异. 考察：

$$\begin{aligned}S&=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant30}n_in_jn_k\\&=n_tn_{t+1}\cdot\sum_{\substack{k\neq t,\,t+1\\1\leqslant k\leqslant30}}n_k+(n_t+n_{t+1})\cdot\sum_{\substack{j,\,k\neq t,\,t+1\\1\leqslant j<k\leqslant30}}n_jn_k+\sum_{\substack{i,\,j,\,k\neq t,\,t+1\\1\leqslant i<j<k\leqslant30}}n_in_jn_k,\end{aligned}$$

$$S'=n_t'n_{t+1}'\cdot\sum_{\substack{k\neq t,\,t+1\\1\leqslant k\leqslant30}}n_k+(n_t'+n_{t+1}')\cdot\sum_{\substack{j,\,k\neq t,\,t+1\\1\leqslant j<k\leqslant30}}n_jn_k+\sum_{\substack{i,\,j,\,k\neq t,\,t+1\\1\leqslant i<j<k\leqslant30}}n_in_jn_k,$$

因为 $n_t'+n_{t+1}'=n_t+n_{t+1}$，而 $n_t'n_{t+1}'=n_tn_{t+1}-n_t+n_{t+1}-1>n_tn_{t+1}$，所以

$S' > S$，矛盾．所以 $n_{t+1}-n_t=1$ 或 2.

(2) 至少有一个 $t(1\leqslant t\leqslant 29)$，使 $n_{t+1}-n_t=2$.

实际上，若对所有 t，都有 $n_{t+1}-n_t\neq 2$，而由(1)，有 $n_{t+1}-n_t\leqslant 2$，所以 $n_{t+1}-n_t=1$，即 n_1, n_2, …, n_{30} 是 30 个连续正整数，它们的和为 15 的倍数．但 $\sum\limits_{t=1}^{30} n_t=1989$ 不是 15 的倍数，矛盾．

(3) 最多有一个 $t(1\leqslant t\leqslant 29)$，使 $n_{t+1}-n_t=2$.

实际上，若有 s、$t(1\leqslant s<t\leqslant 29)$，使 $n_{t+1}-n_t=n_{s+1}-n_s=2$，则令 $n_s'=n_s+1$，$n_{t+1}'=n_{t+1}-1$.（最大的减小，最小的增大），代换后各组的点数仍互异．考察：

$$S=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30} n_i n_j n_k$$

$$=n_s n_{t+1}\cdot \sum_{\substack{k\neq s,\ t+1\\ 1\leqslant k\leqslant 30}} n_k+(n_s+n_{t+1})\cdot \sum_{\substack{j,\ k\neq s,\ t+1\\ 1\leqslant j<k\leqslant 30}} n_j n_k+\sum_{\substack{i,\ j,\ k\neq t,\ t+1\\ 1\leqslant i<j<k\leqslant 30}} n_i n_j n_k,$$

$$S'=n_s' n_{t+1}'\cdot \sum_{\substack{k\neq t,\ t+1\\ 1\leqslant k\leqslant 30}} n_k+(n_s'+n_{t+1}')\cdot \sum_{\substack{j,\ k\neq t,\ t+1\\ 1\leqslant j<k\leqslant 30}} n_j n_k+\sum_{\substack{i,\ j,\ k\neq t,\ t+1\\ 1\leqslant i<j<k\leqslant 30}} n_i n_j n_k,$$

因为 $n_s'+n_{t+1}'=n_s+n_{t+1}$，而 $n_s' n_{t+1}'=n_s n_{t+1}-n_s+n_{t+1}-1>n_s n_{t+1}$，所以 $S'>S$，矛盾．

由(2)和(3)可知，恰有一个 $t(1\leqslant t\leqslant 29)$，使 $n_{t+1}-n_t=2$.

最后证明，同时满足(1)(2) 和(3) 的数组：n_1, …, n_{30} 是唯一的．

实际上，不妨设 30 个数为：n_1, n_1+1, n_1+2, …, n_1+t-1, n_1+t+1, n_1+t+2, …, n_1+30，那么 $n_1+(n_1+1)+(n_1+2)+\cdots+(n_1+t-1)+(n_1+t+1)+(n_1+t+2)+\cdots+(n_1+30)=1989$.

所以 $(n_1+t)+(n_1+1)+(n_1+2)+\cdots+(n_1+t-1)+(n_1+t+1)+(n_1+t+2)+\cdots+(n_1+30)=1989+t$，即 $1989+t=30n_1+(1+2+\cdots+30)=30n_1+15\times 31$.

所以 $1974+t=30n_1+15\times 30$，$30\mid 1974+t$，$30\mid 24+t$，但 $1\leqslant t\leqslant 29$，所以 $t=6$.

综上所述，所求的各组的点数为 51, 52, …, 56, 58, 59, …, 81.

例 3 设点 P 从格点 $A(1, 1)$ 出发，沿格径以最短的路线运动到点 $B(m, n)(m$、$n\in\mathbf{N}^*)$，即每次运动到另一格点时，横坐标或纵坐标增加 1．求点 P 经过的所有格点中两坐标乘积之和 S 的最大值．

分析与解 设 P 经过的点依次为 $P_1=A(1, 1)$, P_2, …, $P_{m+n-1}=$

$B(m, n)$，P_i 的坐标为 (x_i, y_i)，则 $S=\sum_{i=1}^{m+n-1} x_i y_i$. 要使 S 最大，由直观，应使 x_i、y_i 尽可能接近. 但不能对任何 i，要求 $x_i=y_i$（否则沿对角线运动）. 我们猜想，如果 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_{m+n-1}, y_{m+n-1}) 使 S 最大，则对任何 $x_i<m$，$y_i<n$，有 $|x_i-y_i|\leqslant 1$.

假设存在 i，使 $|x_i-y_i|>1$ $(x_i<m, y_i<n)$，不妨设 $x_i-y_i>1$. 此时，自然的想法是：将 x_i 减小 1，将 y_i 增大 1. 也就是将点 $P_i(x_i, y_i)$ 调整为 $P_i'(x_i-1, y_i+1)$，其余点不变. 但调整后的路线是否仍合乎条件？显然，要使调整后的路线仍合乎条件，则 P_i 应该满足：$P_{i-1}P_i$ 是横向边且 P_iP_{i+1} 是纵向边. 但 P_i 未必满足这样的条件. 此时，观察路径，发现一定有一个点 $P_t(x_t, y_t)$ 满足这样的条件，即路径中存在这样连续三点 $P_{t-1}(x_{t-1}, y_{t-1})$、$P_t(x_t, y_t)$、$P_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})$，使得 $P_{t-1}P_t$ 是横向边且 P_tP_{t+1} 是纵向边，且 $x_t-y_t>1$.

实际上，若 $P_{i-1}P_i$ 是纵向边，则考察横坐标为 x_i 且纵坐标最小的点. 设其为 $P_t(x_t, y_t)$，其中 $x_t=x_i$，$y_t<y_i$，此时 $x_t-y_t=x_i-y_t>x_i-y_i>1$. 又因为 $x_t>1+y_t>1$，所以到达 $P_t(x_t, y_t)$ 之前一定有横向边. 于是由 y_t 的最小性可知，$P_{t-1}P_t$ 是横向边，P_tP_{t+1} 是纵向边. 若 $P_{i-1}P_i$ 是横向边，则考察纵坐标为 y_i 且横坐标最大的点，设为 $P_t(x_t, y_t)$，其中 $x_t>x_i$，$y_t=y_i$. 此时 $x_t-y_t=x_t-y_i>x_i-y_i>1$. 又因为 $y_i<n$，所以到达 $P_t(x_t, y_t)$ 之后一定还有纵向边. 于是由 x_t 的最大性可知，P_tP_{t+1} 是纵向边，且 $P_{t-1}P_t$ 是横向边.

综上所述，当路径中存在点 $P_i(x_i, y_i)$，其中 $x_i<m$，$y_i<n$，使 $x_i-y_i>1$ 时，则一定存在这样的连续三点 $P_{t-1}(x_{t-1}, y_{t-1})$、$P_t(x_t, y_t)$、$P_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})$，使得 $P_{t-1}P_t$ 是横向边且 P_tP_{t+1} 是纵向边，且 $x_t-y_t>1$. 于是，用 $P_t'(x_t-1, y_t+1)$ 代替 $P_t(x_t, y_t)$，得到的路径仍合乎要求. 但 $(x_t-1)(y_t+1)=x_ty_t+x_t-y_t-1>x_ty_t$. 所以调整后 S 的值增加，矛盾.

由上可知，对路径中的任何一个点 $P_i(x_i, y_i)$，若 $x_i\neq y_i$，则从 $P_i(x_i, y_i)$ 出发的边是唯一的，下一个点是将 $P_i(x_i, y_i)$ 的坐标中较小的一个增加 1. 而 $x_i=y_i$ 时，则从 $P_i(x_i, y_i)$ 出发的边有两种选择，下一个点是将 $P_i(x_i, y_i)$ 的横坐标或纵坐标增加 1. 于是，当 $m\geqslant n$ 时，其路径为：

$A(1, 1)\to P_2(2, 1)$ 或 $P_2(1, 2)\to P_3(2, 2)\to P_4(2, 3)$ 或 $P_4(3, 2)\to P_5(3, 3)\to\cdots\to P_{2n-1}(n, n)\to P_{2n}(n+1, n)\to P_{2n+1}(n+2, n)\to\cdots\to P_{m+n-1}(m, n)$.

此时，
$$S_{\max}=\sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)+n\sum_{i=1}^{m-n}(n+i)$$
$$=\frac{1}{6}n(3m^2+n^2+3m-1).$$

当 $m<n$ 时，同样可得 $S_{\max}=\frac{1}{6}m(3n^2+m^2+3n-1)$.

例 4 IMO 太空站由 99 个空间站组成，任两个空间站之间有管形通道相连. 规定其中 99 条通道为双向通行的主干道，其余通道严格单向通行. 如果某 4 个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站，就称这些站组成的集合为一个互通四站组.

试求互通四站组个数的最大值，并证明你的结论.（1999 年 CMO 试题）

分析与解 由正面求“四通组”的个数是比较困难的，因为其条件较为苛刻. 而满足非互通的四站组的条件相对较易. 比如，想象一个空间站“无回路”即可. 由此想到考察从一点引出的所有单向通道，每 3 条这样的通道对应一个非互通的四站组. 当然，还可能有其他的非互通的四站组，但那些非互通的四站组并非必定存在，也就是说，也许可以选择一个方案，使那些非互通的四站组的个数为零，从而可以略去这些非互通的四站组的个数估计.

假设 99 个空间站为 $A_1, A_2, \cdots, A_{99}$，由 A_i 出发的单向通道条数、指向 A_i 的单向通道条数、通过 A_i 的主干道条数分别为 w_i、l_i、k_i. 由条件，有 $w_i+l_i+k_i=98$，且 $k_1+\cdots+k_{99}=198$，$w_1+\cdots+w_{99}=l_1+\cdots+l_{99}$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{99}w_i&=\sum_{i=1}^{99}l_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}(w_i+l_i)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}(w_i+l_i+k_i)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}k_i=4752.\end{aligned}$$

因为 A_i 引出 w_i 条单向通道，其中任何 3 条组成一个输出型三面角，这个三面角的四个顶点是一个不互通四站组，而且同一个不互通的四站组不可能包含两个输出三面角，所以非互通四站组的数目 $S\geqslant\sum\limits_{i=1}^{99}C_{w_i}^3$.

下面求 $\sum\limits_{i=1}^{99}C_{w_i}^3$ 的最小值.

方法 1：首先，由于满足 $w_1+\cdots+w_{99}=4752$ 的数组 $(w_1, \cdots, w_{99})$ 只有有限个，从而最小值一定存在. 其次，从直观猜测，当 $w_1=\cdots=w_{99}=48$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{99}C_{w_i}^3$ 最小. 反设结论不然，则必有一个 i，使 $w_i<48$，也必有一个 j，使 $w_j>48$. 将 w_i 改为 w_i+1，w_j 改为 w_j-1，得到一个新的数组，由于

$$\begin{aligned}C_{w_i}^3+C_{w_j}^3-C_{w_i+1}^3-C_{w_j-1}^3&=\frac{1}{2}(w_j-1)(w_j-2)-\frac{1}{2}w_i(w_i-1)\\&>0(\text{因为 } w_j-1>w_i),\end{aligned}$$

所以新数组对应的和式比原数组小，矛盾. 于是 $\sum\limits_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3$ 的最小值为 $99\mathrm{C}_{48}^3$，从而互通的四站组不多于 $\mathrm{C}_{99}^4-99\mathrm{C}_{48}^3=2\,052\,072$.

方法 2：由幂平均不等式，有

$$\sum_{i=1}^{99}w_i^3\geqslant\frac{1}{\sqrt{99}}\Big(\sum_{i=1}^{99}w_i^2\Big)^{\frac{3}{2}},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3&=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{99}w_i^3-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}w_i^2+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{99}w_i\\&\geqslant\frac{1}{6\sqrt{99}}\Big(\sum_{i=1}^{99}w_i^2\Big)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}w_i^2+\frac{1}{3}\times4752.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{6\sqrt{99}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}x\Big(\sqrt{\frac{x}{99}}-3\Big)$$

严格递增，且

$$\sum_{i=1}^{99}w_i^2\geqslant\frac{1}{99}\Big(\sum_{i=1}^{99}w_i\Big)^2=228\,096,$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3&\geqslant\frac{1}{6\sqrt{99}}\times228\,096^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\times228\,096+\frac{1}{3}\times4752\\&=1\,712\,304,\end{aligned}$$

从而互通四站组的数目不多于 $\mathrm{C}_{99}^4-1\,712\,304=2\,052\,072$.

下面证明等号可以成立. 先将所有通道设成单向，方向如下规定：对 $i<j$，若 i、j 同奇偶，则由 A_i 指向 A_j，否则 A_j 指向 A_i. 此时每个点恰发出 49 条单向通道. 现将 99 条通道 $A_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots,99,A_{100}=A_1)$ 改为双向通道，则每个点发出和进入的单向通道恰有一条被改为双向通道，故 $w_i=l_i=48(i=1,2,\cdots,99)$. 故有中心的四站组个数为 $99\mathrm{C}_{48}^3=1\,712\,304$.

下面证明每一非互通四站组都有一个中心（向其他三点引出单向通道的点）. 事实上，设 (A_i,A_j,A_k,A_t) 是任意一个无中心的非互通四站组（以下仅用 i 代表 A_i），若其中有一条双向通道 ij，则 ik 和 jk 不可能都由 k 发出，或都指向 k（若 $j=i+1$ 或 $j=i-1$，则 k 要么比 i、j 都大，要么都小，而 i、j 不同奇偶；若 $\{i,j\}=\{1,99\}$，则 i，j 同奇偶，但 k 比一个大，比另一个小），对 t

也一样，故 $ijkt$ 是互通的，矛盾. 故其中无双向通道. 由于 $ijkt$ 不互通，故其中有一个站（设为 i），它和其余三个站之间的通道都是单向的，而且都指向 i. 故 j、k、t 只有两种情况：要么比 i 小且与 i 同奇偶（称为 Ⅰ 型），要么比 i 大且奇偶性不同（称为 Ⅱ 型）. 如果 j、k、t 都为 Ⅰ 型，则 j、k、t 同奇偶，故其中最小的是 $(ijkt)$ 的一个中心，矛盾. 如果 j、k、t 都为 Ⅱ 型，则 j、k、t 中最小的是 $(ijkt)$ 的一个中心，矛盾. 如果 j、k、t 中有两个，比如 j、k，为 Ⅰ 型，则 t 比 j、k 都大且不同奇偶，故 t 是 $(ijkt)$ 的中心，矛盾. 如果 j、k、t 中有一个，比如 j，为 Ⅰ 型，则 k、t 比 i、j 大且不同奇偶，故 k、t 中必有一个为中心，矛盾. 这就证明了每个非互通四站组必有中心. 于是，非互通四站组共有 1 712 304 个，从而互通四站组有 2 052 072 个.

综上所述，所求最大值为 2 052 072.

例 5 将 2006 表示成 5 个正整数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 之和，记 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_i x_j$. 问：

(1) 当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，取何值时，S 取到最大值；

(2) 进一步地，若对任意 $1\leqslant i, j\leqslant 5$，有 $|x_i-x_j|\leqslant 2$，则当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 取何值时，S 取到最小值，说明理由.（2006 年全国高中数学联合竞赛试题）

解 (1) 首先这样的 S 的值是有界集，故必存在最大值与最小值.

若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$，且使 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_i x_j$ 取到最大值，则必有

$$|x_i-x_j|\leqslant 1(1\leqslant i, j\leqslant 5) \quad ①$$

事实上，假设①不成立，不妨假设 $x_1-x_2\geqslant 2$.

则令 $x_1'=x_1-1$, $x_2'=x_2+1$, $x_i'=x_i(i=2, 3, 4)$，有 $x_1'+x_2'=x_1+x_2$, $x_1'\cdot x_2'=(x_1-1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1-x_2-1>x_1x_2$.

将 S 改写成

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_i x_j=x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5,$$

同时有 $S'=x_1'x_2'+(x_1'+x_2')(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$.

于是有 $S'-S=x_1'x_2'-x_1x_2>0$，这与 S 在 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 时取到最大值矛盾，所以必有 $|x_i-x_j|\leqslant 1(1\leqslant i, j\leqslant 5)$. 因此当 $x_1=402$, $x_2=x_3=x_4=x_5=401$ 时 S 取 到最大值.

(2) 当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$ 且 $|x_i-x_j|\leqslant 2(1\leqslant i, j\leqslant 5)$ 时，只有如下这三种情形满足要求：

（Ⅰ）402，402，402，400，400；

（Ⅱ）402，402，401，401，400；

（Ⅲ）402，401，401，401，401.

而后两种情形是在第一种组情形下作调整：$x_i' = x_i - 1$，$x_j' = x_j + 1$ 而得到的，根据(1) 的证明可知，每调整一次，和式 $S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} x_i x_j$ 变大，所以 S 在 $x_1 = x_2 = x_3 = 402$，$x_4 = x_5 = 400$ 时取到最小值.

习 题 3

1 将 1989 分成 10 个正整数的和，使其积最大.

2 在不减正整数序列 a_1，a_2，…，a_m，…中，对任何正整数 m，定义 $b_m = \min\{n \mid a_n \geqslant m\}$. 已知，$a_{19} = 85$，求 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{85}$ 的最大值.（1985 年美国数学奥林匹克试题）

3 有 155 只鸟在一个圆 C 上，如果弧 $P_iP_j \leqslant 10°$，则称鸟是互相可见的. 如果允许同一位置同时有几只鸟，求可见的鸟对数的最小值.（第 30 届 IMO 备选题）

4 给定实数 $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3 \leqslant \cdots \leqslant P_n$，求出实数 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，使 $d = (P_1 - x_1)^2 + (P_2 - x_2)^2 + \cdots + (P_n - x_n)^2$ 最小.

5 给定平面上的点集 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_{1994}\}$，$P$ 中任何三个点不共线. 将 P 中的点分为 83 组，每组至少 3 个点. 将同一组中的点两两连线，不同的组中的点不连线，得到一个图 G，G 中的三角形的个数记为 $m(G)$.

(1) 求 $m(G)$ 的最小值.

(2) 设使 $m(G)$ 达到最小的图为 G'. 求证：可以将 G' 中的点 4-染色，使 G' 中不含同色三角形.（1994 年全国高中数学联赛试题）

6 有 14 人进行一种日本棋循环赛，每个人都与另外 13 个人比赛一局，在比赛中无“平局”. 如果三个人之间的比赛结果是每个人都胜一局负一局，则称这 3 人是一个“三联角”，求“三联角”个数的最大值.（2002 年日本数学奥林匹克试题）

4 对称处理

这种方法适应于求对称多项式型函数的极值. 它的基本思想是，先证明函数必定存在极大值或极小值. 然后固定若干变元，保留少数几个变元，讨论函数关于这少数几个变元的极值点所具有的性质. 再由对称性，得出函数关于其他变元的极值点具有同样的性质，进而确定极值点，求出极值.

基本步骤是：证明最值存在——尽可能多地固定变量，化为一元或二元函数求出最值点——利用对称性发现多元函数的最值点——求出最值.

例 1 设 $0<p\leqslant a,\ b,\ c,\ d,\ e\leqslant q$，求 $F=(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$的最大值.

解 由于 F 在闭域上连续，所以必存在最大值. 固定 a、b、c、d，令 $a+b+c+d=A$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=B$，则 A、B 为常数，且 $F=(A+e)\left(B+\frac{1}{e}\right)=1+AB+eB+\frac{A}{e}$.

考察 $f(e)=eB+\frac{A}{e}$，易知，当 $e\leqslant\sqrt{\frac{A}{B}}$ 时，$f(e)$ 单调递减，当 $e\geqslant\sqrt{\frac{A}{B}}$ 时，$f(e)$ 单调递增. 于是，$\sqrt{\frac{A}{B}}$ 是 $f(e)$ 的最小值点. 注意到 $p\leqslant e\leqslant q$，所以 $f(e)$ 只能在其端点：$e=p$ 或 $e=q$ 处取最大值. 由对称性，F 只能在 a、b、c、d、$e\in\{p,\ q\}$ 时取最大值. 于是，不妨设 F 取最大值时，$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 中有 k 个为 p，$5-k$ 个为 q，则 F 的最大值是具有如下形式的 $F(k)$ 的最大值：

$$\begin{aligned}F(k)&=[kp+(5-k)q]\left(\frac{k}{p}+\frac{5-k}{q}\right)\\&=k^2+(5-k)^2+(5k-k^2)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\\&=\left[2-\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\right]k^2+\left[5\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)-10\right]k+25.\end{aligned}$$

在上述二次函数 $F(k)$ 中，二次项系数 $2-\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)<0$，顶点横坐标为 $\frac{5}{2}$，但 $k\in\mathbf{N}$，于是，$F(k)<F(2)=F(3)=13+6\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)$. 又

$$a=b=c=p,\ c=d=q\text{ 时},F=13+6\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right),$$

所以
$$F_{\max}=13+6\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)=25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

例 2　设 $0\leqslant x_i\leqslant 1\ (1\leqslant i\leqslant n)$，求 $F=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|$ 的最大值.（第 6 届加拿大数学奥林匹克试题）

分析与解　本题的原解答很繁，但利用对称性，可得到非常简单的解法.

我们先证明下面的引理：

设 $0\leqslant x\leqslant 1$，则 $F(x)=|x-x_1|+|x-x_2|+\cdots+|x-x_n|$ 取最大值（其中 $0\leqslant x_i\leqslant 1$）时，必有 $x\in\{0,1\}$.

实际上，因为 $F(x)$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上连续，所以 $F(x)$ 一定存在最大值. 不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，并令 $x_0=0$，$x_{n+1}=1$.

(1) 若存在 $i\ (i=0,1,2,\cdots,n)$，使得 $x_i<x<x_{i+1}$，则令

$$x'=x_i\left(\text{当 } i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\text{时}\right),\text{及 } x'=x_{i+1}\left(\text{当 } i>\left[\frac{n}{2}\right]\text{时}\right).$$

我们证明 $F(x)<F(x')$.

若 $i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，记 $d=x-x_i$，则将 x 调整到 $x'=x_i$ 后，$|x-x_1|$，$|x-x_2|$，…，$|x-x_i|$ 都减少 d，一共减少 i 个 d. 但 $|x-x_{i+1}|$，$|x-x_{i+2}|$，…，$|x-x_n|$ 都增加 d，一共增加 $n-i$ 个 d. 于是调整后，F 增加了 $(n-2i)$ 个 d，即 $F'(x)-F(x)=(n-2i)d$. 因为 $i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant\frac{n}{2}$，所以 $F(x)\leqslant F(x')$，于是 x 不是最大值点，矛盾.

若 $i>\left[\frac{n}{2}\right]$，记 $d=x_{i+1}-x$，则将 x 调整到 $x'=x_{i+1}$ 后，$|x-x_1|$，$|x-x_2|$，…，$|x-x_i|$ 都增加 d，一共增加 i 个 d. 而 $|x-x_{i+1}|$，$|x-x_{i+2}|$，…，$|x-x_n|$ 都减少 d，一共减少 $n-i$ 个 d. 于是调整后，F 增加了 $(2i-n)$ 个 d，即 $F'(x)-F(x)=(2i-n)d$. 因为 $i>\left[\frac{n}{2}\right]$，又 i、n 都是正整数，所以当 n 为偶数时，$i>\frac{n}{2}$，当 n 为奇数时，$i\geqslant\frac{n+1}{2}>\frac{n}{2}$. 所以恒有 $2i-n>0$，$F'(x)>$

$F(x)$，于是 x 不是最大值点，矛盾.

(2) 若存在 $i(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $x=x_i$，则令

$$x'=x_{i-1}\left(\text{当 } i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\text{时}\right),\text{及 } x'=x_{i+1}\left(\text{当 } i>\left[\frac{n}{2}\right]\text{时}\right).$$

我们证明 $F(x)<F(x')$.

若 $i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，记 $d=x-x_{i-1}$，则将 x 调整到 $x'=x_{i-1}$ 后，$|x-x_1|$，$|x-x_2|$，…，$|x-x_{i-1}|$ 都减少 d，一共减少 $i-1$ 个 d. 但 $|x-x_i|$，$|x-x_{i+1}|$，…，$|x-x_n|$ 都增加 d，一共增加 $n-i+1$ 个 d. 于是调整后，F 增加了 $(n-2i+2)$ 个 d，即 $F'(x)-F(x)=(n-2i+2)d$，因为 $i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant\frac{n}{2}$，所以 $F(x)<F(x')$，x 不是最大值点，矛盾.

若 $i>\left[\frac{n}{2}\right]$，记 $d=x_{i+1}-x$，则将 x 调整到 $x'=x_{i+1}$ 后，$|x-x_1|$，$|x-x_2|$，…，$|x-x_i|$ 都增加 d，一共增加 i 个 d. 而 $|x-x_{i+1}|$，$|x-x_{i+2}|$，…，$|x-x_n|$ 都减少 d，一共减少 $n-i$ 个 d. 于是调整后，F 增加了 $(2i-n)$ 个 d，即 $F'(x)-F(x)=(2i-n)d$. 因为 $i>\left[\frac{n}{2}\right]$，又 i、n 都是正整数，所以当 n 为偶数时，$i>\frac{n}{2}$，当 n 为奇数时，$i\geqslant\frac{n+1}{2}>\frac{n}{2}$. 所以恒有 $2i-n>0$，$F'(x)>F(x)$，于是 x 不是最大值点，矛盾.

综上所述，F 取最大值时，必有 $x\in\{0,1\}$.

下面解答原题.

由于 F 在闭域上连续，所以必定存在最大值. 固定 x_2，x_3，…，x_n，则 $F(x_1)$ 是关于 x_1 的函数：

$$F(x_1)=|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+\cdots+|x_1-x_n|+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|.$$

于是，$F(x_1)$ 取最大值，等价于 $|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+\cdots+|x_1-x_n|$ 取最大值. 又 $0\leqslant x_i\leqslant 1$，所以由上面的引理，当 $F(x_1)$ 取最大值时，必有 $x_1\in\{0,1\}$. 由对称性，当 F 取最大值时，必有 $x_i\in\{0,1\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

于是，可设 F 取最大值时，x_i 中有 k 个为 0，$n-k$ 个为 1，那么

$$\begin{aligned}F&\leqslant(0-0)\times C_k^2+(1-1)\times C_{n-k}^2+C_k^1C_{n-k}^1\\&=k(n-k)\leqslant\left[\frac{k+(n-k)}{2}\right]^2=\frac{n^2}{4}.\end{aligned}$$

又 F 为整数，所以 $F \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

其中等式在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{\left[\frac{n}{2}\right]} = 0$，$x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} = \cdots = x_n = 1$ 时成立. 所以 F 的最大值为 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

例 3 设实数 x_1，x_2，…，x_{1997} 满足如下两个条件：

(1) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x_i \leqslant \sqrt{3}$ $(i = 1, 2, \cdots, 1997)$；

(2) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$.

试求 $x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$ 的最大值，并说明理由.（1997 年中国数学奥林匹克试题）

解 因为 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{1997}$ 是闭域上的连续函数，所以 $x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$ 一定存在最大值. 固定 x_3，x_4，…，x_{1997}，则 $x_1 + x_2 = c$（常数），记 $x_1 = x$，则 $x_2 = c - x$，于是

$$x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12} = x^{12} + (x - c)^{12} + A = f(x).$$

因为 $f''(x) = 132x^{10} + 132(x - c)^{10} > 0$，所以 $f(x)$ 是凸函数，所以当 $f(x)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\right)$ 达到最大时，必有 $x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}$. 由对称性，对任何两个变量 x_i、x_j $(1 \leqslant i < j \leqslant 1997)$，当 $x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$ 达到最大值时，x_i、x_j 中必有一个属于 $\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}$. 因此，当 $x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$ 达到最大值时，x_1，x_2，…，x_{1997} 中至少有 1996 个属于 $\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}$. 不妨设 x_1，x_2，…，x_{1997} 中有 u 个为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$，v 个为 $\sqrt{3}$，w 个属于区间 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$，其中 $w = 0$ 或 1. 当 $w = 1$ 时，记那个属于区间 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ 的变量为 t，则

$$u + v + w = 1997,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}u + \sqrt{3}v + tw = -318\sqrt{3}.$$

消去 u，得 $4v + (\sqrt{3}t + 1)w = 1043$，所以 $(\sqrt{3}t + 1)w$ 为整数，且 $(\sqrt{3}t + 1)w \equiv 1043 \equiv 3 \pmod 4$. 又由 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \sqrt{3}$，得 $0 < \sqrt{3}t + 1 < 4$. 而 $w = 0$ 或 1，所以 $0 \leqslant (\sqrt{3}t + 1)w < 4$. 所以 $(\sqrt{3}t + 1)w = 3$，于是 $w \neq 0$，即 $w = 1$，所以 $t =$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$. 进而 $4v+3=1043$，解得 $v=260$，所以 $u=1997-v-w=1736$.

综上所述，$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$ 的最大值为

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12}u+(\sqrt{3})^{12}v+t^{12}&=\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\times 1736+3^{6}\times 260+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{12}\\&=189\,548.\end{aligned}$$

例 4 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取值于某个长度为 1 的区间，记 $x=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j$，$y=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2$，求 $f=y-x^2$ 的最大值.（高中数学联赛模拟）

解 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in[a, a+1]$（$a\in\mathbf{R}$），当 $n=1$ 时，$f=0$，此时 $f_{\max}=0$.

当 $n>1$ 时，若固定设 $x_2, x_3, \cdots, x_n$，则

$$\begin{aligned}f=y-x^2&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^2\\&=\frac{n-1}{n^2}x_1^2-\left(\frac{2}{n^2}\sum_{j=2}^{n}x_j\right)x_1+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}x_j^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}x_j\right)^2,\end{aligned}$$

由于 f 是 x_1 在区间 $[a, a+1]$ 上的二次函数，且二次项系数 $\frac{n-1}{n^2}>0$，所以

$$f\leqslant\max\{f(a, x_2, x_3, \cdots, x_n), f(a+1, x_2, x_3, \cdots, x_n)\}.$$

这表明，当 f 达到最大值时，必有 $x_1\in\{a, a+1\}$，由对称性，当 f 达到最大值时，必有 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in\{a, a+1\}$，即

$$f\leqslant\max_{x_i\in\{a, a+1\}, 1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)\}.$$

设 f 达到最大值时，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有 s 个为 a，另 $n-s$ 个为 $a+1$，则

$$\begin{aligned}&\max_{x_i\in\{a, a+1\}, 1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)\}\\&=\frac{1}{n}[sa^2+(n-s)(a+1)^2]-\frac{1}{n^2}[sa+(n-s)(a+1)]^2\\&=\frac{1}{n^2}s(n-s)\leqslant\begin{cases}\frac{n^2-1}{4n^2} & (n\text{ 为奇});\\[2mm] \frac{1}{4} & (n\text{ 为偶}).\end{cases}\end{aligned}$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个为 a，另 $n-\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个为 $a+1$ 时，上式等号成立，故

$$f_{\max}=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{4n^2} & (n\text{ 为奇})；\\[2ex] \dfrac{1}{4} & (n\text{ 为偶}).\end{cases}$$

习 题 4

1 设 $0<p\leqslant a_1, a_2, \cdots, a_n\leqslant q$，求 $F=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$ 的最大值.

2 设 $x_i\in\mathbf{R}$，$|x_i|\leqslant 1\ (1\leqslant i\leqslant n)$，求 $F=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ 的最小值.（前苏联数学奥林匹克试题）

3 给定自然数 $n>2$，λ 是一个给定的常数. 确定函数：$F=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\lambda x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值与最小值，这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是非负实数，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.（1994 年中国数学集训队测试试题）

5 磨光变换

有些函数的极值，虽然不能证明其必定存在极值，但由问题的直观，可以发现其极值点.此时，我们可以对其施行一种变换：先将变量组中的某个分量调整到极值点，而将此分量与极值点相应分量的差转移到另外的分量中去，进而验证这一变换保持函数值单调递增或递减.反复施行这一变换(必须论证变换有限次后终止)，直至变量组中的每一个分量都调整到了极值点，得到函数的极值.这种变换称为磨光变换.

磨光变换常采用如下一些变换方式：

(1) 对“搭配型”最值点，比如取值最小的变量与取值最大的变量搭配，可先将相搭配的一对变量调整到最值点，然后再调整其他变量.

(2) 对“均匀型”最值点，比如各个变量取值相同，可先将取值最小的变量调整到最值点，不足部分在取值较大的变量中补足.

(3) 对“聚积型”最值点，比如一个变量取值最大，其他变量取值都很小，可先将取值最小的变量调整到最小点，再调整其他变量到最值点.

从实质上看，磨光变换就是放缩法，只是放缩形式采用磨光手段.

例 1 给定 $2n$ 个实数：$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. 令

$$F = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$$

其中 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_n}$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的一个排列. 求 F 的最大值与最小值(排序不等式).

分析 由直观，想到 a_i 中最小的与 b_i 中最小的相乘、a_i 中最大的与 b_i 中最大的相乘时，其 F 的值最大. 由此想到通过磨光变换构造 a_1b_1，a_2b_2，$\cdots$，a_nb_n.

解 若 F 的表达式中无 a_1b_1 这一项，则考察分别含有 a_1、b_1 的两个项：$a_1b_{i_1}$ 和 a_jb_1，将它们分别调整为 a_1b_1、$a_jb_{i_1}$，那么，

$$a_1b_1 + a_jb_{i_1} - (a_1b_{i_1} + a_jb_1) = (a_1 - a_j)(b_1 - b_{i_1}) \geqslant 0 (\text{磨光工具}).$$

由此可见，调整出 a_1b_1 这个项后，F 的值不减.

固定这个积 a_1b_1 不动，再考察余下的 $n-1$ 个积，如此下去，最多调整 $n-1$ 次，即可出现 a_1b_1，a_2b_2，…，a_nb_n，F 的值恒保持不减，于是 $F_1=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 是 F 的最大值.

同样，当出现 a_1b_n，a_2b_{n-1}，…，a_nb_1，则 F 达到最小值.

例 2 设 A、B、C 是三角形的三内角，求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值.

分析与解 这是一个简单的问题，有多种解法，而使用磨光变换的解法较繁，但其探索磨光工具的过程是比较典型的.

首先，猜想极值点为 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

其次，很易想到磨光方式：$(A, B, C)\rightarrow\left(\frac{\pi}{3}, A+B-\frac{\pi}{3}, C\right)$，即令 $A'=\frac{\pi}{3}$，$B'=A+B-\frac{\pi}{3}$，$C'=C$，希望磨光一次以后，函数值增大. 即

$$
\begin{aligned}
&\sin A'+\sin B'+\sin C'\\
=&2\sin\frac{A'+B'}{2}\cos\frac{A'-B'}{2}+\sin C\\
=&2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A'-B'}{2}+\sin C\\
\geqslant&2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C\\
=&\sin A+\sin B+\sin C.
\end{aligned}\qquad ①
$$

要使不等式 ① 成立，必须 $\frac{|A'-B'|}{2}<\frac{|A-B|}{2}$，此式成立的一个充分条件是 A 为 A、B、C 中的最小者，B 为 A、B、C 中的最大者，即有下面的引理（磨光工具）：若 $0^\circ<A\leqslant 60^\circ\leqslant B<180^\circ$，则

$$\sin A+\sin B\leqslant\sin 60^\circ+\sin(A+B-60^\circ).$$

实际上，$A+B-120^\circ=A+B-2\times 60^\circ\geqslant A+B-2B=A-B$；

$$A+B-120^\circ=A+B-2\times 60^\circ\leqslant A+B-2A=B-A.$$

所以 $|A+B-120^\circ|\leqslant B-A$.

所以 $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A+B-120^\circ}{2}=\sin 60^\circ+\sin(A+B-60^\circ)$. 引理获证.

解答原题：不妨设 $A\leqslant B\leqslant C$，则 $A\leqslant 60^\circ\leqslant C$，所以由引理，有

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant \sin 60^\circ+\sin(A+C-60^\circ)+\sin B.$$

再不妨设 $A+C-60^\circ\leqslant B$，则因 $(A+C-60^\circ)+B=A+B+C-60^\circ=120^\circ$，所以 $0^\circ<A+C-60^\circ\leqslant 60^\circ\leqslant B<180^\circ$，再利用一次引理，得

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&\leqslant \sin 60^\circ+\sin(A+C-60^\circ)+\sin B\\&\leqslant \sin 60^\circ+\sin 60^\circ+\sin 60^\circ\\&=3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

故 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例 3　设 $x_i\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$，$n\geqslant 2$. 求 $F=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i+x_j)$ 的最大值.(第 32 届 IMO 备选题)

分析与解　由于 F 在闭区域上连续，F 的最大值一定存在，从而想到利用局部调整，不妨一试. 若固定 $x_2,x_3,\cdots,x_n$，则 x_1 亦被固定，从而只能固定 $n-2$ 个数. 不妨固定 $x_3,x_4,\cdots,x_n$，则

$$\begin{aligned}F=\;&x_1x_2(x_1+x_2)+\cdots+x_1x_n(x_1+x_n)+x_2x_3(x_2+x_3)+\cdots\\&+x_2x_n(x_2+x_n)+\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i+x_j),\end{aligned}$$

其中 $x_1+x_2=1-(x_2+x_3+\cdots+x_n)=p$(常数).

注意到 $x_2=p-x_1$，所以 F 是关于 x_1 的二次函数：$f(x_1)=Ax_1^2+Bx_1+C\ (0\leqslant x_1\leqslant p)$. 但此函数式的系数及自变量的变化范围都很复杂，其极值形式也就很复杂，因此须另辟蹊径求极值.

我们先来猜想极值点. 为此，采用特殊化的技巧.

当 $n=2$ 时，$F=x_1x_2(x_1+x_2)=x_1x_2\leqslant\frac{(x_1+x_2)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

但 $n=2$ 太特殊，不具一般性. 再试验一次.

当 $n=3$ 时，$F=x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3)+x_2x_3(x_2+x_3)$.

不妨固定 x_3，则

$$\begin{aligned}F&=x_1x_2(x_1+x_2)+(x_1^2+x_2^2)x_3+(x_1+x_2)x_3^2\\&=x_1x_2(1-x_3)+[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]x_3+(1-x_3)x_3^2\\&=x_1x_2(1-3x_3)+(1-x_3)^2x_3+(1-x_3)x_3^2,\end{aligned}$$

至此，为利用不等式 $x_1x_2 \leqslant \dfrac{(x_1+x_2)^2}{4}$ 将 $x_1x_2(1-3x_3)$ 放大，应保证 $1-3x_3 \geqslant 0$. 为此，可优化假设：$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$. 则

$$\begin{aligned}
F &= x_1x_2(1-3x_3)+(1-x_3)^2x_3+(1-x_3)x_3^2 \\
&\leqslant (1-3x_3)\frac{(x_1+x_2)^2}{4}+(1-x_3)^2x_3+(1-x_3)x_3^2 \\
&= (1-3x_3)\frac{(1-x_3)^2}{4}+(1-x_3)^2x_3+(1-x_3){x_3}^2 \\
&\leqslant \frac{1}{4}, \text{(利用求导可知)}
\end{aligned}$$

其中等号在 $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$，$x_3=0$ 时成立.

由此可以猜想，一般情况下的极值点为 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0\right)$.

采用磨光变换：当 $n \geqslant 3$ 时，对于自变量组：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，令 $x_1'=x_1$，$x_2'=x_2$，$\cdots$，$x_{n-2}'=x_{n-2}$，$x_{n-1}'=x_{n-1}+x_n$，$x_n'=0$，得到一个新的自变量组 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}+x_n, 0)$，对应的 F 之值为

$$\begin{aligned}
F' &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-2} x_ix_j(x_i+x_j) \text{ (此式记为 } A\text{)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2} x_{n-1}'\,x_i(x_{n-1}'+x_i)+\sum_{i=1}^{n-1} x_n'x_i(x_n'+x_i). \\
&= A+\sum_{i=1}^{n-2}(x_{n-1}+x_n)x_i(x_{n-1}+x_n+x_i) \\
&= A+\sum_{i=1}^{n-2}(x_{n-1}^2+2x_{n-1}x_n+x_{n-1}x_i+x_n^2+x_nx_i)x_i \\
&= A+\sum_{i=1}^{n-2}x_{n-1}x_i(x_{n-1}+x_i)+\sum_{i=1}^{n-2}x_nx_i(x_n+x_i)+2x_{n-1}x_n\sum_{i=1}^{n-2}x_i \\
&= A+\sum_{i=1}^{n-2}x_{n-1}x_i(x_{n-1}+x_i)+\sum_{i=1}^{n-1}x_nx_i(x_n+x_i) \\
&\quad -x_{n-1}x_n(x_{n-1}+x_n)+2x_{n-1}x_n\sum_{i=1}^{n-2}x_i \\
&= F+x_{n-1}x_n\left(2\sum_{i=1}^{n-2}x_i-x_{n-1}-x_n\right)=F+[2-3(x_{n-1}+x_n)]x_{n-1}x_n.
\end{aligned}$$

因为$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，且$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，所以

$$\frac{x_{n-1}+x_n}{2} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{1}{n},$$

所以$x_{n-1}+x_n \leqslant \frac{2}{n}$. 而$n \geqslant 3$，所以$x_{n-1}+x_n \leqslant \frac{2}{n} \leqslant \frac{2}{3}$，所以$2-3(x_{n-1}+x_n) \geqslant 0$，所以$F' \geqslant F$.

只要变量组中的非零分量个数$n \geqslant 3$，上述变换就可继续进行，最多经过$n-2$次调整，可将其中$n-2$个分量都变为0，再利用$n=2$的情形，知F在$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0\right)$取最大值$\frac{1}{4}$.

例 4 设$f(x)=ax^2+bx+c$的所有系数都是正的，且$a+b+c=1$. 对所有满足：$x_1x_2\cdots x_n=1$的正数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$，求$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$的最小值.（全俄数学奥林匹克试题）

解 $f(1)=a+b+c=1$. 若$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$，则$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=1$.

若$x_1, x_2, \cdots, x_n$不全为1，则由$x_1x_2\cdots x_n=1$知，其中必有一个小于1，也必有一个大于1. 不妨设$x_1>1$，$x_2<1$，将x_1、x_2用1、x_1x_2代替，考察其变化：

$$\begin{aligned} f(x_1)f(x_2) &= (ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c) \\ &= a^2x_1^2x_2^2+b^2x_1x_2+c^2+ab(x_1^2x_2+x_1x_2^2) \\ &\quad +ac(x_1^2+x_2^2)+bc(x_1+x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1)f(x_1x_2) &= (a+b+c)(ax_1^2x_2^2+bx_1x_2+c) \\ &= a^2x_1^2x_2^2+b^2x_1x_2+c^2+ab(x_1^2x_2^2+x_1x_2) \\ &\quad +ac(x_1^2x_2^2+1)+bc(x_1x_2+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f(x_1)f(x_2)-f(1)f(x_1x_2) \\ =\ & abx_1x_2(x_1+x_2-x_1x_2-1)+ac(x_1^2+x_2^2-x_1^2x_2^2-1) \\ & +bc(x_1+x_2-x_1x_2-1) \\ =\ & -abx_1x_2(x_1-1)(x_2-1)-ac(x_1^2-1)(x_2^2-1) \\ & -bc(x_1-1)(x_2-1)>0. \end{aligned}$$

反复进行上述变换，得$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \geqslant f(1)f(1)\cdots f(1)=1$. 故

$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ 的最小值为 1.

例 5 对于满足条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，求 $S=\sum_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)$ 的最大值.（第 40 届 IMO 中国国家队选拔考试题）

分析 先考虑 $n=2$、3 的情形，可发现 $\sum_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)$ 达到最大时，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最多有 2 个不为零. 考虑这样的磨光工具 $(x, y)\rightarrow(x+y, 0)$，希望有 $(x+y)^4-(x+y)^5+0^4-0^5>x^4-x^5+y^4-y^5$. 此不等式等价于 $4x^2+4y^2+6xy>5x^3+5y^3+10x^2y+10xy^2$. 此式左边 $=\frac{7}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+6xy\geqslant\frac{7}{2}(x^2+y^2)+xy+6xy=\frac{7}{2}(x+y)^2$，而右边 $\leqslant 5x^3+5y^3+15x^2y+15xy^2=5(x+y)^3$. 于是，上式成立的一个充分条件是 $\frac{7}{2}(x+y)^2>5(x+y)^3$，即 $x+y<\frac{7}{10}$. 这样，我们得到如下的

引理：如果 $x+y<\frac{7}{10}$，则 $(x+y)^4-(x+y)^5>x^4-x^5+y^4-y^5$.

解 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中非零数的个数为 k，不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_k>0$，$x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots=x_n=0$. 如果 $k\geqslant 3$，则令 $x_i'=x_i(i=1, 2, \cdots, k-2)$，$x_{k-1}'=x_{k-1}+x_k$，$x_k'=x_{k+1}'=\cdots=x_n'=0$，因为 $x_{k-1}+x_k\leqslant\frac{2}{n}\leqslant\frac{2}{3}<\frac{7}{10}$，由引理，有 $\sum_{j=1}^{n}(x_j'^4-x_j'^5)>\sum_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)$. 只要非零变量个数不小于 3，上述调整就可进行. 最多经过 $n-2$ 次调整，可以将 $x_3, \cdots, x_n$ 调为 0，而 S 不减. 记此时的 x_1、x_2 为 a、b，则 $a+b=1$，且 $S=a^4(1-a)+b^4(1-b)=a^4b+ab^4=ab(a^3+b^3)=ab(a+b)(a^2-ab+b^2)=ab[(a+b)^2-3ab]=ab(1-3ab)=\frac{1}{3}(3ab)(1-3ab)\leqslant\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

又当 $x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$，$x_3=\cdots=x_n=0$ 时 $S=\frac{1}{12}$，故 $S_{\max}=\frac{1}{12}$.

例 6 设 x、y、z 为非负实数，满足：$x+y+z=1$，求 $Q=\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}+\sqrt{2-z}$ 的最小值.

解 由对称性，不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$，令 $x'=0$，$y'=y$，$z'=z+x-x'$，则 $x'\geqslant 0$，$y'\geqslant 0$，$z'\geqslant 0$，且 $z'-z=x-x'$，$y'+z'=x+y+z-x'=$

$x+y+z=1$，于是

$$
\begin{aligned}
&Q-\left(\sqrt{2-x'}+\sqrt{2-y'}+\sqrt{2-z'}\right)\\
=&\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}+\sqrt{2-z}-\left(\sqrt{2-x'}+\sqrt{2-y'}+\sqrt{2-z'}\right)\\
=&\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{2-x'}\right)+\left(\sqrt{2-z}-\sqrt{2-z'}\right)\\
=&\frac{x'-x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x'}}+\frac{z'-z}{\sqrt{2-z}+\sqrt{2-z'}}\\
=&(x-x')\left[\frac{-1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x'}}+\frac{1}{\sqrt{2-z}+\sqrt{2-z'}}\right]\\
=&x\cdot\frac{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x'}\right)-\left(\sqrt{2-z}+\sqrt{2-z'}\right)}{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x'}\right)\left(\sqrt{2-z}+\sqrt{2-z'}\right)}\\
=&x\cdot\frac{\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{2-z}\right)+\left(\sqrt{2-x'}-\sqrt{2-z'}\right)}{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x'}\right)\left(\sqrt{2-z}+\sqrt{2-z'}\right)}\\
=&x\cdot\frac{\dfrac{z-x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-z}}+\dfrac{z'-x'}{\sqrt{2-x'}-\sqrt{2-z'}}}{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x'}\right)\left(\sqrt{2-z}+\sqrt{2-z'}\right)}\\
=&x\cdot\frac{\dfrac{z-x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-z}}+\dfrac{z'}{\sqrt{2-x'}-\sqrt{2-z'}}}{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x'}\right)\left(\sqrt{2-z}+\sqrt{2-z'}\right)}\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

所以，

$$Q\geqslant\sqrt{2-x'}+\sqrt{2-y'}+\sqrt{2-z'}=\sqrt{2}+\sqrt{2-y'}+\sqrt{2-z'}. \quad ①$$

因为

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{2-y'}+\sqrt{2-z'}\right)^2&=(2-y')+(2-z')+2\sqrt{2-y'}\sqrt{2-z'}\\
&=4-(y'+z')+2\sqrt{4-2(y'+z')+y'z'}\\
&=4-1+2\sqrt{4-2\cdot1+y'z'}\\
&=3+2\sqrt{2+y'z'}\\
&\geqslant 3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$\sqrt{2-y'}+\sqrt{2-z'}\geqslant 1+\sqrt{2}. \quad ②$$

由①②，得 $Q \geqslant 1+2\sqrt{2}$，当 $x=y=0$，$z=1$ 时，$Q=1+2\sqrt{2}$，因此 Q 的最小值是 $1+2\sqrt{2}$.

习 题 5

1 设 $x_i \geqslant 0\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{1}{2}$，$n \geqslant 2$. 求 $F=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$ 的最小值.

2 设 $x_i \geqslant 0\ (1 \leqslant i \leqslant n,\ n \geqslant 4)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$，求 $F=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{i+1}$ 的最大值.

3 设 $x_i \geqslant 0\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \pi$，$n \geqslant 2$. 求 $F=\sum\limits_{i=1}^{n} \sin^2 x_i$ 的最大值.（第 26 届 IMO 备选题）

4 设 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < \pi$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=A$，求 $\sin a_1+\sin a_2+\cdots+\sin a_n$ 的最大值.

5 设 x_1、x_2、x_3、x_4 都是正实数，且 $x_1+x_2+x_3+x_4=\pi$，求

$$A=\left(2\sin^2 x_1+\frac{1}{\sin^2 x_1}\right)\left(2\sin^2 x_2+\frac{1}{\sin^2 x_2}\right)\left(2\sin^2 x_3+\frac{1}{\sin^2 x_3}\right)\left(2\sin^2 x_4+\frac{1}{\sin^2 x_4}\right)$$

的最小值.（1991 年中国国家集训队测试题）

6 间距估计

考虑这样的问题：设 X 是给定的集合，A 是 X 的具有某种性质的子集，求 $|A|$ 的最大值. 对此，可将集合中元素适当排序，然后估计相邻元素间的距离，由此得到元素个数的估计. 这种估计方法简称间距估计.

例 1 设 $M=\{1, 2, \cdots, 2005\}$，A 是 M 的子集，若对任何 $a_i, a_j \in A$，$a_i \neq a_j$，都能以 a_i、a_j 为边长唯一地确定一个等腰三角形，求 $|A|$ 的最大值.

分析 先考虑在什么条件下，两个数 a、b $(a<b)$ 能唯一地确定一个以 a、b 为其两边的等腰三角形，这等价于(注意 a、b、b 必构成等腰三角形) 三数组 (a, a, b) 不构成等腰三角形. 也等价于 $a+a \leqslant b$，即 $2a \leqslant b$. 由此，即可作间距估计.

解 当 $a<b$ 时，a、b、b 必构成等腰三角形，所以，两个数 a、b 唯一地确定一个以 a、b 为其两边的等腰三角形，等价于 a、a、b 不构成等腰三角形，即 $2a \leqslant b$.

设 $A=\{a_1<a_2<\cdots<a_n\}$ 是 M 的一个合乎条件的子集，则 $2a_i \leqslant a_{i+1}$ (间距估计). 于是，$2005 \geqslant a_n \geqslant 2a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant 2^{n-1}a_1 \geqslant 2^{n-1}$，所以 $n \leqslant 11$.

其次，令 $A=\{1, 2, 4, \cdots, 1024\}$，则 $|A|=11$. 且对任何 a_i、$a_j \in A$，设 $i<j$，则 $a_i=2^{i-1}$，$a_j=2^{j-1}$，有 $2a_i=2^i \leqslant 2^{j-1}=a_j$，从而以 a_i、a_j 只能作唯一的等腰三角形 (a_i, a_j, a_j)，所以 A 合乎条件.

综上所述，$|A|$ 的最大值为 11.

例 2 设 A 是正整数集合 $\mathbf{N}^*$ 的子集，对任何 $x, y \in A$，$x \neq y$，有 $|x-y| \geqslant \frac{xy}{25}$. 求 $|A|$ 的最大值. (第 26 届 IMO 备选题)

分析 先考虑能否去掉条件中含有的绝对值符号，这就要求集合中的任两个元素都具有确定的大小关系. 由此想到将集合中的元素排序，进而利用条件，得到元素的间距估计.

解 不妨设 $A=\{a_1<a_2<\cdots<a_n\}$，则条件变为：对任何 $i<j$，有 $a_j-a_i \geqslant \frac{a_ja_i}{25}$. 于是，$a_{i+1}-a_i \geqslant \frac{a_ia_{i+1}}{25}$，即 $\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}} \geqslant \frac{1}{25}$.

令 $i=1, 2, \cdots, n-1$，并将得到的各式累加，得 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n-1}{25}$，所以 $\frac{1}{a_1}>\frac{n-1}{25}$. 所以 $n-1<\frac{25}{a_1} \leqslant 25$，$n \leqslant 25$. 但此估计过宽，我们采用"起点后移"的办法对之进行改进.

令 $i=2, 3, \cdots, n-1$，并将得到的各式累加，得 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n-2}{25}$. 所以 $\frac{1}{a_2}>\frac{n-2}{25}$，所以 $2 \leqslant a_2<\frac{25}{n-2}$，$n<\frac{29}{2}$，$n \leqslant 14$. 经试验，还要继续改进估计.

类似地，有 $3 \leqslant a_3<\frac{25}{n-3}$，$n \leqslant 11$；$4 \leqslant a_4<\frac{25}{n-4}$，$n \leqslant 10$；$5 \leqslant a_5<\frac{25}{n-5}$，$n \leqslant 9$；$6 \leqslant a_6<\frac{25}{n-6}$，$n \leqslant 10$. 由 n 的范围的变化趋势，可猜想 $n \leqslant 9$ 是最好的估计.

下面证明存在合乎条件的 9 元子集 A. 首先，当 $xy \leqslant 25$ 时，条件 $|x-y| \geqslant \frac{xy}{25}$ 显然满足. 从而可取 $1, 2, 3, 4, 5 \in A$，此时，$6 \notin A$. 否则 $|6-5|<\frac{30}{25}$，不合条件. 如此下去，发现可取 $7, 10, 17, 54 \in A$. 所以，$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}$ 为所求.

综上所述，$|A|$ 的最大值为 9.

例 3　设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$，$A_i=\{a_i, b_i, c_i\}$ $(a_i<b_i<c_i, i=1, 2, \cdots, m)$ 是 X 的 3 元子集，对任何 A_i、$A_j (1 \leqslant i<j \leqslant m)$，$a_i=a_j$，$b_i=b_j$，$c_i=c_j$ 至多有一个成立，求 m 的最大值.

解　对于 $2 \leqslant k \leqslant n-1$，考察以 k 为中间元素的 3 元子集 $\{a_i, k, c_i\}$，其中 $a_i<k<c_i$，设这样的集合个数为 $f(k)$. 因为 a_i 可在 $1, 2, \cdots, k-1$ 中取值，于是 $f(k) \leqslant k-1$. 又 c_i 可在 $n, n-1, \cdots, k+1$ 中取值，于是 $f(k) \leqslant n-k$. 所以 $f(k) \leqslant \min\{k-1, n-k\}$. 所以

$$m=\sum_{k=2}^{n-1} f(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \min\{k-1, n-k\}=\begin{cases}\dfrac{n(n-2)}{4} & (n\text{ 为偶数}),\\ \left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2 & (n\text{ 为奇数}).\end{cases}$$

又取 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为所有满足 $a+c=2b$ 的 3 元子集 $\{a, b, c\}$，则

$$m=\begin{cases}\dfrac{n(n-2)}{4} & (n\text{ 为偶数}),\\ \left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2 & (n\text{ 为奇数}).\end{cases}$$

故
$$m_{\max}=\begin{cases}\dfrac{n(n-2)}{4} & (n\text{ 为偶数}),\\ \left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2 & (n\text{ 为奇数}).\end{cases}$$

例 4 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n=100$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正整数，若对任何 $i\geqslant 2$，都存在 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant r\leqslant i-1$，使 $a_i=a_p+a_q+a_r$，求 n 的最大、最小值.（原创题）

解 (1) 显然 $n\neq 1, 2$，所以 $n\geqslant 3$.

又当 $n=3$ 时，取 $a_1=20, a_2=60, a_3=100$，则 $a_2=a_1+a_1+a_1$，$a_3=a_1+a_1+a_2$，所以 $n=3$ 合乎条件，故 n 的最小值为 3.

(2) 若 $a_1\equiv 1(\bmod 2)$，则 $a_2=3a_1\equiv 3\equiv 1(\bmod 2)$. 设 $i\leqslant k(k\geqslant 2)$ 时，$a_k\equiv 1(\bmod 2)$，则由 $a_{k+1}=a_p+a_q+a_r$，其中($p\leqslant q\leqslant r\leqslant k$)，及归纳假设 $a_p\equiv 1(\bmod 2)$，$a_q\equiv 1(\bmod 2)$，$a_r\equiv 1(\bmod 2)$，有 $a_{k+1}=a_p+a_q+a_r\equiv 1+1+1\equiv 1(\bmod 2)$，所以对一切 $i=1, 2, \cdots, n$，有 $a_i\equiv 1(\bmod 2)$，这与 $100\equiv 0(\bmod 2)$ 矛盾，所以 $a_1\equiv 0(\bmod 2)$，进而 $a_1\equiv 0$、$2(\bmod 4)$；

若 $a_1\equiv 2(\bmod 4)$，则 $a_2=3a_1\equiv 6\equiv 2(\bmod 4)$. 设 $i\leqslant k(k\geqslant 2)$ 时，$a_k\equiv 2(\bmod 4)$，则由 $a_{k+1}=a_p+a_q+a_r$，其中($p\leqslant q\leqslant r\leqslant k$)，及归纳假设 $a_p\equiv 2(\bmod 4)$，$a_q\equiv 2(\bmod 4)$，$a_r\equiv 2(\bmod 4)$，有 $a_{k+1}=a_p+a_q+a_r\equiv 2+2+2\equiv 2(\bmod 4)$，所以对一切 $i=1, 2, \cdots, n$，有 $a_i\equiv 2(\bmod 4)$，这与 $100\equiv 0(\bmod 4)$ 矛盾，所以 $a_1\equiv 0(\bmod 4)$，进而 $a_1\equiv 0$、$4(\bmod 8)$；

若 $a_1\equiv 0(\bmod 8)$，则 $a_2=3a_1\equiv 0(\bmod 8)$. 设 $i\leqslant k(k\geqslant 2)$ 时，$a_k\equiv 0(\bmod 8)$，则由 $a_{k+1}=a_p+a_q+a_r$，其中($p\leqslant q\leqslant r\leqslant k$)，及归纳假设 $a_p\equiv 0(\bmod 8)$，$a_q\equiv 0(\bmod 8)$，$a_r\equiv 0(\bmod 8)$，有 $a_{k+1}=a_p+a_q+a_r\equiv 0+0+0\equiv 0(\bmod 8)$，所以对一切 $i=1, 2, \cdots, n$，有 $a_i\equiv 0(\bmod 8)$，这与 $100\equiv 4(\bmod 8)$ 矛盾，所以 $a_1\equiv 4(\bmod 8)$，所以 $a_1\geqslant 4$.

因为 $a_1\equiv 4(\bmod 8)$，所以 $a_2=3a_1\equiv 12\equiv 4(\bmod 8)$. 设 $i\leqslant k(k\geqslant 2)$ 时，$a_k\equiv 4(\bmod 8)$，则由 $a_{k+1}=a_p+a_q+a_r$，其中($p\leqslant q\leqslant r\leqslant k$)，及归纳假设，$a_p\equiv 4(\bmod 8)$，$a_q\equiv 4(\bmod 8)$，$a_r\equiv 4(\bmod 8)$，有 $a_{k+1}=a_p+a_q+a_r\equiv 4+4+4\equiv 4(\bmod 8)$，所以对一切 $i=1, 2, \cdots, n$，有 $a_i\equiv 4(\bmod 8)$，所以对 $i\geqslant 2$，有 $a_i-a_{i-1}\equiv 0(\bmod 8)$，所以 $a_i-a_{i-1}\geqslant 8$(间距估计)，即 $a_i\geqslant a_{i-1}+8$.

所以 $a_n\geqslant a_{n-1}+8\geqslant a_{n-2}+2\times 8\geqslant a_{n-3}+3\times 8\geqslant\cdots\geqslant a_1+(n-1)\times 8\geqslant 4+(n-1)\times 8=8n-4$，所以 $8n\leqslant a_n+4=104$，所以 $n\leqslant 13$.

又当 $n=13$ 时，取 $a_i=8i-4(i=1, 2, \cdots, 13)$，则对 $i\geqslant 2$，有 $a_i=a_{i-1}+8=a_{i-1}+a_1+a_1$，所以 $n=13$ 合乎条件，故 n 的最大值为 13.

综上所述，n 的最小值为 3，最大值为 13.

注：n 有多种取值，比如 $n=5$ 时，4，12，36，44，100 合乎条件，实际上，$12=4+4+4$，$36=12+12+12$，$44=36+4+4$，$100=44+44+12$.

习 题 6

1 设 X 是 $\mathbf{N}^*$ 的子集，X 的最小元为 1，最大元为 100，对 X 中任何一个大于 1 的数，都可表成 X 中两个数(可以相同)的和，求 $|X|$ 的最小值.

2 在 $n\times n$ 棋盘 C 中，两个具有公共顶点的格称为是相连的. 将 1，2，3，…，n^2 分别填入各格中，每格填一个数. 若任何相连的两个格的数至多相差 g，则称 g 为一个 C-间隙. 求出最小的 C-间隙 C_g.（第 42 届 Putanam 数学竞赛题）

3 设 2005 条线段首尾相连，组成封闭的折线，且折线的任何两段都不在同一条直线上，那么，此折线自身相交的交点最多有多少个?

4 设集合 $M=\{1, 2, \cdots, 10\}$ 的五元子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 满足条件：M 中的任意两个元素最多在两个子集 A_i 与 $A_j\ (i\neq j)$ 内出现，求 k 的最大值.（2003 年中国数学奥林匹克协作体训练题）

7 划块估计

为了估计集合 X 的具有某种性质的子集 A 中含有元素的个数，可将 X 划分为若干块 $X_1, X_2, \cdots, X_t$. 然后讨论每个 X_i 至多(或至少)含有 A 的多少个元素，由此得到 $|A|$ 的范围估计. 常有如下 3 种基本情形：

情形 1 若 X 的子集 A 满足：A 中任何 r 元组都具有性质 p，求 $|A|$ 的最大值. 则可将 X 划分为若干块 $X_1, X_2, \cdots, X_t$，使 X_i 中任何 r 元组都不具有性质 p，从而每个 X_i 至多含有 A 的 $r-1$ 个元素.

情形 2 设 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_t$，且每个 X_i 至多含有 A 的 k_i 个元素，从而 $|A| \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_t$. 显然，$k_1 + k_2 + \cdots + k_t$ 越小，估计越精确(等号越有可能达到). 因此，在 X 的划分中，应使 $k_1 + k_2 + \cdots + k_t$ 尽可能小，这就要使 k_i 在 A_i 中占的"比重"：$\dfrac{k_i}{|A_i|}$ 较小. 这常常可通过列表试验，找到估计较为精确的划分.

情形 3 有些数集具有这样的性质：只要集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 具有性质 p，则集合 $A + a = \{a_1 + a, a_2 + a, \cdots, a_n + a\}$ 也具有性质 p，我们称集合 A 的这种性质 p 具有平移不变性. 此时，可对 X 进行均匀(各块的元素个数相等) 的划分，然后分块进行估计.

例 1 设 $M = \{1, 2, \cdots, 2005\}$，$A$ 是 M 的子集，若对任何 $a_i, a_j \in A$，$a_i \neq a_j$，都能以 a_i、a_j 为边长唯一地确定一个等腰三角形，求 $|A|$ 的最大值.

分析 本题在前一节中用"间距估计"给出过解答，现考虑用划块估计求解. 其基本想法是，将 M 划分为若干块，使 A 在每一块中至多含有 1 个元素. 注意到 A 满足的条件是：对任何 $a_i < a_j \in A$，都有 $2a_i \leqslant a_j$. 因此，在对 M 分块时，可使每一块中的任何两个元素 $x, y(x < y)$，都有 $2x > y$.

解 将 M 划分为 11 个子集：$A_1 = \{1\}$，$A_2 = \{2, 3\}$，$A_3 = \{2^2, 2^2 + 1, \cdots, 2^3 - 1\}$，$\cdots$，$A_{11} = \{2^{10}, 2^{10} + 1, \cdots, 2005\}$，因为对每个集合 A_i 中的任何元素 $x, y(x < y)$，都有 $2x > y$，从而 $|A \cap A_i| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, 11)$，所以 $|A| \leqslant 11$. 又 $A = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{10}\}$ 合乎条件，故 $|A|$ 的最大值为 11.

例 2　设 A 是正整数集合 $\mathbf{N}^*$ 的子集，对任何 $x, y \in A, x \neq y$，有 $|x-y| \geqslant \frac{xy}{25}$. 求 $|A|$ 的最大值.（第 26 届 IMO 备选题）

分析　本题在前一节中用"间距估计"给出过解答，现考虑用划块估计求解. 其基本想法是：将 $\mathbf{N}^*$ 划分为若干块，使 A 在每一块中至多含有 1 个元素. 注意到 A 满足的条件是：对任何 $a_i < a_j \in A$，都有 $a_j - a_i \geqslant \frac{a_i a_j}{25}$. 因此，在对 $\mathbf{N}^*$ 分块时，可使每一块中的任何两个元素 $x, y\ (x<y)$，都有 $y-x<\frac{xy}{25}$.

解　令 $X_1=\{1\}$，$X_2=\{2\}$，$X_3=\{3\}$，$X_4=\{4\}$，$X_5=\{5, 6\}$，$X_6=\{7, 8, 9\}$，$X_7=\{10, 11, \cdots, 16\}$，$X_8=\{17, 18, \cdots, 53\}$，$X_9=\{54, 55, \cdots\}=\mathbf{N}^* \backslash \{1, 2, \cdots, 53\}$.

对于 X_9，当 $x, y \in X_9$ 时，$x>25$，所以 $y-x<y<y\cdot\frac{x}{25}=\frac{xy}{25}$. 而对于 $X_i\ (i=1, 2, \cdots, 8)$，当 $x, y \in X_i$ 时，显然有 $y-x<\frac{xy}{25}$. 于是 A 最多只能含有上述每个集合中的一个数，所以 $n \leqslant 9$.

又 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}$ 合乎条件，所以 $|A|$ 的最大值为 9.

例 3　设 $A \subseteq \{0, 1, 2, \cdots, 29\}$，满足：对任何整数 k 及 A 中任意数 a、b（a、b 可以相同），$a+b+30k$ 均不是两个相邻整数之积. 试求出所有元素个数最多的 A.（2003 年中国集训队选拔考试试题）

解　所求的 $A=\{3t+2 \mid 0 \leqslant t \leqslant 9, t \in \mathbf{Z}\}$.

设 A 满足题中条件且 $|A|$ 最大. 因为对两个相邻整数 a、$a+1$，有 $a(a+1) \equiv 0, 2, 6, 12, 20, 26 \pmod{30}$. 于是对任一 $a \in A$，取 $b=a$，$k=0$，可知 $2a \not\equiv 0, 2, 6, 12, 20, 26 \pmod{30}$，即 $a \not\equiv 0, 1, 3, 6, 10, 13, 15, 16, 18, 21, 25, 28 \pmod{30}$. 因此，$A \subseteq M=\{2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 29\}$，而 M 可分拆成下列 10 个子集的并：$A_1=\{2, 4\}$，$A_2=\{5, 7\}$，$A_3=\{8, 12\}$，$A_4=\{11, 9\}$，$A_5=\{14, 22\}$，$A_6=\{17, 19\}$，$A_7=\{20\}$，$A_8=\{23, 27\}$，$A_9=\{26, 24\}$，$A_{10}=\{29\}$. 其中每一个子集 A_i 至多包含 A 中一个元素，故 $|A| \leqslant 10$.

若 $|A|=10$，则每个子集 A_i 恰好包含 A 中一个元素，于是，$20 \in A$，$29 \in A$. 由 $20 \in A$ 知 $12 \notin A$，$22 \notin A$，从而 $8 \in A$，$14 \in A$，这样 $4 \notin A$，$24 \notin A$. 因此 $2 \in A$，$26 \in A$. 由 $29 \in A$ 知 $7 \notin A$，$27 \notin A$，从而 $5 \in A$，$23 \in A$，这样 $9 \notin A$，$19 \notin A$，因此 $11 \in A$，$17 \in A$.

综上所述，所求的集合 $A=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$，经验

证，A 满足要求.

例 4　设 A 是 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 1989\}$ 的子集，对任何 $x, y\in A$，有 $|x-y|\neq 4$ 和 7. 求 $|A|$ 的最大值.（第 7 届美国数学奥林匹克试题）

分析　设 A 是 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 1989\}$ 的子集，若对任何 $x, y\in A$，有 $|x-y|\neq 4$ 和 7，则称 A 是好子集. 显然，好子集具有平移不变性，即 A 是好子集，则对任何 a，$A+a$ 也是好子集. 所以可进行均匀划块估计.

设 $X=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_k$，注意题目的目标是 $|A|\leqslant r$，r 越小，估计越精确. 因此应使"好"元素（属于 A）在 P_i 中所占的比例尽可能小. 设 $P=\{1, 2, \cdots, t\}$，列表观察：

$t=\|P\|$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\|A\cap P\|$	1	2	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	7
$\frac{\|A\cap P\|}{\|P\|}$	1	1	1	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{13}$

其中以 $P=\{1, 2, \cdots, 11\}$ 时得到的比值 $\frac{5}{11}$ 最小，猜想以 $\{1, 2, \cdots, 11\}$ 为一个子集的划分是最佳的.

解　设 A 是合乎题意的子集，对 $P=\{1, 2, \cdots, 11\}$，我们证明 $|A\cap P|\leqslant 5$.

实际上，将 P 划分为 6 个子集 $\{1, 5\}$、$\{2, 9\}$、$\{3, 7\}$、$\{4, 8\}$、$\{6, 10\}$、$\{11\}$，对所划分的每个子集，A 最多含有它的一个元素，所以 $|A\cap P|\leqslant 6$. 若 $|A\cap P|=6$，则 A 在每个划分的子集中都至少含有一个元素，于是 $11\in A$，$\Rightarrow 4\notin A$，$\Rightarrow 8\in A$，$\Rightarrow 1\notin A$，$\Rightarrow 5\in A$，$\Rightarrow 9\notin A$，$\Rightarrow 2\in A$，$\Rightarrow 6\notin A$，$\Rightarrow 10\in A$，$\Rightarrow 3\notin A$，$\Rightarrow 7\in A$，但 $11-7=4$，矛盾. 所以 $|A\cap P|\leqslant 5$.

令 $P_k=\{11k+1, 11k+2, \cdots, 11k+11\}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 179)$，$P_{180}=\{1981, 1982, \cdots, 1989\}$. 则同样可知，$A$ 至多含有 $P_k(k=0, 1, 2, \cdots, 180)$ 中的 5 个元素，所以 $|A|\leqslant 5\times 181=905$.

最后，令 $A_k=\{11k+1, 11k+3, 11k+4, 11k+6, 11k+9\}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 180)$，$A=A_0\cup A_1\cup\cdots\cup A_{180}$，则 A 合乎题意，此时 $|A|=905$，故 $|A|$ 的最大值为 905.

例 5　设 p 为给定的正整数，A 是 $X=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 2^p\}$ 的子集，且具有性质：对任何 $x\in A$，有 $2x\notin A$. 求 $|A|$ 的最大值.（1991 年法国数学奥林匹克试题）

分析与解　将 X 划块，对 p 归纳.

当 $p=1$ 时，$X=\{1, 2\}$，取 $A=\{1\}$，于是 $f(1)=1$；

当 $p=2$ 时，$X=\{1, 2, 3, 4\}$，将 X 划分为 3 个子集 $\{1, 2\}$、$\{3\}$、$\{4\}$，则 A 至多含每个子集中的一个数，于是 $|A|\leqslant 3$. 取 $A=\{1, 3, 4\}$，于是 $f(2)=3$；

当 $p=3$ 时，$X=\{1, 2, \cdots, 8\}$. 将 X 划分为 5 个子集：$\{1, 2\}$、$\{3, 6\}$、$\{4, 8\}$、$\{5\}$、$\{7\}$，则 A 至多含有每个子集中的一个数，于是 $|A|\leqslant 5$. 取 $A=\{1, 5, 6, 7, 8\}$，则 $f(3)=5$.

一般地，当 $X_p=\{1, 2, 3, \cdots, 2^p\}$ 时，可进行划块估计. 注意到 $2^{p-1}+1$, $2^{p-1}+2$, $\cdots$, 2^p 都可属于 A，于是想到划块：$X=\{1, 2, 3, \cdots, 2^{p-1}\}\cup\{2^{p-1}+1, 2^{p-1}+2, \cdots, 2^p\}=X_{p-1}\cup M$，其中 $X_{p-1}=\{1, 2, 3, \cdots, 2^{p-1}\}$，$M=\{2^{p-1}+1, 2^{p-1}+2, \cdots, 2^p\}$. 这样，问题在于 $X_{p-1}=\{1, 2, 3, \cdots, 2^{p-1}\}$ 中至多有多少个属于 A，这是否为原问题在 $p-1$ 的情形？问题没有这么简单！试想：M 中的数 $2^{p-1}+1$, $2^{p-1}+2$, $\cdots$, 2^p 都属于 A 时，X_{p-1} 中有很多数不能属于 A，比如：$2^{p-2}+1$, $2^{p-2}+2$, $\cdots$, 2^{p-1} 都不属于 A；但未必 $2^{p-1}+2$, $2^{p-1}+4$, $\cdots$, 2^p 都属于 A. 因此，还要作更细的划块：M 中的部分数 $2^{p-1}+2$, $2^{p-1}+4$, $\cdots$, 2^p 与 X_{p-1} 中的有关数(2 倍关系)搭配构造集合：$\{2^{p-1}+2, 2^{p-2}+1\}$, $\{2^{p-1}+4, 2^{p-2}+2\}$, $\cdots$, $\{2^p, 2^{p-1}\}$，由此得到 X_p 的一个划分：

$X_{p-2}=\{1, 2, 3, \cdots, 2^{p-2}\}$, $M_t=\{2^{p-1}+2t, 2^{p-2}+t\}$ $(t=1, 2, \cdots, 2^{p-2})$, $M_0=\{2^{p-1}+1, 2^{p-1}+3, 2^{p-1}+5, \cdots, 2^{p-1}+2^{p-1}-1\}$.

因为 A 至多含 $M_t(t=1, 2, \cdots, 2^{p-2})$ 中一个元素，至多含 X_{p-2} 中 $f(p-2)$ 个元素，至多含 M_0 中 2^{p-2} 个元素，于是 $f(p)\leqslant f(p-2)+2^{p-2}+2^{p-2}=f(p-2)+2^{p-1}$.

下面考虑，能否构造集合 A，证明 $f(p)\geqslant f(p-2)+2^{p-1}$.

设 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 2^{p-2}\}$ 的合乎题意的最大子集为 A_1，令 $A_2=\{2^{p-1}+1, 2^{p-1}+2, \cdots, 2^p\}$，则对任何 $x\in A_1$，有 $2x\leqslant 2\cdot 2^{p-2}=2^{p-1}<2^{p-1}+1\notin A_2$，于是，$A=A_1\cup A_2$ 是合乎题意的子集，故 $f(p)\geqslant|A|=f(p-2)+2^{p-1}$.

综上所述，$f(p)=f(p-2)+2^{p-1}$.

下面用两种方案解此递归关系.

方案 1：迭代(p 个等式相加)，得 $f(p-1)+f(p)=f(1)+f(2)+2^2+2^3+\cdots+2^{p-1}=1+(2^0+2^1)+2^2+2^3+\cdots+2^{p-1}=2^p$.

再迭代(第 $p-1$ 个等式减第 $p-2$ 个等式，加第 $p-3$ 个等式等等)，得

$$f(p)+(-1)^p f(1)=2^p-2^{p-1}+\cdots+(-1)^p\cdot 2^2,$$

所以 $$f(p)=2^p-2^{p-1}+\cdots+(-1)^p\cdot 2^2+(-1)^{p+1},$$

注意到$(-1)^{p+1}\cdot 2^1+(-1)^{p+2}\cdot 2^0=(-1)^{p+1}(2-1)=(-1)^{p+1}$，

所以 $f(p)=2^p-2^{p-1}+\cdots+(-1)^p\cdot 2^2+(-1)^{p+1}\cdot 2^1+(-1)^{p+2}\cdot 2^0$

$$=\frac{2^p\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2^{p+1}+(-1)^p}{3}.$$

方案 2：分类求解.

当 p 为奇数时，$f(p)=f(p-2)+2^{p-1}=f(p-4)+2^{p-3}+2^{p-1}=f(1)+2^2+2^4+\cdots+2^{p-1}=2^0+2^2+2^4+\cdots+2^{p-1}=\frac{2^{p+1}-1}{3}$；

当 p 为偶数时，$f(p)=f(p-2)+2^{p-1}=f(p-4)+2^{p-3}+2^{p-1}=f(2)+2^3+2^5+\cdots+2^{p-1}=1+2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{p-1}=\frac{2^{p+1}+1}{3}$.

例 6 设 $X=\{1,2,\cdots,2001\}$，求最小的正整数 m，使其适合要求：对 X 的任何一个 m 元子集 W，都存在 $u,v\in W$（u、v 可以相同），使得 $u+v$ 是 2 的方幂.（2001 年中国数学奥林匹克试题）

分析与解 为叙述问题方便，如果 $u+v$ 是 2 的方幂，则称 u、v 是一个对子. 我们从反面考虑，如果 X 的子集 W 不含对子，则 W 最多有多少个元素？显然，我们如果能将 X 划分成若干块，使每一块中任何 2 个数是对子，则 W 只能含每一块中的一个元素. 于是，令 $A_i=\{1024-i,1024+i\}$ $(i=1,2,\cdots,977)$，$B_j=\{32-j,32+j\}$ $(j=1,2,\cdots,14)$，$C=\{15,17\}$，$D_k=\{8-k,8+k\}$ $(k=1,2,\cdots,6)$，$E=\{1,8,16,32,1024\}$. 假定 W 不含有对子，则 W 不能含有 E 中的元素，且最多只能含有各 A_i、B_j、D_k 与 C 中的一个元素，于是，$|W|\leqslant 977+14+6+1=998$. 这表明，当 $|W|\geqslant 999$ 时，W 中必有对子，也就是说，$m=999$ 合乎条件. 其次，若 $|W|=998$ 且 W 不含有对子，则 W 恰含各 A_i、B_j、D_k 与 C 中的一个元素，令 $W=\{1025,1026,\cdots,2001\}\cup\{33,34,\cdots,46\}\cup\{17\}\cup\{9,10,11,12,13,14\}$，容易验证 W 中没有对子. 于是，当 $m<999$ 时，取 W 的一个 m 元子集，则该子集中没有对子.

综上所述，m 的最小值为 999.

例 7 设 n 是一个固定的正偶数，考虑一个 $n\times n$ 的正方形棋盘，如果两个方格至少有一条公共边，则称它们是相邻的.

现在，将棋盘上 N 个方格作上标记，使得棋盘上任何一个方格（作上标记的和未作上标记的）都与至少一个作上标记的方格相邻.

试确定 N 的最小值.（第 40 届 IMO 试题）

解 将 $n\times n$ 棋盘按如下方式染色：如果 n 不被 4 整除，则按图 7-1 染色，

否则按图 7-2 染色. 考虑所有黑色方格，若 $n=4k$，按图 7-2 染色后，共有 $4\times 3+4\times 7+\cdots+4\times(4k-1)=2k(4k+2)$ 个黑色方格；若 $n=4k+2$，按图 7-1 染色后，共有 $4\times 1+4\times 5+\cdots+4\times(4k+1)=2(k+1)(4k+2)$ 个黑色方格. 不论哪种情形，黑色方格都是 $\frac{1}{2}n(n+2)$ 个，而其中任意三个都不能与同一个方格相邻. 而由条件，它们中任意一个应与某个作了标记的方格相邻，于是 $N\geqslant\frac{1}{4}n(n+2)$.

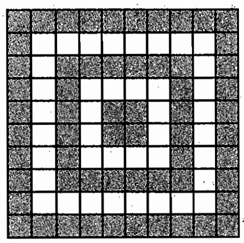


图 7-1

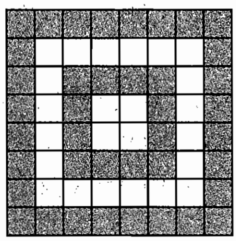


图 7-2

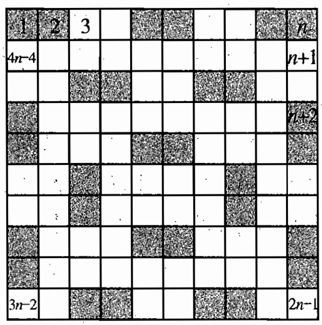


图 7-3

另一方面，我们证明，可适当标记 $N=\frac{1}{4}n(n+2)$ 个格，使之合乎题目要求. 事实上，如图 7-3，我们将棋盘的“第一层边框”的 $4(n-1)$ 个方格从左上角开始，按顺时针方向依次编号为 $1,\ 2,\ \cdots,\ 4n-4$，将编号被 4 除余 1、2 的方格作标记(图 7-3 中阴影部分).

去掉棋盘的外围两层边框，对剩下的棋盘仍从左上角开始，沿顺时针方向进行类似编号，又将编号被 4 除余 1、2 的方格作上标记，如此下去，直到此步骤不能再进行为止. 这样，我们恰对一半的黑色方格作了标记，故共有 $\frac{1}{4}n(n+2)$ 个方格作了标记. 下面证明这种标记方法符合要求.

事实上，由图 7-3 不难看出任意两个标记方格不会有一个公共的“邻格”，假设这些标记的方格为 $A_1,\ \cdots,\ A_N$，其中 $N=\frac{1}{4}n(n+2)$，与 A_i 相邻的方格集合为 M_i，则 $M_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 两两不交. 且对位于棋盘角上的格 A_i，$|M_i|=2$(共有 2 个这样的格)；对位于棋盘边上的格 A_i，$|M_i|=3$ (共有 $2n-4$ 个这样的格)；对位于非棋盘边界上的格 A_i，$|M_i|=4$ (共有 $\frac{n^2-6n+8}{4}$ 个这样的格). 于是 $|M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_N|=\frac{n^2-6n+8}{4}\times$

$4+(2n-4)\times 3+2\times 2=n^2$，故 $M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_N$ 包含了所有的方格，即每个方格都与某一个标记方格相邻.

综上所述，$N_{\min}=\dfrac{1}{4}n(n+2)$.

例 8 在 xOy 平面上有 2002 个点，它们组成一个点集 S，已知 S 中任意两点的连线都不与坐标轴平行. 对 S 中的任意两个点 P、Q，考虑以 PQ 为对角线，其边平行于坐标轴的矩形 M_{PQ}，用 W_{PQ} 表示 S 在矩形 M_{PQ} 内(不含 P、Q)的点的个数.

当命题："S 中的点无论在坐标平面上如何分布，在 S 中至少有一对点 P、Q，满足 $W_{PQ}\geqslant N$"为真时，求 N 的最大值.(2002 年日本数学奥林匹克第二轮试题)

解 $N_{\max}=400$. 先证明必有 P、Q 使得 $W_{PQ}\geqslant 400$. 事实上，设 A 是 S 中纵坐标最大的点，B 是 S 中纵坐标最小的点，C 是 S 中横坐标最大的点，D 是 S 中横坐标最小的点. 如果 A、B、C、D 中有两点重合，结论显然成立(此时不妨设 $A=C$，则 M_{AB}、M_{BD}、M_{AD} 覆盖了 S，从而 $\max\{W_{AB},W_{BD},W_{AD}\}\geqslant\dfrac{2002-3}{3}>400$). 如果 A、B、C、D 两两不重合，则它们的分布如图 7-4 所示.

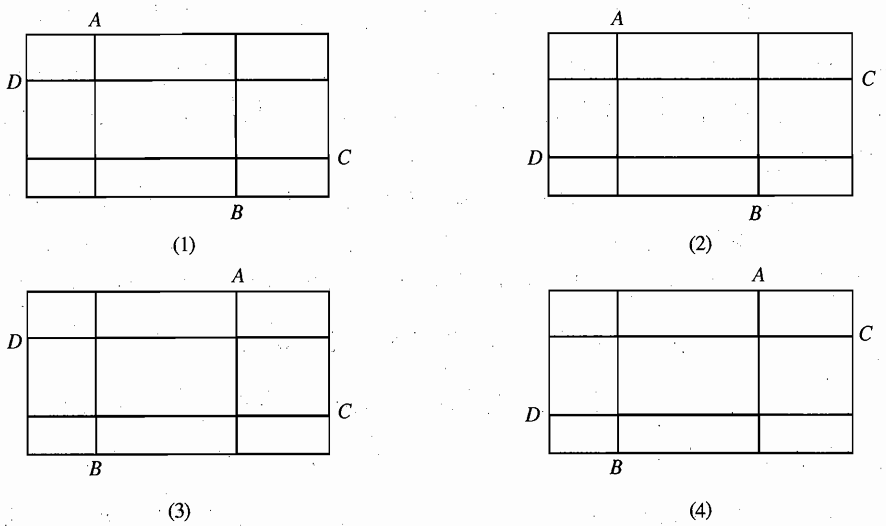


图 7-4

对于情形(1)(4)，M_{AC}、M_{BC}、M_{AD}、M_{BD} 覆盖了 S，从而 $\max\{W_{AC},W_{BD},W_{AD},W_{BC}\}\geqslant\dfrac{2002-4}{4}>400$.

对于情形(2)(3)，M_{AC}、M_{BC}、M_{AD}、M_{BD}、M_{AB}覆盖了S，从而$\max\{W_{AC}, W_{BD}, W_{AD}, W_{BC}, W_{AB}\} \geqslant \frac{2002-4}{5} > 399$，从而$\max\{W_{AC}, W_{BD}, W_{AD}, W_{BC}, W_{AB}\} \geqslant 400$. 于是必有$P$、$Q$使得$W_{PQ} \geqslant 400$.

下面证明存在这样的S，使得对所有P、$Q \in S$都有$W_{PQ} \leqslant 400$. 事实上，如图7-5所示，将S中的2002个点分成5组E、F、G、H、I，其中H、F中各有401个点，而E、I、G中各有400个点，每组中的点都位于相应方格的对角线上. 显然，对任何一个矩形M_{PQ}(P、$Q \in S$)，它至多含有一个组中的点. 如果它包含的点属于组I，则$W_{PQ} \leqslant 400$. 如果矩形M_{PQ}包含了I外的其他组中的点，则点P、Q中至少有一个属于这个组，于是$W_{PQ} \leqslant 401-1=400$.

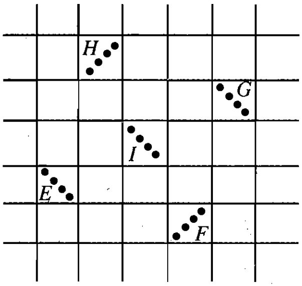


图7-5

综上所述，$N_{\max}=400$.

例9　在7×8的方格棋盘中，每个方格都放有一只棋. 如果两只棋所在的方格有公共顶点，则称这两只棋是相连的. 现在从这些棋中取出r只棋，使剩下的棋中没有5只棋在一条直线(横、竖、斜45°或135°方向)上依次相连，求r的最小值.(2007年全国高中数学联赛试题)

解　我们称去掉棋的方格为“空”，并设棋盘中共有k个空.

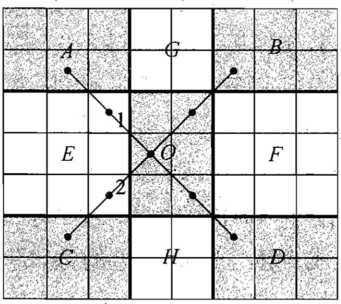


图7-6

如图7-6，用4条直线将棋盘划分为A、B、C、D、E、F、G、H、O共9个区域.

由条件，$A\cup G$中至少2个空，$E\cup O$中至少3个空，$C\cup H$中至少2个空，$D\cup F$中至少3个空，从而$k \geqslant 2+3+2+3=10$.

如果$k=10$，则区域D中没有空，由对称性，区域A、B、C、D中都没有空. 进而，因为$A\cup G$中至少2个空，而A中没有空，从而G中至少2个空，同理，H中至少2个空，因为$A\cup E$中至少3个空，而A中没有空，从而E中至少3个空，同理，F中至少3个空，于是，E、F、G、H中共至少10个空，又棋盘中恰有10个空，从而E、F中各有3个空，G、H中各有2个空，区域O中没有空.

因为$A\cup E$中每列至少1个空，而A中没有空，从而E中每列至少1个空. 又E中只有3个空，所以E中每列恰有1个空，于是格1、2中至少有一个

1					6		
			5				
	2					9	
				8			
		3					11
7					10		
			4				

图 7－7

不是空，于是，图中 2 条直线中有一条是 5 子相连，矛盾，所以 $k \geqslant 11$.

当 $k=11$ 时，如图 7－7（比“评分标准”中的构造更自然），我们采用“马步”布子，则棋盘中没有同一直线上的 5 子相连.

综上所述，$k_{\min}=11$.

例 10　设集合 $S=\{1, 2, \cdots, 50\}$，X 是 S 的任意子集，$|X|=n$. 求最小正整数 n，使得集合 X 中必有三个数为直角三角形的三条边长.

解　设直角三角形三边长分别为 x，y，z，有 $x^2+y^2=z^2$，其正整数解可表示为

$$x=k(a^2-b^2),\ y=2kab,\ z=k(a^2+b^2), \qquad ①$$

其中 $k, a, b \in \mathbf{N}^*$ 且 $(a, b)=1$，$a>b$.

首先，x，y，z 中必有一个为 5 的倍数. 否则，若 a，b，c 均不是 5 的倍数，则 a，b，c 都是形如 $5m \pm 1$，$5m \pm 2$ 的数（$m \in \mathbf{N}$），则 $a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$，$b^2 \equiv \pm \pmod 5$，$c^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$，而 $c^2=a^2+b^2 \equiv 0$ 或 ± 2，矛盾！

令集 $A=\{S$ 中所有与 5 互质的数$\}$，则 $\operatorname{Card} A=40$. 若以 10，15，25，40，45 分别作直角三角形的某边长，则由 ① 知可 在 A 中找到相应的边构成如下直角三角形：(10, 8, 6)，(26, 24, 10)，(15, 12, 9)，(17, 15, 8)，(39, 36, 15)，(25, 24, 7)，(40, 32, 24)，(41, 40, 9)，(42, 27, 36)，此外，A 中再没有能与 10，15，25，40，45 构成直角三角形三边的数.

令 $M=A \cup \{10, 15, 25, 40, 45\} \backslash \{8, 9, 24, 36\}$，则 $\operatorname{Card} M=41$.

由以上知，A 中三数不能组成直角三角形，由于 M 中不含 8，9，24，36，所以 10，15，25，40，45 在 M 中找不到可搭配成直角三角形三边的数，即 M 中任三数均不构成直角三角形三边，故 $n \geqslant 42$.

另外，由①的整数解可作集合：$B=\{\underline{3, 4, 5}, \underline{17, 15, 8}, \underline{29, 21, 20}, \underline{25, 24, 7}, \underline{34, 16, 30}, \underline{37, 35, 12}, \underline{50, 48, 14}, \underline{41, 40, 9}, \underline{45, 36, 27}\}$，其中横线上三数可作直角三角形三边，$\operatorname{Card} B=27$.

$S \backslash B$ 中元素的个数为 $50-27=23$，在 S 中任取 42 个数，因 $42-23=19$，于是，取的 42 个数中必含有 B 中的 19 个数，因此 B 中至少有一条横线上的三个数在所选的 42 个数中，即任取 42 个数，其中至少有三数可作直角三角形三边，因此，n 的最小值为 42.

习 题 7

1 设 $X=\{1,2,3,\cdots,1993\}$，A 是 X 的子集，且满足：(1) 对 A 中任何两个数 $x\neq y$，有 93 不整除 $x\pm y$. (2) $S(A)=1993$. 求 $|A|$ 的最大值.

2 设 $X=\{1,2,3,\cdots,10\}$，A 是 X 的子集，且对任何 $x<y<z$，x，y，$z\in A$，都存在一个三角形三边的长分别为 x、y、z. 求 $|A|$ 的最大值.

3 设 $X=\{1,2,3,\cdots,20\}$，A 是 X 的子集，且对任何 $x<y<z$，x，y，$z\in A$，都存在一个三角形三边的长分别为 x、y、z. 求 $|A|$ 的最大值.

4 设 $X=\{00,01,\cdots,98,99\}$ 是 100 个二位数码的集合，A 是 X 的子集，满足：对任何一个由 0 到 9 中的数字构成的无穷序列中，都有两个相邻的数字组成的二位数码属于 A，求 $|A|$ 的最小值.（第 52 届莫斯科数学奥林匹克试题）

5 在 1，2，…，20 中最多能选出多少个数，使其中任何一个选出来的数都不是另一个选出来的数的 2 倍. 并问：这样的取数方法有多少种？

6 自然数 k 满足如下性质：在 1，2，…，1988 中，可取出 k 个不同的数，使其中任何两个数的和不被这两个数的差整除. 求 k 的最大值.（第 26 届莫斯科数学竞赛题）

7 在集合 $X=\{1,2,\cdots,50\}$ 的子集 S 中，任何两个元素的平方和不是 7 的倍数，求 $|S|$ 的最大值.

8 设 $X=\{1,2,\cdots,1995\}$，A 是 X 的子集，当 $x\in A$ 时，$19x\notin A$，求 $|A|$ 的最大值.

8 猜想与反证

有些具有某种性质 p 的集合是很容易构造的，常常只要把一类具有某种性质的元素构成一个集合(类聚法)即可. 这时，可先直接构造具有某种性质 p 的集合，然后猜想得到的集合是“最大”的. 证明猜想的一种有效的方法是反面估计.

假定集合 A 是具有某种性质 p 的集合，我们期望证明 $|A|\leqslant r$. 反设有 $|A|>r$，则 A 中必存在某些特殊元素破坏集合 A 的性质 p. 对此，抽屉原理是常用的工具.

例1 如果一个集合不包含满足 $x+y=z$ 的三个数 x、y、z，则称之为单纯的. 设 $M=\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$，A 是 M 的单纯子集，求 $|A|$ 的最大值. (1982年西德数学奥林匹克试题)

分析 考虑到奇数＋奇数≠奇数，于是很容易发现 $A=\{1, 3, 5, \cdots, 2n+1\}$ 是合乎要求的集合，此时 $|A|=n+1$. 我们猜想 $|A|$ 的最大值为 $n+1$. 这就要证明：若 $|A|\geqslant n+2$，则 A 中必存在3个数 x、y、z，使 $x+y=z$. 注意到 $x+y=z$，等价于 $x=z-y$，由此想到以 A 中的元素作差构造“新元素”以利用抽屉原理.

解 取 $A=\{1, 3, 5, \cdots, 2n+1\}$，则 A 是单纯的，此时 $|A|=n+1$. 下面证明：对任何单纯子集 A，有 $|A|\leqslant n+1$. 用反证法. 假设 $|A|>n+1$，则 A 中至少有 $n+2$ 个元素，设为：$a_1<a_2<\cdots<a_{n+2}$.

方法1：设 A 中有 p 个奇数 $a_1<a_2<\cdots<a_p$ 和 $n+2-p$ 个偶数 $b_1<b_2<\cdots<b_{n+2-p}$. 注意到 M 中共有 $n+1$ 个奇数，n 个偶数，所以 $p\geqslant 2$.

考察：$a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_p-a_1$. 它们都是正偶数，连同 $b_1<b_2<\cdots<b_{n+2-p}$，共有 $(p-1)+(n+2-p)=n+1>n$ 个正偶数. 由抽屉原理，必有两个元素相等，且只能是某个 b_i 与某个 a_j-a_1 相等，于是 $a_1+b_i=a_j$，所以 A 不是单纯的，矛盾.

方法2：考察 $2n+2$ 个元素：$a_2<a_3<\cdots<a_{n+2}$ 和 $a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_{n+2}-a_1$，它们都是不大于 $2n+1$ 的正整数，所以必有两个元素相

等：设为 $a_i - a_1 = a_j$. 所以 A 不是单纯的，矛盾.

方法 3：考察 $2n+3$ 个元素：$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n+2}$ 和 $a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \cdots < a_{n+2} - a_1$，它们都是不大于 $2n+1$ 的正整数，注意到 $2n+3-(2n+1)=2$，所以必有两组元素对应相等：$a_i - a_1 = a_j$，$a_s - a_1 = a_t$，而 a_j、a_t 中至少有一个不为 a_1，从而 A 不是单纯的，矛盾.

综上所述，$|A|$ 的最大值为 $n+1$.

例 2　设 $X=\{1, 2, \cdots, 100\}$，A 是 X 的子集，若对 A 中任何两个元素 x、y $(x<y)$，都有 $y \neq 3x$，求 $|A|$ 的最大值.

分析　我们先构造合乎条件的集合 A. 要使 $y \neq 3x$，一个充分条件是 A 中没有 3 的倍数，于是，所有不是 3 的倍数的数都可属于 A. 进一步发现，A 中还可含有若干"3 的倍数"，这些"3 的倍数"要满足 2 个条件：一是它不是前述那些数的 3 倍，这只须它除以 3 以后仍是 3 的倍数，也即它是 9 的倍数；二是这些数之间不存在 3 倍关系，由此可选取 9、18、36、45、63、72、81、90、99 属于 A，此时 $|A|=76$. 至此，可猜想 $|A|$ 的最大值是 76.

解　令 $A=\{3k+1 \mid k=0, 1, 2, \cdots, 33\} \cup \{3k+2 \mid k=0, 1, 2, \cdots, 32\} \cup \{9, 18, 36, 45, 63, 72, 81, 90, 99\}$，则 A 显然合乎条件，此时 $|A|=76$.

另一方面，考察 24 个集合 $A_k=\{k, 3k\}$ $(k=1, 2, 12, 13, \cdots, 33)$，它们含有 48 个互异的数，去掉这些数外，$X$ 中还有 52 个数，将这 52 个数中的每一个数都作成一个单元素集合，连同前面 24 个集合共 $52+24=76$ 个集合. 若 $|A|>76$，则 A 必含有某个集合 A_k 中的 2 个数，其中较大的数是其较小的数的 3 倍，矛盾.

综上所述，$|A|$ 的最大值是 76.

例 3　对于数集 M，定义 M 的和为 M 中各数的和，记为 $S(M)$. 设 M 是若干个不大于 15 的正整数组成的集合，且 M 的任何两个不相交的子集有不同的和，求 $S(M)$ 的最大值.

分析　由条件，很易构造使 $S(M)$ 最大的集合 M：首先选取 15、14、13，则不取 12，再选取 11，则不取 10 和 9. 最后选取 8，剩下的数都不能取，得到集合 $M=\{15, 14, 13, 11, 8\}$，此时，$|M|=5$，$S(M)=61$. 由此，我们猜想 $S(M) \leqslant 61$. 为证明猜想，直觉告诉我们 M 不能太大，因而可进一步猜想：$|M| \leqslant 5$. 对此，可采用反证法并运用抽屉原理.

解　取 $M=\{15, 14, 13, 11, 8\}$，此时，$S(M)=61$. 下面证明：对任何合乎题意的集合 M，有 $S(M) \leqslant 61$. 为此，我们先证明：$|M| \leqslant 5$. ①

用反证法，假设 $|M| \geqslant 6$，考察 M 的元素个数不多于 4 的所有子集 A，则

$S(A) \leqslant 15+14+13+12=54$，而这样的子集 A 的个数为 $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$，从而必有两个子集 A、B，使 $S(A)=S(B)$. 令 $A'=A\backslash(A\cap B)$，$B'=B\backslash(A\cap B)$，则 A'、B' 不相交，且 $S(A')=S(B')$，与题设条件矛盾. 所以 $|M| \leqslant 5$.

考察任意一个合乎条件的 M.

(1) 若 $15 \notin M$，则由 ①，有 $S(M) \leqslant 14+13+12+11+10=60$；

(2) 若 $14 \notin M$，则由 ①，有 $S(M) \leqslant 15+13+12+11+10=61$；

(3) 若 $13 \notin M$，则注意到 $15+11=14+12$，有 $M \neq \{15, 14, 12, 11, 10\}$，所以，由 ① 有，$S(M)<15+14+12+11+10=62$；

(4) 若 $15, 14, 13 \in M$，则 $12 \notin M$.

(i) 若 $11 \in M$，则 $10, 9 \notin M$. 则由 ①，$S(M) \leqslant 15+14+13+11+8=61$；

(ii) 若 $11 \notin M$. 则由 ①，$S(M) \leqslant 15+14+13+10+9=61$.

综上所述，有 $S(M) \leqslant 61$. 故 $S(M)$ 的最大值为 61.

例 4　已知在一次数学竞赛中，竞赛题的数目为 $n\ (n \geqslant 4)$，每道题恰有 4 个人解出，对于任意两道题，都恰有一人同时解出这两道题.

若参赛人数不少于 $4n$，求 n 的最小值，使得总存在一个人解出全部竞赛题.（第 15 届韩国数学奥林匹克试题）

分析与解　首先，当 $4 \leqslant n \leqslant 13$ 时，都可以构造反例. 事实上，因为参赛人数 $\geqslant 4n \geqslant 16$，考虑以下 13 个集合：$M_1=\{1, 2, 3, 4\}$、$M_2=\{1, 5, 6, 7\}$、$M_3=\{1, 8, 9, 10\}$、$M_4=\{1, 11, 12, 13\}$、$M_5=\{2, 5, 8, 11\}$、$M_6=\{2, 6, 9, 12\}$、$M_7=\{2, 7, 10, 13\}$、$M_8=\{3, 5, 9, 13\}$、$M_9=\{3, 6, 10, 11\}$、$M_{10}=\{3, 7, 8, 12\}$、$M_{11}=\{4, 5, 10, 12\}$、$M_{12}=\{4, 7, 9, 11\}$、$M_{13}=\{4, 6, 8, 13\}$. 对 $4 \leqslant n \leqslant 13$，取其中 n 个集合 $M_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，容易验证 $|M_i|=4$，且 $|M_i \cap M_j|=1$，但 $M_1, \cdots, M_n$ 无公共元，不合题意. 由此猜想 $n_{\min}=14$.

下面只需证明：$n=14$ 满足要求. 事实上，设做出第 i 道题的人的编号的集合为 M_i，则对任意 $1 \leqslant i \leqslant 14$ 都有 $|M_i|=4$，且 $|M_i \cap M_j|=1$. 设 $M_1=\{a, b, c, d\}$，由于剩下的 13 个集合中每一个至少含 a、b、c、d 中的一个元素，故至少有一个，比如 a，在这 13 个集合中出现至少 4 次. 不妨设 M_2、M_3、M_4、M_5 都含有 a，我们证明一切 M_i 都含有 a.

用反证法. 假定存在 $t\ (6 \leqslant t \leqslant 14)$，使 M_t 不含 a，但 M_t 与 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 各有一个公共元，设 M_t 与 $M_k\ (1 \leqslant k \leqslant 5)$ 的公共元为 $a_k\ (1 \leqslant k \leqslant 5)$，则 $a_k \neq a$. 如果存在 i、$j\ (1 \leqslant i<j \leqslant 5)$，使 $a_i=a_j$，则 a、a_i 都属于

$M_i \cap M_j$，与 $|M_i \cap M_j|=1$ 矛盾. 于是 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 互不相同，但它们都属于 M_t，故 $|M_t| \geqslant 5$，矛盾. 故一切 M_t 都含有 a，从而第 a 个人做出所有题，结论成立.

故 $n_{\min}=14$.

例 5 有 18 支球队进行单循环赛，即每轮将 18 支球队分成 9 组，每组的 2 个队比赛一场. 下一轮重新分组比赛，共赛 17 轮，使得每队都与另 17 支队各赛一场. 按任意可行的程序比赛了 n 轮以后，总存在 4 支球队，他们之间总共只赛了 1 场. 求 n 的最大可能值.（2002 年中国数学奥林匹克试题）

解 考察如下的比赛程序：

1. (1，2) (3，4) (5，6) (7，8) (9，18) (10，11) (12，13) (14，15) (16，17)；

2. (1，3) (2，4) (5，7) (6，9) (8，17) (10，12) (11，13) (14，16) (15，18)；

3. (1，4) (2，5) (3，6) (8，9) (7，16) (10，13) (11，14) (12，15) (17，18)；

4. (1，5) (2，7) (3，8) (4，9) (6，15) (10，14) (11，16) (12，17) (13，18)；

5. (1，6) (2，8) (3，9) (4，7) (5，14) (10，15) (11，17) (12，18) (13，16)；

6. (1，7) (2，9) (3，5) (6，8) (4，13) (10，16) (11，18) (12，14) (15，17)；

7. (1，8) (2，6) (4，5) (7，9) (3，12) (10，17) (11，15) (13，14) (16，18)；

8. (1，9) (3，7) (4，6) (5，8) (2，11) (10，18) (12，16) (13，15) (14，17)；

9. (1，10) (2，3) (4，8) (5，9) (6，7) (11，12) (13，17) (14，18) (15，16)；

10. (1，11) (2，12) (3，13) (4，14) (5，15) (6，16) (7，17) (8，18) (9，10)；

11. (1，12) (2，13) (3，14) (4，15) (5，16) (6，17) (7，18) (8，10) (9，11)；

12. (1，13) (2，14) (3，15) (4，16) (5，17) (6，18) (7，10) (8，11) (9，12)；

…

17. (1, 18) (2, 10) (3, 11) (4, 12) (5, 13) (6, 14) (7, 15) (8, 16) (9, 17).

将前 9 队称为 A 组，后 9 队称为 B 组，易见 9 轮之后，凡同组两队均已赛过. 所以，任何 4 队之间至少已赛过 2 场，不满足题目要求. 如果把上述程序颠倒过来，然后按照新序比赛，则 8 轮过后，同组任何 2 队均未赛过，每个队都是与另一组中 9 支队中的 8 个队各赛一场，这时同组 4 支队之间一场未赛，而不全同组的 4 支队之间至少已赛 2 场，不满足题目要求. 于是 $n \leqslant 7$. 当 $n = 7$ 时，反设任何 4 队都不满足题目要求，选取已赛过的 2 队 A_1、A_2，则每队都与另外 6 队比赛过，2 个队至多与另外 12 支队赛过，于是至少存在 4 个队 B_1、B_2、B_3、B_4，它们与 A_1、A_2 两队均未赛过. 考察 4 个队 A_1、A_2、B_i、B_j $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$，依假设，它们之间至少赛过 2 场，于是对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant 4$，$B_i$ 与 B_j 赛过. 由于 B_1、B_2 在 $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ 中各赛了 3 场，所以 B_1、B_2 与其他 14 支队中的 4 支队各赛 1 场，于是至少存在 6 支队 C_1、C_2、C_3、C_4、C_5、C_6，它们与 B_1、B_2 两队均未赛过. 同理，对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant 6$，$C_i$ 与 C_j 赛过. 由于 C_1、C_2 在 $\{C_1, C_2, \cdots, C_6\}$ 中各赛了 5 场，所以 C_1、C_2 与其他 12 支队中的 2 支队各赛 1 场，于是至少存在 8 支队 $D_1, D_2, \cdots, D_8$，它们与 C_1、C_2 两队均未赛过. 同理，对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant 8$，$D_i$ 与 D_j 赛过. 这样，D_1、D_2 与另外 10 支队均未赛过，由于只赛了 7 轮，另外 10 支队中至少有 2 支队 E_1、E_2 尚未赛过，从而 D_1、D_2、E_1、E_2 之间只赛了 1 场，与假设矛盾. 综上所述，n 的最大可能值是 7.

例 6 求出同时满足下列条件的集合 S 的元素个数的最大值：

(1) S 中的每个元素都是不超过 100 的正整数；

(2) 对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的元素 c，使得 a 与 c 的最大公约数等于 1，并且 b 与 c 的最大公约数也等于 1；

(3) 对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的异于 a、b 的元素 d，使得 a 与 d 的最大公约数大于 1，并且 b 与 d 的最大公约数也大于 1.(2003 年中国数学奥林匹克试题)

分析与解 将不超过 100 的正整数 n 表示为 $n = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}7^{\alpha_4}11^{\alpha_5} \cdot m$，其中 m 是不被 2、3、5、7、11 整除的正整数，α_1、α_2、α_3、α_4、α_5 为自然数. 从中选取那些使 α_1、α_2、α_3、α_4、α_5 中恰有 1 个或 2 个非零的正整数构成集合 S，即 S 包括：50 个偶数 $2, 4, \cdots, 100$ 但除去 $2\times3\times5$、$2^2\times3\times5$、$2\times3^2\times5$、$2\times3\times7$、$2^2\times3\times7$、$2\times5\times7$、$2\times3\times11$ 这 7 个数；3 的奇数倍 $3\times1, 3\times3, \cdots, 3\times33$ 共 17 个数；最小素因子为 5 的数 5×1、5×5、5×7、5×11、5×13、5×17、5×19 共 7 个数；最小素因子为 7 的数 7×1、7×7、7×11、7×13 共 4 个数；以及素数 11，显然 $|S| = (50-7)+17+7+4+1 = 72$. 我们证明这

样构造的 S 合乎条件.

条件(1)显然满足.

考察条件(2)，对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，$[a, b]$ 的素因子中至多出现 2、3、5、7、11 中的 4 个数. 设其中未出现的为 p，则 $p \in S$，且 $(p, a) \leqslant (p, [a, b]) = 1$，$(p, b) \leqslant (p, [a, b]) = 1$，于是取 $c = p$ 即可.

考察条件(3)，当 $(a, b) = 1$ 时，取 a 的最小素因子 p 和 b 的最小素因子 q. 显然 $p \neq q$，且 $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$，于是 $pq \in S$，且 $(pq, a) \geqslant p > 1$，$(pq, b) \geqslant q > 1$. 又 a、b 互质保证了 pq 异于 a、b，从而取 $c = pq$ 即可. 当 $(a, b) = e > 1$ 时，取 e 的最小素因子 p 和不整除 $[a, b]$ 的最小素数 q. 显然 $p \neq q$，且 $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$，于是 $pq \in S$，且 $(pq, a) \geqslant (p, a) = p > 1$，$(pq, b) \geqslant (p, b) = p > 1$. 又 q 不整除 $[a, b]$ 保证了 pq 异于 a、b，从而取 $d = pq$ 即可.

下面证明，对任何满足条件的集合 S，有 $|S| \leqslant 72$.

显然，$1 \notin S$；对于任意两个大于 10 的质数 p、q，因为与 p、q 都不互质的数最小是 pq，而 $pq > 100$，所以根据条件(3)，在 $[10, 100]$ 中的 21 个质数 11，13，…，89，97 最多有一个在 S 中. 记除 1 与这 21 个质数外的其余 78 个不超过 100 的正整数的集合为 T，我们证明 T 中至少有 7 个数不在 S 中，从而 $|S| \leqslant 78 - 7 + 1 = 72$.

实际上，当有某个大于 10 的质数 $p \in S$ 时，S 中各数的最小素因子只可能是 2、3、5、7 和 p. 结合条件(2)，知：(i) 若 $7p \in S$，因 $2 \times 3 \times 5$、$2^2 \times 3 \times 5$、$2 \times 3^2 \times 5$ 与 $7p$ 包括了所有的最小素因子，所以由条件(2)，$2 \times 3 \times 5$、$2^2 \times 3 \times 5$、$2 \times 3^2 \times 5 \notin S$. 若 $7p \notin S$，而 $2 \times 7p > 100$，且 $p \in S$，所以由条件(3)知，7×1、7×7、7×11、$7 \times 13 \notin S$. (ii) 若 $5p \in S$，则 $2 \times 3 \times 7$、$2^2 \times 3 \times 7 \notin S$. 若 $5p \notin S$，则 5×1、$5 \times 5 \notin S$. (iii) $2 \times 5 \times 7$ 与 $3p$ 不同属于 S. (iv) $2 \times 3p$ 与 5×7 不同属于 S. (v) 若 $5p$、$7p \notin S$，则 $5 \times 7 \notin S$. 于是，当 $p = 11$ 或 13 时，由(i)、(ii)、(iii)、(iv) 可分别得出至少有 3、2、1、1 个 T 中的数不属于 S，合计有 7 个. 当 $p = 17$ 或 19 时，由(i)、(ii)、(iii) 可分别得出至少有 4、2、1 个 T 中的数不属于 S，合计有 7 个. 当 $p > 20$ 时，由(i)、(ii)、(iii) 可分别得出至少有 4、2、1 个 T 中的数不属于 S，合计有 7 个. 所以结论成立.

当大于 10 的质数 p 都不属于 S 时，S 中各数的最小素因子只可能是 2、3、5、7. 此时，7 个 2 元集合 $\{3, 2 \times 5 \times 7\}$、$\{5, 2 \times 3 \times 7\}$、$\{7, 2 \times 3 \times 5\}$、$\{2 \times 3, 5 \times 7\}$、$\{2 \times 5, 3 \times 7\}$、$\{2 \times 7, 3 \times 5\}$、$\{2^2 \times 7, 3^2 \times 5\}$ 中的任何一个都至少有一个数不在 S 中，结论成立.

综上所述，$|S|_{\max} = 72$.

例 7　设 a_i、b_i($i=1, 2, \cdots, n$)是有理数，使得对任意的实数 x 都有 $x^2+x+4=\sum_{i=1}^{n}(a_i x+b_i)^2$，求 n 的最小可能值.(2006 年国家集训队试题)

解　容易发现 $n=5$ 是可以的，实际上 $x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

由此可猜想 n 的最小可能值为 5，这只需证明 $n\neq 4$.

用反证法，假设 $x^2+x+4=\sum_{i=1}^{4}(a_i x+b_i)^2$，$a_i$，$b_i\in\mathbf{Q}$，则 $\sum_{i=1}^{4}a_i^2=1$，$\sum_{i=1}^{4}a_ib_i=\frac{1}{2}$，$\sum_{i=1}^{4}b_i^2=4$.

$$\begin{aligned}\text{于是，}\frac{15}{4}&=\left(\sum_{i=1}^{4}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{4}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{4}a_ib_i\right)^2\\&=(-a_1b_2+a_2b_1-a_3b_4+a_4b_3)^2+(-a_1b_3+a_3b_1-\\&\quad a_4b_2+a_2b_4)^2+(-a_1b_4+a_4b_1-a_2b_3+a_3b_2)^2.\end{aligned}$$

上式两边乘以 4，表明方程 $a^2+b^2+c^2=15d^2\equiv -d^2 \pmod 8$ 有解.

不妨设 a、b、c、d 中至少有一个奇数(否则方程两边约去公因数)，但 a^2，b^2，c^2，$d^2\equiv 0, 1, 4 \pmod 8$，所以上式无解，矛盾.

另解：$n=5$ 时，有 $x^2+x+4=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2+(1)^2$.

下证 $n\neq 4$.

如果 $x^2+x+4=\sum_{i=1}^{4}(a_i x+b_i)^2$，我们可以设 $a_i=\frac{x_i}{2m}$，$b_i=\frac{y_i}{k}$ ($mk\neq 0$，m、k、x_i、$y_i\in\mathbf{Z}$)，则比较系数可以得到

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4m^2, & ①\\ y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=4n^2, & ②\\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4=mn. & ③\end{cases}$$

不妨设(m、k、x_i、y_i)是满足①②③的使 $|mk|$ 非 0 且最小的一组. 由①知 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\equiv 0 \pmod 4$，由 $x^2\equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$ 知诸 x_i 同奇偶，同理诸 y_i 也同奇偶.

因此 x_iy_i($i=1$、2、3、4) 同奇偶，由 ③ 知 mn 为偶，不妨设 m 为偶，则由 ① 知 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\equiv 0 \pmod 8$.

若诸 x_i 同为奇，则 $x_i^2\equiv 1 \pmod 8$，故 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\equiv 0 \pmod 8$，矛盾.

因此诸 x_i 同偶，故 $\left(\frac{m}{2}、k、\frac{x_i}{2}、y_i\right)$ 是满足①②③的使 $|mk|$ 非0且更小的一组解，矛盾.

例 8 若一个集合含有偶数个元素，则称之为偶集. 设 $M=\{1, 2, \cdots, 2011\}$，如果存在 M 的 k 个偶子集：$A_1, A_2, \cdots, A_k$，使对任何 $1\leqslant i<j\leqslant k$，都有 $A_i\cap A_j$ 不是偶集，求 k 的最大值.（原创题）

解 首先，容易发现 $k=2010$ 合乎条件. 实际上，令 $A_i=\{i, 2011\}(i=1, 2, \cdots, 2010)$，则使对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 2010$，都有 $A_i\cap A_j=\{2011\}$ 不是偶集，所以 $k=2010$ 合乎条件.

由此可猜想 $k\leqslant 2010$，用反证法. 假设 $k\geqslant 2011$，则存在 M 的 2011 个偶子集：$A_1, A_2, \cdots, A_{2011}$，使对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 2011$，都有 $A_i\cap A_j$ 不是偶集.

对 $A\subseteq M$，定义 $\overrightarrow{\alpha_A}=\{a_1, a_2, \cdots, a_{2011}\}$，其中 $a_j=\begin{cases}1, 当 j\in A,\\ 0, 当 j\notin A,\end{cases}$ 那么，当且仅当 $\overrightarrow{\alpha_{A_i}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_j}}$ 为偶数时，$A_i\cap A_j$ 是偶集，于是，对任何 $i\neq j$，有

$$\overrightarrow{\alpha_{A_i}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_j}}\equiv 1(\bmod 2) \qquad ①$$

对 $X\subseteq M$，定义 $\overrightarrow{S_X}=\sum_{x\in X}\overrightarrow{\alpha_{A_x}}$，我们先证明，对任何 $X\neq\Phi$，有 $\overrightarrow{S_X}\neq(0, 0, \cdots, 0)(\bmod 2)$.

实际上，反设 $\overrightarrow{S_X}\equiv(0, 0, \cdots, 0)$，一方面，取 $u\in X$，有

$$0\equiv\overrightarrow{S_X}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}=\left(\sum_{x\in X}\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\right)\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}=\sum_{x\in X}\left(\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}\right)=\overrightarrow{\alpha_{A_u}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}+\sum_{x\in X\setminus\{u\}}\left(\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}\right).$$

因为 A_u 是偶集，所以 $\overrightarrow{\alpha_{A_u}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}\equiv 0$，而 $x\neq u$ 时，由①，有 $\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}\equiv 1$. 所以 $0\equiv\overrightarrow{\alpha_{A_u}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}+\sum_{x\in X\setminus\{u\}}\left(\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_u}}\right)\equiv 0+\sum_{x\in X\setminus\{u\}}1=|X|-1(\bmod 2)$，即 $|X|$ 为奇数.

另一方面，注意到 $|M|=2011$ 为偶数，所以 $X\neq M$. 取 $v\notin X$，有

$$0\equiv\overrightarrow{S_X}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_v}}=\left(\sum_{x\in X}\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\right)\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_v}}=\sum_{x\in X}\left(\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_v}}\right).$$

因为 $v\notin X$，所以 $x\neq v$，从而由(*)，有 $\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_v}}\equiv 1$，所以

$$0\equiv\sum_{x\in X}\left(\overrightarrow{\alpha_{A_x}}\cdot\overrightarrow{\alpha_{A_v}}\right)\equiv\sum_{x\in X}1=|X|,$$

所以 $|X|$ 为偶数，矛盾.

所以，对任何 $X\neq\Phi$，有 $\overrightarrow{S_X}\neq(0, 0, \cdots, 0)(\bmod 2)$.

由此可见，对 $X\neq Y$，$\overrightarrow{S_X}\equiv\overrightarrow{S_Y}(\bmod 2)$（实际上，若 $\overrightarrow{S_X}\equiv\overrightarrow{S_Y}$，令 $T=(X\cup$

$Y)\backslash(X\cap Y)$，有$\overrightarrow{S_T}=\overrightarrow{S_X}+\overrightarrow{S_Y}-2\overrightarrow{S_{X\cap Y}}\equiv\overrightarrow{S_X}+\overrightarrow{S_Y}\equiv(0,0,\cdots,0)$，矛盾）.于是，当$X$取遍$M$的所有子集时，可得到模2意义下的$2^{2011}$个不同的向量$\overrightarrow{S_X}$.

但是，由于$\overrightarrow{S_X}=\sum\limits_{x\in X}\overrightarrow{\alpha_{A_x}}$，而$A_x$是偶集，所以$A_x$各分量的和为偶数，于是$\overrightarrow{S_X}$各分量的和为偶数，所以$\overrightarrow{S_X}$的第2011个分量的奇偶性由前2010个分量的和的奇偶性唯一确定，于是$\overrightarrow{S_X}$在模2意义下只有2^{2010}种取值，矛盾，所以$k\leqslant 2010$.

综上所述，k的最大值为2010.

注：显然，2011可换成任意的正偶数n，相应的k的最大值为$n-1$.

习 题 8

1 正整数n满足如下性质：在1，2，…，100中任取n个不同的奇数，必有两个的和为102.求n的最小值.

2 设$X=\{1,2,\cdots,1995\}$，A是X的子集，若对A中任何两个元素x、y $(x<y)$，都有$y\neq 15x$，求$|A|$的最大值.

3 设$X=\{0,1,2,\cdots,9\}$，$F=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$中的每个元素A_i都是X的非空子集，且对任何$1\leqslant i<j\leqslant k$，有$|A_i\cap A_j|\leqslant 2$，求$k$的最大值.（第26届IMO备选题）

4 设$A_i=\{i,i+1,i+2,\cdots,i+59\}$ $(i=1,2,\cdots,11)$，$A_{11+j}=\{11+j,12+j,\cdots,70,1,2,\cdots,j\}$ $(j=1,2,\cdots,59)$.在这70个集合中存在k个集合，其中任7个集合的交非空.求k的最大值.

5 设S为集合$\{1,2,\cdots,108\}$的一个非空子集，满足：(i) 对S中任意的数a、b，总存在S中数c，使得$(a,c)=(b,c)=1$；(ii) 对S中任意的数a、b，总存在S中数c'，使得$(a,c')>1$，$(b,c')>1$.求S中元素个数的最大可能值.（2004年中国数学集训队测试题）

6 求具有如下性质的最小正整数n：将正n边形的每一个顶点任意染上红，黄，蓝三种颜色之一，那么这n个顶点中一定存在四个同色点，它们是一个等腰梯形的顶点.（2008年中国数学奥林匹克试题）

9 整体估计

为了估计某个变量的变化范围，可将其放在若干个变量构成的整体中一起考虑，从整体上估计它们的取值范围，进而得到某变量的取值范围. 这种估计方法称为整体估计.

整体估计的一种特殊情况是估计平均数：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的平均数为 A，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个 A_i 不小于 A，也至少有一个 A_j 不大于 A.

平均数估计中的一个重要的工具是"集合元素关系表"：设 $X=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 X 的子集. 所谓"集合元素关系表"，是指由 n 行 k 列数构成的如下数表：

子集族 F / 元素	A_1 A_2 $\cdots$ A_k	
a_1	x_{11} x_{12} $\cdots$ x_{1k}	m_1 个 1
a_2	x_{21} x_{22} $\cdots$ x_{2k}	m_2 个 1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_n	x_{n1} x_{n2} $\cdots$ x_{nk}	m_n 个 1

其中 $a_i \in A_j$ 时，$x_{ij}=1$，否则，$x_{ij}=0$. 这样，第 i 行中 1 的个数就是元素 a_i 在各子集中出现的次数，称为 a_i 的度，记作 $d(a_i)$ 或 m_i，即 $m_i=\sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}$.

第 j 列中 1 的个数就是集合 A_j 中的元素的个数，即 $|A_j|=\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}$.

在集合元素关系表中，有两个常用的关系式：

(1) 考察各元素在 F 中出现的总次数，即表中 1 的个数 S，有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = S = \sum_{j=1}^{k} |A_j|.$$

(2) 考察各元素在集合对的交集中出现的总次数 T,有

$$\sum_{i=1}^{n} C_{m_i}^{2} = T = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} |A_i \cap A_j|.$$

例 1　求最大的正整数 A,使 1, 2, …, 100 的任何一个排列,都有 10 个连续的项的和不小于 A.(第 22 届波兰数学竞赛题)

分析　对 1, 2, …, 100 的一个排列,要找到一个不小于 A 的连续 10 个项的和比较困难,我们可将所有没有公共项的连续 10 项的和一并考虑,然后取其平均值进行估计.

解　设 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 是 1, 2, …, 100 的任意一个排列,令 $A_i = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+9}$ $(i = 1, 2, \cdots, 91)$,则 $A_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$, $A_{11} = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20}$, …, $A_{91} = a_{91} + a_{92} + \cdots + a_{100}$.

注意到 $A_1 + A_{11} + \cdots + A_{91} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 5050$,所以 A_1, A_{11}, …, A_{91} 的平均值为 505, 于是至少存在一个 i $(1 \leqslant i \leqslant 91)$,使 $A_i \geqslant 505$.

当 $A \geqslant 506$ 时,考察排列:(100, 1, 99, 2, 98, 3, 97, 4, …, 51, 50),其中各项满足: $a_{2i-1} = 101 - i$ $(i = 1, 2, \cdots, 50)$; $a_{2i} = i$ $(i = 1, 2, \cdots, 50)$. 所以 $a_{2i-1} + a_{2i} = 101$, $a_{2i} + a_{2i+1} = 100$. 此时,可证明对任何 i $(1 \leqslant i \leqslant 91)$,有 $A_i \leqslant 505 < A$.

实际上,当 i 为偶数时. 令 $i = 2k$,则

$$\begin{aligned} A_{2k} &= a_{2k} + a_{2k+1} + \cdots + a_{2k+9} \\ &= (a_{2k} + a_{2k+1}) + (a_{2k+2} + a_{2k+3}) + \cdots + (a_{2k+8} + a_{2k+9}) \\ &= 100 \times 5 = 500 < A. \end{aligned}$$

当 i 为奇数时. 令 $i=2k-1$,则

$$\begin{aligned} A_{2k-1} &= a_{2k-1} + a_{2k} + \cdots + a_{2k+8} \\ &= (a_{2k-1} + a_{2k}) + (a_{2k+1} + a_{2k+2}) + \cdots + (a_{2k+7} + a_{2k+8}) \\ &= 101 \times 5 = 505 < A. \end{aligned}$$

故 $A_{\max}=505$.

例 2　设 A_i $(i = 1, 2, \cdots, 30)$ 是 $M = \{1, 2, 3, \cdots, 1990\}$ 的子集, $|A_i| \geqslant 660$. 求证:存在 i、j $(1 \leqslant i < j \leqslant 30)$,使 $|A_i \cap A_j| \geqslant 200$.

证明　不妨设所有 $|A_i| = 660$. 否则,去掉 A_i 中的一些元素,得到 A'_i,若能证得 $|A'_i \cap A'_j| \geqslant 200$,则加入原先去掉的元素,显然有 $|A_i \cap A_j| \geqslant 200$.

考察集合元素关系表. 设第 i 行有 m_i 个 1，即 i 在 m_i 个集合中出现. 考察各元素在各子集中出现的总次数，即表中 1 的个数，有

$$\sum_{i=1}^{1990} m_i = S = \sum_{i=1}^{30} |A_i| = 30 \times 660.$$

再从整体上进行估计 $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 30} |A_i \cap A_j|$. 此即各元素在集合对的交集中出现的总次数，有 $\sum\limits_{i=1}^{1990} C_{m_i}^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 30} |A_i \cap A_j|$.

于是，由 Cauchy 不等式，得

$$\begin{aligned} 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 30} |A_i \cap A_j| &= 2\sum_{i=1}^{1990} C_{m_i}^2 = \sum_{i=1}^{1990} m_i^2 - \sum_{i=1}^{1990} m_i \\ &\geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{1990} m_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{1990} 1^2} - \sum_{i=1}^{1990} m_i \\ &= \frac{(30 \times 660)^2}{1990} - 30 \times 660, \end{aligned}$$

所以必有一个 $A_i \cap A_j$，使

$$\begin{aligned} |A_i \cap A_j| &\geqslant \frac{\frac{(30 \times 660)^2}{1990} - 30 \times 660}{2C_{30}^2} \\ &= \frac{(30 \times 660) \times (30 \times 660 - 1990)}{30 \times 29 \times 1990} \\ &> 200. \end{aligned}$$

例 3　有 10 人到书店买书，已知每人都买了三种书，任何两个人所买的书中都至少有一种相同. 问：买的人数最多的一种书最少有几人购买.（第 8 届中国数学奥林匹克试题）

解　设共卖出 n 种书，第 i 人买的书的集合为 $A_i (i = 1, 2, \cdots, 10)$. 构造集合元素关系表，设第 i 行有 m_i 个 1.

估计各元素出现的总次数，有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = S = \sum_{i=1}^{10} |A_i| = \sum_{i=1}^{10} 3 = 30.$$

再计算各元素在交集中出现的总次数，有

$$\sum_{i=1}^{n}C_{m_i}^{2}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 10}|A_i\cap A_j|.$$

设 m_i 中的最大者为 m，则

$$\begin{aligned}90=2C_{10}^{2}=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 10}1&\leqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 10}|A_i\cap A_j|\\&=2\sum_{i=1}^{n}C_{m_i}^{2}=\sum_{i=1}^{n}m_i^2-\sum_{i=1}^{n}m_i=\sum_{i=1}^{n}m_i^2-30\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}(m_i\cdot m)-30=m\sum_{i=1}^{n}m_i-30\\&=30(m-1).\end{aligned}\qquad ①$$

解此不等式，得 $m\geqslant 4$. 若 $m=4$，则不等式 ① 成立等号，于是所有 $m_i=4\ (i=1,2,\cdots,n)$. 这样有 $4n=\sum_{i=1}^{n}m_i=30$，所以 $4\mid 30$，矛盾. 于是 $m\geqslant 5$.

当 $m=5$ 时，由 m 的最大性，所有 $m_i\leqslant 5$，有 $30=\sum_{i=1}^{n}m_i\leqslant 5n$，$n\geqslant 6$. 我们取 $n=6$，得到合乎条件的构造如下表：

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1	*	*	*	*	*					
2	*	*				*	*	*		
3	*		*			*			*	*
4				*	*	*	*		*	
5			*	*			*	*		*
6		*			*			*	*	*

故 m 的最小值为 5.

例 4 一群童子军，年龄是 7 到 13 的整数，来自 11 个国家. 求证：至少有 5 个孩子，对其中的任何一个孩子，在童子军中与其同年龄的人多于同国籍的人.（加拿大国家集训队训练题）

证明 考虑加权的元素关系表：

	A_1	A_2	$\cdots$	A_{11}
7	$a_{7,1}$	$a_{7,2}$	$\cdots$	$a_{7,11}$
8	$a_{8,1}$	$a_{8,2}$	$\cdots$	$a_{8,11}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	$a_{13,1}$	$a_{13,2}$	$\cdots$	$a_{13,11}$

其中 A_j 是来自第 j 个国家的人的集合，a_{ij} 是第 j 国中年龄为 i 岁的人数. 令第 i 行的和为 r_i，第 j 列的和为 t_j，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=7}^{13}\sum_{j=1}^{11}a_{ij}\left(\frac{1}{t_j}-\frac{1}{r_i}\right)&=\sum_{i=7}^{13}\sum_{j=1}^{11}\frac{a_{ij}}{t_j}-\sum_{i=7}^{13}\sum_{j=1}^{11}\frac{a_{ij}}{r_i}\\&=\sum_{j=1}^{11}\frac{1}{t_j}\sum_{i=7}^{13}a_{ij}-\sum_{i=7}^{13}\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{11}a_{ij}\\&=\sum_{j=1}^{11}\left(\frac{1}{t_j}\cdot t_j\right)-\sum_{i=7}^{13}\left(\frac{1}{r_i}\cdot r_i\right)\\&=\sum_{j=1}^{11}1-\sum_{i=7}^{13}1=4.\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{t_j}-\frac{1}{r_i}<1$，将上式中 $a_{ij}\left(\frac{1}{t_j}-\frac{1}{r_i}\right)$ 看作是 a_{ij} 个"$\frac{1}{t_j}-\frac{1}{r_i}$"的和，那么，上式中至少有 5 个这样的 $\frac{1}{t_j}-\frac{1}{r_i}$ 为正，从而至少有 5 个孩子合乎要求.

例 5 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{7, 8, 9, \cdots, n\}$. 在 A 中取 3 个数，在 B 中取 2 个数，组成含有 5 个元素的集合 A_i $(i=1, 2, \cdots, 20)$，使得 $|A_i\cap A_j|\leqslant 2$，$1\leqslant i<j\leqslant 20$，求 n 的最小值. (2002 年 IMO 中国国家集训队选拔赛试题)

分析 本题实际上是求 $|B|$ 的最小值，显然 B 中元素在各个子集 A_i $(i=1, 2, \cdots, 20)$ 中出现的总次数是 $2\times 20=40$，要知道 B 中至少有多少个元素，只需知道 B 中每个元素在各个子集 A_i $(i=1, 2, \cdots, 20)$ 中至多出现多少次.

解 我们先证明：B 中每个元素在各个子集 A_i $(i=1, 2, \cdots, 20)$ 中至多出现 4 次. 如若不然，假定 B 中某个元素 b 在各个子集 A_i $(i=1, 2, \cdots, 20)$ 中出现 k $(k>4)$ 次. 考察含 b 的 k 个子集，它们共含有 A 中的 $3k>12$ 个元素. 于是，由抽屉原理，A 中至少有一个元素，设为 a，在这 k 个子集中出现 3 次. 设这 3 个同时含有 a、b 的子集合为 P、Q、R，则 $A\backslash\{a\}$ 中的 5 个元素在 P、Q、

R 中共出现 $2\times3=6$ 次. 于是必有一个元素 c 出现 2 次，这样便得到 2 个同时含有 a、b、c 的子集，与条件 $|A_i\cap A_j|\leqslant 2$ 矛盾.

由上，B 中每个元素在各个子集 A_i $(i=1, 2, \cdots, 20)$ 中至多出现 4 次，而 B 中元素在各个子集 A_i $(i=1, 2, \cdots, 20)$ 中出现的总次数是 $2\times20=40$，于是 $|B|\geqslant\frac{40}{4}=10$，所以 $n\geqslant 10+6=16$.

最后，当 $n=16$ 时，存在合乎题目条件的 20 个集合：$\{1, 2, 3, 7, 8\}$、$\{1, 2, 4, 12, 14\}$、$\{1, 2, 5, 15, 16\}$、$\{1, 2, 6, 9, 10\}$、$\{1, 3, 4, 10, 11\}$、$\{1, 3, 5, 13, 14\}$、$\{1, 3, 6, 12, 15\}$、$\{1, 4, 5, 7, 9\}$、$\{1, 4, 6, 13, 16\}$、$\{1, 5, 6, 8, 11\}$、$\{2, 3, 4, 13, 15\}$、$\{2, 3, 5, 9, 11\}$、$\{2, 3, 6, 14, 16\}$、$\{2, 4, 5, 8, 10\}$、$\{2, 4, 6, 7, 11\}$、$\{2, 5, 6, 12, 13\}$、$\{3, 4, 5, 12, 16\}$、$\{3, 4, 6, 8, 9\}$、$\{3, 5, 6, 7, 10\}$、$\{4, 5, 6, 14, 15\}$.

综上所述，n 的最小值是 16.

例 6 设 n 是给定的正整数，$6|n$. 在 $n\times n$ 方格棋盘中，每个方格都填上一个正整数，第 i 行的方格填入的数从左至右依次为 $(i-1)n+1$, $(i-1)n+2$, $\cdots$, $(i-1)n+n$. 今任取 2 个相邻(具有公共边)的方格，将其中一个数加 1，另一个数加 2，称之为一次操作. 问：至少要经过多少次操作，才能使棋盘中的数变得都相等？(原创题)

解 将棋盘中各数的和记为 S.

显然，当棋盘中的数都相等时，每个数至少是 n^2，于是棋盘中各数的和 $S'\geqslant n^2\cdot n^2=n^4$，又每次操作使 S 增加 3，而最初棋盘中 $S_0=1+2+3+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$，于是操作到各数相等时 S 至少增加 $n^4-\frac{n^2(n^2+1)}{2}=\frac{n^2(n^2-1)}{2}$，所以操作次数不少于 $\frac{1}{3}\cdot\frac{n^2(n^2-1)}{2}=\frac{n^2(n^2-1)}{6}$.

下面证明：可适当操作 $\frac{n^2(n^2-1)}{6}$ 次，使棋盘中的数变得都相等. 这等价于证明：可适当操作若干次，使棋盘中的数都变成 n^2.

将棋盘每一行从左至右每 3 个连续格一组，分成 $\frac{n}{3}$ 组，依次记为第一组，第二组，…，第 $\frac{n}{3}$ 组.

首先注意到任何连续 3 个格，都可适当操作 2 次，使每个数都增加 2，我们称这两个操作合成一个大操作 A：$(a, b, c)\rightarrow(a+2, b+1, c)\rightarrow(a+2, b+2, c+2)$. 现在，将某行的每一组都进行 $\frac{n}{2}$ 次大操作 A，则该行的数都增加

n，于是，对每一行，都可进行若干次操作，使其变得与第 n 行完全相同.

再注意到连续 2 个格，可适当操作两次，使其中的数都增加 3，我们称这两个操作合成一个大操作 B：$(a, b)\to(a+2, b+1)\to(a+3, b+3)$. 现在，假定棋盘的每一行都已与第 n 行完全相同. 再考察第 i、$i+1$ 这 2 行的第 j 组，对该组同一列的 2 个格都进行一次大操作 B，则这 2 行第 j 组中的数都增加 3，而同一行中不同组对应的数相差 3 的倍数，于是，我们可对这 2 行每一组都进行类似的操作若干次，使这 2 行的所有组都变得与第 $\frac{n}{3}$ 组完全相同，为 (n^2-2, n^2-1, n^2)，它经过一次操作可变为 (n^2, n^2, n^2)，于是这 2 行都可变成 n^2.

每连续 2 行都进行这样的操作，则所有行都变成 n^2.

综上所述，操作的最小次数为 $\frac{n^2(n^2-1)}{6}$.

例 7 设 n 是给定的正整数，$X=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$，A 是 X 的子集，且对任何 $x<y<z$，$x, y, z\in A$，都存在一个三角形三边的长分别为 x、y、z. 用 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数，求 $|A|$ 的最大值.（原创题）

解 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ 是合乎条件的子集，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_r$. 如果 $a_r<n$，设 $n-a_r=t$，令 $a_i'=a_i+t\ (i=1, 2, \cdots, r)$，则 $a_r'=n$，且 $A'=\{a_1', a_2', \cdots, a_r'\}$ 也是合乎条件的子集，于是不妨设 $a_r=n$.

因为 a_1、a_2、a_r 构成三角形三边，所以 $n=a_r<a_1+a_2$，但 $a_1+a_2<2a_2$，即 $a_1+a_2\leqslant 2a_2-1$，于是 $n=a_r\leqslant 2a_2-2$，所以 $a_2\geqslant\frac{1}{2}n+1$.

下面从整体上估计 $A\backslash\{a_1\}$ 中的数只能在哪些数中选取.

（1）当 n 为奇数时，令 $n=2k+1$，则 $a_2\geqslant\frac{1}{2}n+1=k+\frac{3}{2}$，但 a_2 为整数，所以 $a_2\geqslant k+2$，于是 $A\backslash\{a_1\}\subseteq\{k+2, k+3, \cdots, 2k+1\}$，所以 $|A|-1\leqslant|\{k+2, k+3, \cdots, 2k+1\}|=2k+1-(k+1)=k$，所以 $|A|\leqslant k+1=\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$.

（2）当 n 为偶数时，令 $n=2k$，则 $a_2\geqslant\frac{1}{2}n+1=k+1$，于是 $A\backslash\{a_1\}\subseteq\{k+1, k+2, \cdots, 2k\}$，所以 $|A|-1\leqslant|\{k+1, k+2, \cdots, 2k\}|=2k-k=k$，所以 $|A|\leqslant k+1=\frac{n}{2}+1=\frac{n+2}{2}$.

综合（1）、（2），对任何正整数 n，有 $|A|\leqslant\frac{n+2}{2}$，但 $|A|$ 为整数，所以

$|A|\leqslant\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

其次，若 $n=2k$，则令 $A=\{k, k+1, k+2, \cdots, 2k\}$，此时，对任何 $x<y<z$，$x, y, z\in A$，都有 $x+y\geqslant k+(k+1)=2k+1>2k\geqslant z$，从而存在一个以 x、y、z 为三边的三角形，且 $|A|=k+1=\frac{n}{2}+1=\frac{n+2}{2}=\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

若 $n=2k+1$，则令 $A=\{k+1, k+2, \cdots, 2k+1\}$，此时，对任何 $x<y<z$，$x, y, z\in A$，都有 $x+y\geqslant(k+1)+(k+2)=2k+3>2k+1\geqslant z$，从而存在一个以 x、y、z 为三边的三角形，且 $|A|=k+1=\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}=\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

（注：上述构造可合并为 $A=\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right]+1, \left[\frac{n+1}{2}\right]+2, \cdots, n\right\}$）

故 $|A|$ 的最大值为 $\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

例 8 给定正整数 $n(n\geqslant 2)$，求最大的 λ，使得：若有 n 个袋子，每一个袋子中都是一些重量为 2 的整数次幂克的小球，且各个袋子中的小球的总重量都相等（同一个袋子中可以有相等重量的小球），则必有某一重量的小球的总个数至少为 λ.（2005 年中国国家队选拔考试试题）

解 不妨设最重的小球的重量为 1，设每个袋子中小球的总重量为 G，则 $G\geqslant 1$.

先证明：当 $\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 合乎题意，即必有某一重量的小球的总个数至少为 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

反设任一个重量的小球的总个数都不大于 $\left[\frac{n}{2}\right]$，考察这 n 个袋子中所有小球的总重量，有 $n\leqslant nG<\left[\frac{n}{2}\right]\cdot(1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots)=2\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant 2\cdot\frac{n}{2}=n$，矛盾！

其次证明：$\lambda\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$. 取充分大的正整数 s，使得 $2-2^{-s}\geqslant\frac{2n}{n+1}$，由于 $\left[\frac{n}{2}\right]+1\geqslant\frac{n+1}{2}$，所以 $2-2^{-s}\geqslant\frac{2n}{n+1}\geqslant\frac{n}{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$，从而 $\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)(1+2^{-1}+\cdots+2^{-s})\geqslant n\cdot 1$.

所以可在 $\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \underbrace{2^{-1}, 2^{-1}, \cdots, 2^{-1}}_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \cdots, \underbrace{2^{-s}, 2^{-s}, \cdots, 2^{-s}}_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ 中从

前至后取出和为 1 的连续若干项，且至少可取 n 次，所以 $\lambda \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$.

综上可知，$\lambda_{\max}=\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

习 题 9

1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{29}$ 是 29 个不同的正整数集合. 对 $1 \leqslant i<j \leqslant 29$ 及正整数 x，定义 $N_i(x)=$数集 A_i 中不大于 x 的数的个数，$N_{ij}(x)=A_i \cap A_j$ 中不大于 x 的数的个数. 已知：对所有 $i=1, 2, \cdots, 29$，及每个正整数 x，有 $N_i(x) \geqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$（$\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$）. 求证：存在 i、j（$1 \leqslant i<j \leqslant 29$），使 $N_{ij}(1988)>200$.（第 29 届 IMO 备选题）

2 设 A_i 为 $M=\{1, 2, \cdots, 10\}$ 的子集，且 $|A_i|=5$（$i=1, 2, \cdots, k$），$|A_i \cap A_j| \leqslant 2$（$1 \leqslant i<j \leqslant k$）. 求 k 的最大值.（1994 年中国国家集训队测试题）

3 设 X 是有限集，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 X 的子集，且 $|A_i|=r$（$1 \leqslant i \leqslant m$）. 若对任何 $i \neq j$，有 $|A_i \cap A_j| \leqslant k$. 求证：$|X| \geqslant \frac{mr^2}{r+(m-1)k}$.

4 有 16 名学生参加考试，考题都是选择题，每题有 4 个选择支. 考完后发现：任何两人至多有一道题答案相同，问最多有几道考题.（第 33 届 IMO 中国国家队选拔考试题）

5 设集合 $M=\{1, 2, \cdots, 10\}$ 的 k 个 5 元子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 满足条件：M 中的任意两个元素最多在两个子集 A_i 与 $A_j(i \neq j)$ 内出现，求 k 的最大值.

6 某个国家有 n 个机场，由 k 家航空公司提供航线服务，有些机场之间有直飞航线（直飞航线是双向的，既可以从 A 到 B，也可以从 B 到 A），如果两个机场之间没有直飞航线，则可通过转机从一个机场到达另一个机场.

（1）为了连接这 n 个机场，需要 $n-1$ 条航线（你可以利用这一结论而无须证明），由于经常有航空公司倒闭，所以各航空公司在飞行航线方面需密切合作. 试问：为了保证任何一家航空公司倒闭时，都能使剩下的航线服务能从一个机场到达任何另一个机场，则这些航空公司一共至少提供多少条直飞航线？

（2）当 $n=7$，$k=5$ 时，为了保证任何 2 家航空公司同时倒闭时，都能使剩下的航线服务能从一个机场到达任何另一个机场，则这些航空公司又一共至少提供多少条直飞航线？

10 参数估计

有些极值问题，因变动的因素较多，从表面上看情况相当复杂. 但适当引入新的参数，便可将极值函数用参数表出. 这样，离散极值问题被转化为一元或二元（参数）函数的极值问题，从而使问题得到简化. 我们称这种求极值的方法为参数估计.

例1　已知 20 名体操运动员表演后，9 名裁判分别给他们判定 1 到 20 名的名次. 已知，每一个运动员得到的 9 个名次中，最大者与最小者至多相差 3. 现将各人得到的名次的和排列为 $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_{20}$. 求 c_1 的最大值.（全苏第 2 届数学奥林匹克试题）

分析与解　首先注意解题目标为 $c_1 \leqslant P$，它等价于存在一个 i，使得 $c_i \leqslant P$. 于是，对任何一个选手的得分之和进行估计都可得到 c_1 的估计.

要使得分（名次）尽可能小，则希望判他第一的多，所以可估计得第一最多的选手的得分. 有一种情况是不证自明的，即有选手得了 9 个第一，此时显然有 $c_1 \leqslant 9$. 进而想到，当“第一”分布比较分散时，则应利用整体估计，考察各个得了第一的选手的得分之和. 设共有 r 个选手被判为第一.

（1）$r=1$，则 $c_1=9$.

（2）$r=2$，则因有 9 个第一，至少有一个选手 A 得到 5 个第一. 由于同一个选手所得到的各个得分相差不超过 3，从而 A 的另 4 个得分中的任何一个都不超过 4. 于是，A 的得分之和不多于 $5+4\times 4=21$，所以，$c_1 \leqslant 21$.

（3）$r=3$，考虑各选手的总得分的总和 S. 他们共得到 9 个第一，还有另外 18 个名次. 每个名次的得分至多为 4. 所以 $S \leqslant 9+9\times 3+9\times 4=72$，所以，$c_1 \leqslant \frac{72}{3}=24$.

（4）$r=4$，同样估计此 4 个人的得分总和，有 $S \leqslant 90$，所以，$c_1 \leqslant \left[\frac{90}{4}\right]=22$.

（5）$r \geqslant 5$，此 r 个人的每个得分均不多于 4，从而至少有 $9r \geqslant 5\times 9=45$ 个不高于 4 的名次. 但 9 个裁判判定的 1 到 4 的名次至多有 $9\times 4=36$ 个，

矛盾.

综上所述，$c_1 \leqslant 24$.

最后，$c_1 = 24$ 是可能的. 实际上，令 $c_1 = c_2 = c_3 = (1+1+1)+(3+3+3)+(4+4+4)$，$c_4 = (2+2+2+2+2)+(5+5+5+5)$，$c_5 = (2+2+2+2)+(5+5+5+5+5)$，而 $c_i = i+i+\cdots+i$ $(i = 6, 7, 8, \cdots, 20)$. 见下表：

裁判＼选手	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	20
1	1	3	4	2	5	6	7	8	9	…	20
2	1	3	4	2	5	6	7	8	9	…	20
3	1	3	4	2	5	6	7	8	9	…	20
4	3	4	1	2	5	6	7	8	9	…	20
5	3	4	1	2	5	6	7	8	9	…	20
6	3	4	1	5	2	6	7	8	9	…	20
7	4	1	3	5	2	6	7	8	9	…	20
8	4	1	3	5	2	6	7	8	9	…	20
9	4	1	3	5	2	6	7	8	9	…	20
名次和	24	24	24	30	33	54	63	72	81	…	180

故 c_1 的最大值为 24.

例 2 有 r 个人参加象棋比赛，每 2 人都比一局，每局胜者得 2 分，负者得 0 分，平局每人 1 分. 比赛后，恰有一人胜的局数最少，且只有他得分最多，求 r 的最小值.（第 16 届全俄数学奥林匹克试题）

分析与解 先考虑条件："恰有一人胜的局数最少，且只有他得分最多"，设此人为 A. 为了计算 A 的得分，可引入参数：设 A 胜 n 局，平 m 局，则 A 的得分为 $2n+m$.

再考虑目标："$r \geqslant ?$"，显然成立的不等式是：$r \geqslant (m+n)+1$，因而可先分别估计 m、n 的范围.

为了利用"A 得分最多"，应计算其他人的得分. 这就要知道其他人胜、负局数，这正好利用条件："A 胜的局数最少". 对 A 以外的任何人而言，至少胜 $n+1$ 场，至少得分 $2n+2$. 于是，$2n+2 < 2n+m$，$m > 2$，即 $m \geqslant 3$.

这个估计虽不是最优的，但由此可找到得分更高的人. 因为 $m \geqslant 3$ 表明：至少有 3 个人与 A 打成平局. 设其中的一个人为 B. 那么，B 至少得 $(2n+2)+$

$1=2n+3$ 分. 于是，$2n+3<2n+m$，$m>3$，即 $m\geqslant 4$.

下证 $n>0$. 实际上，若 $n=0$，即 A 未胜一场，则 A 的得分 $S(A)\leqslant r-1$. 但 r 个人的得分总和为 $2C_r^2=r(r-1)$，每个人平均可得分 $r-1$. 但 A 的得分最多，所以，$S(A)=r-1$. 这样，每个人都得 $r-1$ 分，矛盾.

综上，$r\geqslant(m+n)+1\geqslant 6$.

最后，$r=6$ 是可能的，各人得分如下表所示：

	A	B	C	D	E	F	总　分
A		1	1	1	1	2	6
B	1		2	0	0	2	5
C	1	0		0	2	2	5
D	1	2	2		0	0	5
E	1	2	0	2		0	5
F	0	0	0	2	2		4

故 r 的最小值是 6.

例3 有 n $(n\geqslant 5)$ 支足球队进行单循环赛. 每两队赛一场，胜队得 3 分，负队得 0 分，平局各得 1 分. 结果取得倒数第 3 名的队，得分比名次在前面的队都少，比后两名都多；胜场数比名次在前面的队都多，却比后两名都少. 求队数 n 的最小值.

解 设 A_1，A_2，…，A_{n-3} 是得分高的队，B 是得分倒数第三的队，C_1、C_2 是得分低的队. 引入参数：设 B 胜 x 场平 y 场负 z 场，则 $n=x+y+z+1$. 由于 C_1 至少胜 $(x+1)$ 场，所以 $3x+y\geqslant 3(x+1)+1$，即 $y\geqslant 4$. 由于 A_1 至多胜 $(x-1)$ 场，至多平 $(n-x)$ 场，所以 $3x+y+1\leqslant 3(x-1)+(n-x)=3x+y+z-2$，于是 $z\geqslant 3$，即 B 至少输 3 场，因此 A_1，…，A_{n-3} 中至少有一队胜了 B. 于是 $x\geqslant 2$.

(1) 若所有 A_i 均与 C_1、C_2、B 中某个打平，由于 $y=n-x-z-1\leqslant n-6$，故此 $(n-3)$ 队中至少有 3 个队和 C_1、C_2 之一打平. 于是 C_1、C_2 中有一队至少平两场，故 $3x+y\geqslant 3(x+1)+2+1$，即 $y\geqslant 6$. 于是 $n\geqslant 12$. 但其等号不能成立，否则由 $z=3$ 知 A_i 均没有输过，又至多胜 $x-1=1$ 场，故至少平 10 场. 由此得 B、C_1、C_2 一共至少平 18 场，但由于 $y=6$，故 C_1、C_2 至多平 2 场，于是 $18\leqslant 6+2+2$，矛盾. 所以 $n\geqslant 13$.

(2) 若有某个 A_i（设为 A_1）和 B、C_1、C_2 均未打平，则它至多平 $(n-4)$ 场，于是 $3x+y+1\leqslant 3(x-1)+(n-4)$，得 $n\geqslant y+8\geqslant 12$. 此时等号也不

能成立，否则 $y=4$，由前面推导知 C_1、C_2 没有平过，且 A_i 至少胜 $(x-1)$ 场，否则它要平 11 场，但 C_1 未平过，矛盾．由此得 A_i 胜 $(x-1)$ 场，平 8 或 9 场．设 A_i 中有 k 个平 8 场，$(9-k)$ 个平 9 场，C_1、C_2 均胜 $(x+1)$ 场，负 $(10-x)$ 场，可得 $9(x-1)+x+2(x+1)=k(4-x)+(9-k)(3-x)+7-x+2(10-x)$，即 $24x=k+61$，此方程在 $0\leqslant k\leqslant 9$ 时无整数解，所以 $n\geqslant 13$．

综合(1)、(2)，对所有情况，都有 $n\geqslant 13$．

另一方面，当 $n=13$ 时，令各队间的比赛结果如下表所示，可知 $n=13$ 满足要求．故 $n_{\min}=13$．

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	B	C_1	C_2
A_1		3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	3
A_2	0		1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3
A_3	1	1		3	1	1	1	1	1	1	1	0	3
A_4	1	1	0		1	1	1	1	1	1	1	3	3
A_5	1	1	1	1		1	1	1	1	1	3	0	3
A_6	1	1	1	1	1		1	1	1	1	3	3	0
A_7	1	1	1	1	1	1		1	1	1	3	3	0
A_8	1	1	1	1	1	1	1		1	1	3	3	0
A_9	1	1	1	1	1	1	1	1		1	3	3	0
A_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1	1		0	3	3
B	1	1	1	1	0	0	0	0	0	3		3	3
C_1	3	0	3	0	3	0	0	0	0	0	0		3
C_2	0	0	0	0	0	3	3	3	3	0	0	0	

例 4　有 1000 张编号为 000，001，…，999 的证件和 100 个编号为 00，01，…，99 的盒子．若盒子的号码可以由证件的号码划掉一个数字而得到，则该证件可以放入该盒子中．若选择 k 个盒子可以装下所有证件，求 k 的最小值．

分析与解　找一个充分条件，使选定若干个盒子能装下所有的证件．

考察所有含有数字 a、b、c(a、b、c 可能相同)为编号的证件，要装下这些证件，则一定有含有其中某两个数(比如 a、b)为编号的盒子．为了保证数字的不同排列顺序为编号的证件都能装下，一个充分条件是，编号为 $\overline{ab}$、$\overline{ba}$ 的盒子都被选．也就是说，要使得“任何三个数中都有两个数被选取，且这两个数的

任何顺序都被选取”. 由此联想到抽屉原理：3 个数归入 2 个集合，必有一个集合中有两个数. 于是，将 0, 1, 2, …, 9 划分为两个子集 A、B，只要同一集合中任何 2 数组都被选取，且每个 2 数组的任何顺序（即所有可重复元素的 2 元排列）都被选取（保证不管什么顺序都可放下），则这些编号合乎要求.

设 $|A|=k$, $|B|=10-k$，则 A、B 中的元素可重复的 2 元 排列分别有 k^2、$(10-k)^2$ 个，所以这样的 2 元排列共有 $k^2+(10-k)^2=2(k-5)^2+50\geqslant 50$ 个.

取 $k=5$，即 $|A|=|B|=5$，比如，$A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$B=\{5, 6, 7, 8, 9\}$. 则 A、B 中的元素可重复的 2 元排列各有 25 个，相应的 50 个编号合乎要求.

下面证明 $k\geqslant 50$.

设选用的 k 个盒子中，以 9 为首位的编号最少，设有 m（参数）个，记为 $\overline{9a_i}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$. 令 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，任取不属于 A 的两个数 a、b，考察编号为 $\overline{9ab}$ 的证件. 因为 a 不属于 A，所以没有编号为 $\overline{9a}$ 的盒子. 同样，没有编号为 $\overline{9b}$ 的盒子. 于是必选编号为 $\overline{ab}$ 的盒子，注意到 a、b 均有 $10-m$ 个取值，于是，这样的盒子应有 $(10-m)^2$ 个，且这些盒子都不以 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为首位. 又由“最少性”，以 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为首位的盒子至少都有 m 个，所以这样的盒子至少有 m^2 个. 于是，$k\geqslant m^2+(10-m)^2\geqslant\frac{1}{2}[m+(10-m)]^2=50$.

综上所述，k 的最小值为 50.

例 5 求具有如下性质的最小自然数 n：把正 n 边形 S 的任何 5 个顶点染红色时，总有 S 的一条对称轴 L，使每一红点关于 L 的对称点都不是红点.

解 设正 n 边形为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，它有 n 条对称轴.

记过边 A_1A_n 的中点的对称轴记为 L_1，过 A_1 的对称轴为 L_2，过边 A_1A_2 的中点的对称轴记为 L_3，过 A_2 的对称轴为 L_4, …，过边 $A_{[\frac{n}{2}]}A_{[\frac{n+1}{2}]}$ 的中点的对称轴记为 L_n（其中 $A_{[\frac{n}{2}]}$ 与 $A_{[\frac{n+1}{2}]}$ 可能重合）. 易知，A_i 与 A_j 关于 L_m 对称，等价于 $i+j\equiv m(\bmod n)$（规定 $A_{n+i}=A_i$）.

对任意集合 $X=\{a_1, a_2, \cdots, a_t\}$，定义 $X^*=\{a_i+a_j\mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant t\}$. 对于 $k\in\{3, 4, 5, \cdots, 13\}$，将正 k 边形的 5 个顶点 A_1、A_2、A_4、A_6、A_7 染红色（其中下标模 k 理解，且当互异顶点的个数少于 5 时，将任意若干个点重复染红，使之共有 5 个红点）. 令 $P=\{1, 2, 4, 6, 7\}$，则 $P^*=\{2, 3, 4, \cdots, 14\}$，所以 P^* 中含有模 k 的完系（含有 k 个连续自然数，各数模 k 理解），于是，对任意 m $(1\leqslant m\leqslant k)$，$P^*$ 中必有某个 $x\equiv m(\bmod k)$，即存在 $i+j\equiv m(\bmod k)$，其中 i、$j\in P$. 于是 A_i、A_j 是关于 L_m 对称的两个点. 所以，对任何

$k \in \{3, 4, 5, \cdots, 13\}$ 都不合乎要求，即 $n \geqslant 14$.

另一方面，对正 14 边形，将它的任意 5 个顶点 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_5}$ 染红色，令 $P=\{i_1, i_2, \cdots, i_5\}$，引入参数：设 P 中有 r 个奇数，$5-r$ 个偶数，则 P^* 中奇数的个数为：$r(5-r) \leqslant \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]=6$（其中 P、P^* 中的数按模 14 理解，这不改变各数的奇偶性）. 于是，$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ 中必有一个奇数 m，使 $m \notin P^*$，即对任何 i、$j \in P$，$i+j \notin P^*$，$i+j \not\equiv m \pmod{14}$. 于是任何两个红点关于 L_m 不对称. 故 $n_{\min}=14$.

例 6　对于整数 $n \geqslant 4$，求出最小的整数 $f(n)$，使得对于任何正整数 m，集合 $\{m, m+1, \cdots, m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中，均有至少 3 个两两互素的元素.（2004 年全国高中数学联赛试题）

解　当 $n \geqslant 4$ 时，对集合 $M=\{m, m+1, m+2, \cdots, m+n-1\}$，若 m 为奇数，则 m, $m+1$, $m+2$ 两两互质；若 m 为偶数，则 $m+1$, $m+2$, $m+3$ 两两互质，于是 M 的所有 n 元子集中都至少有 3 个两两互质的数，所以 $f(n)$ 存在，且 $f(n) \leqslant n$.

设 $T_n=\{t \mid t \leqslant n+1$，且 $2 \mid t$ 或 $3 \mid t\}$，则 T_n 为 $\{2, 3, \cdots, n+1\}$ 的子集，但 T_n 中任何 3 个数都不两两互质，所以 $f(n) \geqslant |T_n|+1$.

由容斥原理，$|T_n|=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1$，所以 $f(n) \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1$.

此外，注意到 $\{m, m+1, m+2, \cdots, m+n\}=\{m, m+1, m+2, \cdots, m+n-1\} \cup \{m+n\}$，所以 $f(n+1) \leqslant f(n)+1$.

所以 $f(4) \geqslant 4$, $f(5) \geqslant 5$, $f(6) \geqslant 5$, $f(7) \geqslant 6$, $f(8) \geqslant 7$, $f(9) \geqslant 8$.

下面证明 $f(6)=5$.

设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{m, m+1, m+2, \cdots, m+5\}$，并设 $x_i(1 \leqslant i \leqslant 5)$ 中有 k 个为奇数.

因为 $\{m, m+1, m+2, \cdots, m+5\}$ 中最多 3 个偶数，从而 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 中最多 3 个偶数，所以 $k \geqslant 2$.

因为 $\{m, m+1, m+2, \cdots, m+5\}$ 中最多 3 个奇数，从而 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 中最多 3 个奇数，所以 $k \leqslant 3$.

若 $k=3$，则 3 个奇数两两互质；

若 $k=2$，则不妨设 x_1, x_2 为奇数，x_3, x_4, x_5 为偶数，当 $3 \leqslant i < j \leqslant 5$ 时，$|x_i-x_j| \leqslant (m+5)-m=5$，但 x_i-x_j 为偶数，所以 $|x_i-x_j|=2$ 或 4，于是 $x_i \equiv x_j \pmod 3$，$x_i \equiv x_j \pmod 5$，从而 x_3, x_4, x_5 至多 1 个为 3 的倍数，

也至多1个为5的倍数，于是至少1个既不是3的倍数又不是5的倍数，设这个数为x_3.

考察3个数x_1，x_2，x_3，因为$1\leqslant i<j\leqslant 3$时，$|x_i-x_j|\leqslant(m+5)-m=5$，所以$x_i$、$x_j$的公因数不大于5，但$x_3$既不是3的倍数又不是5的倍数，所以$(x_1,x_3)=(x_2,x_3)=1$. 又$x_1-x_2$为偶数，所以$|x_1-x_2|=2$或4，所以$(x_1,x_2)=1$，即$x_1$，$x_2$，$x_3$两两互质，所以$f(6)=5$.

由$f(7)\geqslant 6$，$f(7)\leqslant f(6)+1=5+1=6$，有$f(7)=6$.

类似地，$f(8)=7$，$f(9)=8$.

这表明，当$4\leqslant n\leqslant 9$时，

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1. \qquad ①$$

下面用数学归纳法证明①式对所有大于3的正整数成立.

假设$n\leqslant k\ (k\geqslant 9)$时①成立，当$n=k+1$时，因为$\{m,m+1,m+2,\cdots,m+k\}=\{m,m+1,m+2,\cdots,m+k-6\}\cup\{m+k-5,m+k-4,\cdots,m+k\}$，所以$f(k+1)\leqslant f(k-5)+f(6)-1$，由归纳假设，有

$$\begin{aligned}f(k+1)\leqslant&\left(\left[\frac{k-5+1}{2}\right]+\left[\frac{k-5+1}{3}\right]-\left[\frac{k-5+1}{6}\right]+1\right)+\\&\left(\left[\frac{6+1}{2}\right]+\left[\frac{6+1}{3}\right]-\left[\frac{6+1}{6}\right]+1\right)-1\\=&\left(\left[\frac{k}{2}\right]-2+\left[\frac{k-1}{3}\right]-1-\left[\frac{k-4}{6}\right]+1\right)+(3+2-1+1)-1\\=&\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1+\left[\frac{k-1}{3}\right]+1-\left[\frac{k-4}{6}\right]-1\right)+1\\=&\left[\frac{k+2}{2}\right]+\left[\frac{k+2}{3}\right]-\left[\frac{k+2}{6}\right]+1，①式成立.\end{aligned}$$

故对所有大于3的正整数n，有$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1$.

例7　某国足球联赛有$n\ (n\geqslant 6)$支球队参加，每支球队都有两套不同颜色的队服，一套为主场队服，一套为客场队服。当两支球队进行比赛时，若两队的主场队服颜色不同，则两队均穿主场队服；若两队的主场队服颜色相同，则主场队穿其主场队服，客场队穿其客场队服. 已知任意两场在四支不同球队间的比赛中至少出现3种不同颜色的队服. 所有n支球队的共$2n$套队服中，至少使用了多少种不同的颜色？(2010年中国国家集训队测试题)

解　这些队服至少使用了$n-1$种不同的颜色.

首先构造使用$n-1$种颜色的例子：设这$n-1$种颜色为C_1，C_2，$\cdots$，C_{n-1}，

n 支队伍为 T_1, T_2, $\cdots$, T_n. 其中，队伍 T_1、T_2 的主场队服的颜色均为 C_1，客场队服的颜色均为 C_2，队伍 $T_i(3\leqslant i\leqslant n)$ 的主场队服颜色为 C_{i-1}，客场队服颜色为 C_{i-2}.

由题目所述的规则，当两队比赛时，主客场两支球队的主场队服颜色均会出现在场上. 对于任意两场在四支不同球队间的比赛，这四支球队的主场队服至少有三种不同的颜色，这些颜色都会出现在比赛中，因此这样的设计满足题目条件.

下面假设可以使用不超过 $n-2$ 种颜色，使得任意两场在四支不同球队间的比赛中至少出现 3 种不同颜色的队服. 不妨设恰好使用了 $n-2$ 种颜色，并设这 $n-2$ 种颜色为 C_1, C_2, $\cdots$, C_{n-2}. 令 x_i 为主场队服颜色为 C_i 的队伍的个数，显然 $\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_i=n$，由抽屉原理至少有一个 $x_i\geqslant 2$，不妨设 $x_1\geqslant 2$.

若另外还有一个 $x_j\geqslant 2$，则不妨设 a、c 是两支主场队服颜色为 C_1 的队伍，b、d 是两支主场队服颜色为 C_j 的队伍，a 队主场 b 队客场的比赛与 c 队主场 d 队客场的比赛中，四支队伍均穿其主场队服，场上队员的队服都是 C_1 和 C_j 两种颜色，矛盾，因此其余的 x_j 全部为 0 或 1，故 $x_1\geqslant n-((n-2)-1)=3$.

若 $x_1=3$，则 $x_2=x_3=\cdots=x_{n-2}=1$，设主场队服颜色为 C_1 的三支队伍为 a、b、c，并选取另一球队 d，使得 d 的主场队服颜色与 b 的客场队服颜色相同(由 $x_2=x_2=\cdots=x_{n-2}=1$ 必然可以选出)，这样在 a 队主场 b 队客场的比赛与 c 队主场 d 队客场的比赛中，只有 b 队穿客场队服，场上队员的队服只有两种不同颜色，矛盾.

若 $x_1\geqslant 4$，则考虑所有主场队服颜色为 C_1 的队伍的客场队服，以及其他队伍的主场队服. 这一共 n 套队服仅有 $n-2$ 种不同的颜色供选择，由抽屉原理必然存在两套队服颜色相同，因为前面已经证明除 x_1 外其余的 x_j 全部为 0 或 1，所以必然出现下面两种情况之一：

情况 1：有两支主场队服颜色为 C_1 的队伍，它们的客场队服颜色也相同. 设这两支队伍为 b 和 d，另取两支主场队服颜色为 C_1 的队伍 a、c，则在 a 队主场 b 队客场的比赛与 c 队主场 d 队客场的比赛中，b、d 两队穿客场队服，场上队员的队服只有两种不同颜色，矛盾.

情况 2：有一支主场队服颜色为 C_1 的队伍的客场队服，与另一支队伍的主场队服颜色相同. 设前者为 b，后者为 d，另取两支主场队服颜色为 C_1 的队伍 a、c，则在 a 队主场 b 队客场的比赛与 c 队主场 d 队客场的比赛中，只有 b 队穿客场队服，场上队员的队服只有两种不同颜色，矛盾.

因此，假设不成立，即无法使用不超过 $n-2$ 种颜色来达到题目要求，故这些队服至少使用了 $n-1$ 种不同的颜色.

习 题 10

1 一次考试中有 30 个选择题，答对一题得 5 分，答错得 0 分，不答的题每题得 1 分. 甲考试的得分多于 80，他把分数告诉了乙，则乙能推算出甲答对了几道题. 如果甲的得分少些，但仍大于 80，则乙就无法推算了. 问此次考试甲得了多少分？（第 2 届美国数学邀请赛试题）

2 某班有 47 个学生，所用教室有 6 排，每排有 8 个座位，用(i, j)表示位于第 i 排第 j 列的座位. 新学期准备调整座位，设一个学生原来的座位为(i, j)，如果调整后的座位为(m, n)，则称该生作了移动$[a, b]=[i-m, j-n]$，并称 $a+b$ 为该生的位置数，所有学生的位置数之和记为 S. 求 S 的最大可能值与最小可能值之差.（2003 年女子数学奥林匹克试题）

3 已知共有 12 个剧团参加为期 7 天的演出，要求每个剧团都能看到其他所有剧团的演出，而只能是当天没演出的在台下观看，问最少共要演出多少场？（1994 年中国国家集训队训练题）

4 对每个正整数 n，用 $s(n)$ 表示满足下列条件的最大整数：对任何正整数 $k \leqslant s(n)$，n^2 可以表成 k 个正整数的平方和. (1) 求证：$s(n) \leqslant n^2-14$ $(n \geqslant 4)$. (2) 找出一个 n，使 $s(n)=n^2-14$. (3) 求证：存在无数个 n，使 $s(n)=n^2-14$.（第 33 届 IMO 试题）

5 实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n>3)$ 满足：$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n$，且 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant n^2$. 求 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的最小值.（第 28 届美国数学奥林匹克试题）

11 算两次

估计的一种典型的方法是算两次，它的基本模式是：

对于集合 $X=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，设 $F=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是 X 的子集族（常常是有交划分，即可能有某两个子集的交非空），其中第 i 个子集 A_i 的元素个数为 r_i $(i=1, 2, \cdots, k)$.

用两种方法计算某种量 Ω（称为“中间量”）的个数 $|\Omega|$. 一方面，对整体 X 计算，常常是考虑每个元素对整体的贡献，得 $|\Omega|=f(n)$（总个数）. 另一方面，从子集族 F 计算，由第 i 子集 A_i 得 Ω 的个数为 $|\Omega_i|=f_i(k, r)$，于是

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(k, r)=\sum_{i=1}^{n}|\Omega_i| \leqslant |\Omega|=f(n).$$

这里要求，对不同的子集 A_i、A_j，由它们得到的中间量 Ω 是不同的. 因此，常常要适当选取中间量 Ω，以保证满足这一要求. 如果对不同的子集 A_i、A_j，它们有公共的 Ω，则要去掉重复计数.

算两次的关键是“算什么”. 对此，没有统一的模式，但中间量 Ω 的选择常有如下一些方法：

角 当估计的量与同色三角形有关时，可计算同色角、异色角，这是一种“减元”策略.

***r* 子集** 若各子集满足条件：$|A_i \cap A_j| \leqslant r$，则计算 $r+1$ 元子集（我们称为“加元”策略）. 此时，对不同的子集 A_i、A_j，它们的 $r+1$ 元子集是互异的. 否则，A_i、A_j 有公共的 $r+1$ 元子集，则 $|A_i \cap A_j| \geqslant r+1$，与 $|A_i \cap A_j| \leqslant r$ 矛盾.

对子 将具有特殊关系的 2 个元素配对（并非任意的 2 元子集），并称之为对子，计算这样的对子的个数. 此时，常常需要去掉重复计数.

次数 比如，某种元素出现的总次数，参加某种活动的人次数.

得分 某比赛选手所得的总分、各选手得分的总和.

我们先看两个利用“算两次”技巧计数的例子，因为计数常常是某些极值问题中的子问题.

例 1 某次议会中有 30 名议员，每两位议员或为政敌，或为朋友. 而且，每个议员都恰有 6 个政敌. 对于由 3 个议员组成的委员会，若这 3 人中任何两个人都是朋友或任何两个人都是政敌，则称之为奇异委员会. 问：共有多少个奇异委员会?（第 24 届全俄数学奥林匹克试题）

解 此题具有明显的图论色彩：或为朋友或为政敌——连边或不连边（染红色或染蓝色）；每个议员都有 6 个政敌——每点引出 6 条红边；奇异委员会——同色三角形.

考察 30 个点的完全图. 每点代表一个议员，若某两个议员为政敌，则将这两点间的边染红色，否则染蓝色. 由题意，每个点恰引出 6 条红边. 我们来计算图中同色三角形（子集）的个数（$|F|$）. 采用减元技巧选择中间量：计算同色角的总数 S.

一方面，对 X 而言，可从每个点出发计算，因为每点引出 6 条红边、23 条蓝边，有 $C_6^2+C_{23}^2=268$ 个同色角. 那么，30 个点共有 $30\times268=8040$ 个同色角. 不同顶点引出的同色角显然不同，于是，$S=8040$.

另一方面，每个同色角都在某个三角形中，设所有三角形中有 x 个同色三角形，则有 $C_{30}^3-x=4060-x$ 个不同色的三角形. 对于每个同色三角形，它有 3 个同色角；对于每个三边不同色的三角形，它有 1 个同色角. 于是 $S=3x+4060-x=2x+4060$.

由 $8040=S=2x+4060$，解得 $x=1990$.

注：计算异色角更简单，是因同色三角形中异色角的个数为 0. 此时，$0\times x+2(4060-x)=C_6^1\times C_{23}^1\times30$.

例 2 平面上有 18 个点，其中任意三点不共线，每两点用线段联接，将这些线段染红、蓝 2 色，每条线段只染一种颜色. 已知其中某点 A 引出的红色线段为奇数条，且其余的 17 点引出的红色线段数互不相等.

(1) 求此图中红色三角形的个数；

(2) 求此图中恰有两边为红色的三角形的个数.（第 36 届 IMO 备选题）

解 去掉图中的所有蓝色边，得到一个简单图 G. 由条件知，$d(A)$ 为奇数，其他非 A 的点的度属于 $\{0, 1, 2, \cdots, 17\}$. 易知，度为 0 和 17 的点不同时存在，于是，各个点的度分别为 $0, 1, 2, \cdots, 16$ 或 $1, 2, \cdots, 17$.

注意到 $\sum d(x)=d(A)+0+1+2+\cdots+16$ 为奇数，矛盾. 所以各顶点的度只能分别是 $1, 2, \cdots, 17$. 将各顶点记为 $V_1, V_2, \cdots, V_{17}$，其中 $d(V_i)=i$ $(i=1, 2, \cdots, 17)$.

因为 $d(V_{17})=17$，所以 V_{17} 与 V_1 连. 又 $d(V_1)=1$，所以 V_1 仅与 V_{17} 连，所以 V_{16} 不与 V_1 连，但 $d(V_{16})=16$，所以 V_{16} 与 $V_2, V_3, \cdots, V_{17}$ 连. 如此下

去，V_i 恰与 V_{18-i}，V_{19-i}，…，V_{17} 连（$i=1, 2, \cdots, 8$），而 V_{18-i} 恰与 V_1，V_2，…，V_{i-1} 以外的各点连（$i=1, 2, \cdots, 8$）. 再看 V_9，它应与 A，V_{17}，V_{16}，V_{15}，…，V_{10} 连. 由 V_9 与 A 连可知，V_1，V_2，…，V_8 不与 A 连，V_9，V_{10}，…，V_{17} 与 A 连，所以 $d(A)=9$.

令 $M=\{V_1, V_2, \cdots, V_8\}$，$N=\{A, V_9, V_{10}, \cdots, V_{17}\}$，则 M 中的点互不相连，而 N 中的点两两相连，且 M 中的点 V_i 恰与 N 中的 i 个点相连.

（1）问题等价于图 G 中三角形的个数. 首先，N 中有 C_{10}^3 个三角形. 另外，对 M 中的任意一个点 V_i，它与 N 中 i 个点连边，所以可得到 C_i^2 个三角形，这样的三角形有 $\sum\limits_{i=1}^{8} C_i^2 = C_9^3$ 个. 所以，红色三角形共有 $C_{10}^3 + C_9^3 = 204$ 个.

（2）对红色角总数 S 计算两次.

一方面，对 G 计算. 因为点 V_i 引出 i 条边（$i=2, 3, \cdots, 17$），所以以 V_i 为顶点的红色角有 C_i^2 个. 所以 $S=C_9^2$（A 引出的红色角）$+\sum\limits_{i=2}^{17} C_i^2 = C_9^2 + C_{18}^3$.

另一方面，每个红色角都在某个三角形中，设所有三角形中有 x 个是恰有两条红色边的三角形，每个这样的三角形恰有一个红色角，得到 x 个红色角. 又由（1）知，有 204 个红色三角形，每个这样的三角形恰有 3 个红色角，得到 $204\times 3=612$ 个红色角. 此外，其他三角形中无红色角. 所以 $S=x+612$.

由 $C_9^2 + C_{18}^3 = S = x+612$，解得 $x=240$.

例 3 设 $S=\{1, 2, \cdots, 15\}$. 从 S 中取出 n 个子集 A_1，A_2，…，A_n，满足下列条件：

（1）$|A_i|=7$ （$i=1, 2, \cdots, n$）；

（2）$|A_i \cap A_j| \leqslant 3$ （$1\leqslant i<j\leqslant n$）；

（3）对 S 中任何 3 元子集 M，存在某个 A_k，使 $M\subset A_k$.

求这样的子集个数 n 的最小值.（第 40 届 IMO 中国国家队选拔考试题）

分析与解 由条件（1）$|A_i|=7$ （$i=1, 2, \cdots, n$），想到计算各元素在各子集中出现的总次数 S_1.

一方面，从每个子集入手，有 $S_1=7n$. 另一方面，从每个元素入手，设 i （$i=1, 2, \cdots, 15$）出现的次数为 r_i，则有 $S_1=\sum\limits_{i=1}^{15} r_i$，所以 $7n=S_1=\sum\limits_{i=1}^{15} r_i$.

下面只须求 $\sum\limits_{i=1}^{15} r_i$ 的变化范围，一个充分条件是求出每个 r_i 的范围. 不失一般性，先求 r_1 的范围.

由条件（3），想到计算含有 1 的所有 3 元子集的个数 S_2.

一方面，从整体 S 入手，有 $S_2=C_{14}^2=91$. 另一方面，考察所有 r_1 个含 1 的

子集 A_i，每个这样的子集中有 $C_6^2=15$ 个含 1 的 3 元子集，于是共有 $15r_1$ 个含 1 的 3 元子集. 由条件(3) 可知，这样计算的含 1 的 3 元子集没有遗漏，所以 $15r_1 \geqslant S_2=91$，所以 $r_1 \geqslant 7$. 同理，对所有 $i=1, 2, \cdots, 15$，有 $r_i \geqslant 7$. 于是 $7n=\sum\limits_{i=1}^{15} r_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{15} 7=15\times 7$，所以 $n \geqslant 15$.

当 $n=15$ 时，令 $A_i=\{1+i-1, 2+i-1, 4+i-1, 5+i-1, 6+i-1, 11+i-1, 13+i-1\}$ $(i=1, 2, \cdots, 15)$，若集合中的数大于 15，则取其除以 15 的余数代之. 不难验证，这样的 15 个集合符合题目的所有条件.

综上所述，n 的最小值为 15.

例 4 有 8 位歌手参加艺术节，今要为他们安排 m 次演出，每次由其中 4 位登台表演，要求 8 位歌手中任意两位同时演出的次数都一样多. 请设计一种方案，使得演出的次数 m 最少(第 11 届中国数学奥林匹克试题).

分析与解 先看条件:"安排 m 次演出，每次由其中 4 位登台表演"，它等价于：有 m 个子集，每个集合都是 4 个元素. 再看条件:"任意两位同时演出的次数都一样多"，它等价于：每个 2 元子集在上述各 4 元子集中出现的次数相等，不妨设都是 r 次. 由此想到分别从这两方面出发，计算各演员出场的总次数 S.

一方面，m 次演出，每次由其中 4 位登台表演，于是 $S=4m$.

另一方面，设任意两名演员同时演出的次数都为 r，则 C_8^2 个 2 元对共出现 rC_8^2 次. 每个 2 元对出现 1 次对应于 2 个出场次数，于是共得 $2rC_8^2$ 次出场. 但 A 的每次出场都同时出现在 3 个含 A 的对子中，被计算 3 次. 于是 $S=\dfrac{2rC_8^2}{3}$，所以 $4m=S=\dfrac{2rC_8^2}{3}$，即 $6m=rC_8^2$，$3m=14r$，所以 $3\mid r$，$r\geqslant 3$. 所以 $3m=14r\geqslant 14\times 3=42$，所以 $m\geqslant 14$.

当 $m=14$ 时，如下安排合乎条件，故 m 的最小值为 14.

A	1234	1256	1278	1357	1368	1458	1467
A'	5678	3478	3456	2468	2457	2367	2358

注：如果计算对子出场的总次数 T，则可避免重复计数：

一方面，m 次演出，每次由其中 4 位登台表演，有 $C_4^2=6$ 个对子出场. 于是 $T=mC_4^2=6m$. 另一方面，设任意两名演员同时演出的次数都为 r，则 C_8^2 对共出场 rC_8^2 次. 所以 $6m=T=rC_8^2$. 下略.

例 5 地面上有 10 只鸟在啄食，其中任意 5 只鸟中至少有 4 只鸟在同一个圆周上. 有鸟最多的一个圆周上至少有几只鸟?(第 6 届中国数学奥林匹克试题)

分析与解　用点代表鸟.设有点最多的圆周上有 r 个点.显然有 $r \geqslant 4$.能否有 $r=4$?不妨先对 $r=4$ 进行探索.

若 $r=4$，即每个圆周上至多 4 个点，但我们考虑的圆是至少通过其中 4 个点的圆，所以每个"4 点圆"上都恰有 4 个点.

第一步：计算有多少个"4 点圆".注意到条件：任何 5 点组中都有 4 个点共圆，即每个"5 点组"都对应一个"4 点圆"，于是想到利用映射计算圆的个数.实际上，每个"5 点组"对应一个"4 点圆"，这样共有 $C_{10}^5=252$ 个"4 点圆".但每个"4 点圆"可属于 6 个不同的"5 点组"，被计数 6 次，从而"4 点圆"的个数为 $\frac{252}{6}=42$.这些"四点圆"是互异的.若否，有两个不同的四点组 $ABCD$ 及 $A'B'C'D'$ 在同一个圆周上，但 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 中至少有 5 个互异的点，这 5 个点共圆，与 $r=4$ 矛盾.

第二步：观察划分，选择中间量算两次.上述 42 个不同的 4 点圆可看作 42 个不同(可以相交)的子集，设为：$M_1, M_2, \cdots, M_{42}$，它们满足：$|M_i|=4$，$|M_i \cap M_j| \leqslant 2$.采用"加元技巧"，可计算其中三角形的个数 S.

一方面，$S=C_{10}^3=120$.另一方面，$S \geqslant 42C_4^3=168$，矛盾.所以 $r>4$.

设 M 是有点最多的圆，由 $r>4$ 知 M 上至少有 5 个点 A、B、C、D、E.下面证明：其他点(最多一个点除外)都在此圆周上.(＊)

实际上，反设有两个点 P、Q 不在圆 M 上，那么 P、Q、A、B、C 这 5 点中有 4 个点共圆.但 P、Q 都不在圆 ABC 上，只能是 P、Q 与 A、B、C 中的某两个点共圆，不妨设 P、Q、A、B 共圆 M_1.

同样考察 5 点 P、Q、C、D、E，必有 P、Q 与 C、D、E 中的某两个点共圆，不妨设 P、Q、C、D 共圆 M_2.再考察 5 点 P、Q、A、C、E，必有 P、Q 与 A、C、E 中的某两个点共圆.

(i) 若 P、Q、A、C 共圆 M_3，则 M_3 与 M_1 重合，所以 $PQABC$ 共圆，P、Q 在圆 M 上，矛盾.

(ii) 若 P、Q、A、E 共圆 M_3，则 M_3 与 M_1 重合，所以 $PQABE$ 共圆，P、Q 在圆 M 上，矛盾.

(iii) 若 P、Q、C、E 共圆 M_3，则 M_3 与 M_2 重合，所以 $PQCDE$ 共圆，P、Q 在圆 M 上，矛盾.

综上所述，结论(＊)成立，即 $r \geqslant 9$.最后，$r=9$ 是可能的，即 9 个点共圆，另一个点在圆外显然合乎条件.

综上所述，r 的最小值为 9.

注：本题有相当的难度，但当年的得分率却出乎意料的高.其原因是很容易猜出答案，使思维有明确的方向.只要否定了 $r=4$，即可发现 $r=9$，而构造

则是相当容易的.

我们还可进一步考虑：将题中的 10 个点推广到 n 个点，结论如何？

例 6　有 16 名学生参加考试，考题都是选择题，每题有 4 个选择支，考完后发现：任何两人至多有一道题答案相同，问最多有几道考题？（第 33 届 IMO 中国国家队选拔考试题）

分析与解　设共有 n 道试题，我们证明 $n_{\max}=5$.

对每一个题，16 个学生的答案构成一个长为 16 的只含有 1、2、3、4（答案代号）的数列，将 n 个题对应的数列排成一个 $n\times16$ 的数表.

注意到条件“任何两人至多有一道题答案相同”，可计算每一道题（每一行中）出现的相同答案构成的对子. 为叙述问题方便，对每一行，如果两个答案代号相同，则将这两个数字用一条线段连接，称之为同色线段. 设某一行有 x 个 1、y 个 2、z 个 3、t 个 4，其中 $x+y+z+t=16$，则该行共有 $C_x^2+C_y^2+C_z^2+C_t^2\geqslant C_4^2+C_4^2+C_4^2+C_4^2=24$（条）同色线段，于是 n 行至少有 $24n$ 条同色线段. 依题意，任何两条同色线段在第 n 行上的投影互不相同，于是 $24n\leqslant C_{16}^2=120$，所以 $n\leqslant5$.

若 $n=5$，则上述所有不等式都成立等号，于是，合乎条件的数表应满足以下两点：

(1) 每行 4 个 1、4 个 2、4 个 3、4 个 4；

(2) 不同的同色线段在第 n 行上的投影不重合.

不妨设第一行为 1111　2222　3333　4444（看成 4 组），则其他行的每一个组都是 1234 的一个排列（因为同色线段不重合）. 一种自然的排列是 1234，我们可在表中尽可能多地填入 1234，可发现第 2 行相应的组中都可填 1234，而第一组（前 4 列）除第一行外都可填 1234. 如此下去，即可得到如下合乎条件的数表，它表明 $n=5$ 是可能的.

学生 / 题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
2	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	1	2	3	4	4	3	2	1	3	4	1	2	2	1	4	3
4	1	2	3	4	2	1	4	3	4	3	2	1	3	4	1	2
5	1	2	3	4	3	4	1	2	2	1	4	3	4	3	2	1

注：本题原来的解答是采用整体估计处理的（见第 9 单元习题），这里采用算两次的技巧，不仅思路自然流畅，更重要的是为后面的构造指明了方向.

例7　n 个人在某个节日期间互通电话问候，已知其中每个人至多打通了3个朋友家的电话；任何2个人之间至多进行1次通话；且任何3个人中至少有2人，其中一人打通了另一个人家里的电话，求 n 的最大值.（原创题）

解　我们需要如下的引理.

引理：n 阶简单图 G 中不存在 K_3，则 $||G|| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

引理的证明：设 A 是各顶点中度最大的顶点，设与 A 相邻的点的集合为 $M=\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$，与 A 不相邻的点的集合为 $N=\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$ $(r+s+1=n)$. 由于 G 中无三角形，从而 G 在 M 中没有边，从而 G 的其他边都在 N 中或 M、N 之间，这样的边都是由顶点 $B_1, \cdots, B_s$ 引出的（图11－1).

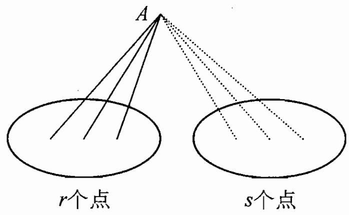


图 11－1

于是，$||G|| \leqslant \mathrm{d}(A)+\mathrm{d}(B_1)+\mathrm{d}(B_2)+\cdots+\mathrm{d}(B_s) \leqslant r+r+\cdots+r=(s+1)r \leqslant \left(\frac{s+r+1}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}$,

又 $||G|| \in \mathbf{Z}$，所以 $||G|| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

解答原题：用 n 个点表示 n 个人，如果一个人 A 打通了另一个人 B 家里的电话，则连一条从 A 到 B 的有向边，得到一个简单的有向图 G.

一方面，$\overline{G}$ 中无三角形，由引理有，$||\overline{G}|| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$，所以 $||G||=\mathrm{C}_n^2-||\overline{G}|| \geqslant \mathrm{C}_n^2-\left[\frac{n^2}{4}\right]=\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]$；另一方面，$||G||=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}^+(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}3=3n$，所以

$$\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right] \leqslant 3n. \qquad ①$$

当 n 为奇数时，①变为 $\frac{(n-1)^2}{4} \leqslant 3n$，解得 $n \leqslant 13$；当 n 为偶数时，①变为 $\frac{n^2-2n}{4} \leqslant 3n$，解得 $n \leqslant 14$.

综上所述，$n \leqslant 14$.

最后，$n=14$ 是可能的. 构造两个 K_7，对其中每个七边形 $A_1A_2\cdots A_7$，令 A_i 指向 $A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}$ $(i=1, 2, \cdots, 7, A_{i+7}=A_i)$，则构图合乎条件.

首先，每个点都恰引出3条有向出边，从而每个人至多打通了3个朋友家的电话；

其次，对任何3个点，由抽屉原理，必有两个点 A_i、A_j $(i<j)$ 在同一个 K_7 中，若 $j-i\leqslant 3$，则 A_i 打通了 A_j 家中的电话，若 $j-i>3$，则 A_j 打通了 A_i 家中的电话.

例8　有 A、B、C 三人进行乒乓球比赛，当其中两个人比赛时，另一个人作裁判，此场比赛中输者在下一场中当裁判，另两个人接着比赛. 比了若干场以后，已知 A 共比了 a 场，B 共比了 b 场，求 C 比的场数的最小值.（原创题）

解　设 C 共比了 c 场，则比赛的人次数之和为 $a+b+c$，但每场比赛产生2个比赛人次数，于是一共比赛 $\dfrac{a+b+c}{2}$ 场.

所以，C 当裁判的场数为 $\dfrac{a+b+c}{2}-c=\dfrac{a+b-c}{2}$.

因为若 C 在某场中当裁判，则他必在下一场中比赛，从而任何连续两场中 C 都不能连续当裁判，于是，$\dfrac{a+b-c}{2}\leqslant c+1$，解得 $c\geqslant\dfrac{a+b-2}{3}$.

又 c 为整数，所以 $c\geqslant\left[\dfrac{a+b-2}{3}+\dfrac{2}{3}\right]=\left[\dfrac{a+b}{3}\right]$.

当 $a+b=3k$ 时，$c\geqslant\left[\dfrac{a+b}{3}\right]=k$. 令 $a=2k$，$b=k$，用 (A, B, C) 表示 A、B 比赛，C 当裁判的场次，那么，所有比赛场次为 (A, B, C)，(A, C, B)，(A, B, C)，(A, C, B)，…，(A, B, C)，(A, C, B)，共比 $2k$ 场，此时 $c=k=\left[\dfrac{a+b}{3}\right]$；

当 $a+b=3k+1$ 时，$c\geqslant\left[\dfrac{a+b}{3}\right]=k$，但 $a+b+c\equiv a+b-c\equiv 0\pmod 2$，所以 $c\neq k$，于是 $c\geqslant k+1=\left[\dfrac{a+b}{3}\right]+1$. 令 $a=2k$，$b=k+1$，用 (A, B, C) 表示 A、B 比赛，C 当裁判的场次，那么，所有比赛场次为 (A, B, C)，(A, C, B)，(A, B, C)，(A, C, B)，…，(A, B, C)，(A, C, B)，$\underline{(B, C, A)}$，共比 $2k+1$ 场，此时 $c=k+1=\left[\dfrac{a+b}{3}\right]+1$；

当 $a+b=3k+2$ 时，$c\geqslant\left[\dfrac{a+b}{3}\right]=k$. 令 $a=2k+1$，$b=k+1$，用 (A, B, C) 表示 A、B 比赛，C 当裁判的场次，那么，所有比赛场次为 (A, B, C)，(A, C, B)，(A, B, C)，(A, C, B)，…，(A, B, C)，(A, C, B)，(A, B, C)，共比 $2k+1$ 场，此时 $c=k=\left[\dfrac{a+b}{3}\right]$.

综上所述，$c_{\min}=\begin{cases}\left[\dfrac{a+b}{3}\right] & (a+b\equiv 0,\ 2(\bmod 3));\\ \left[\dfrac{a+b}{3}\right]+1 & (a+b\equiv 1(\bmod 3)).\end{cases}$

例 9　设 $|X|=56$，对 X 的任意 15 个子集，只要它们中任何 7 个的并不少于 n 个元素，则这 15 个子集中一定存在其交非空的 3 个集合，求 n 的最小值.（2006 年中国数学奥林匹克试题）

解　$n_{\min}=41$.

首先证明 $n=41$ 合乎条件. 用反证法：假设存在 X 的 15 个子集，它们中任何 7 个的并不少于 41 个元素，而任何 3 个的交都为空集，则每个元素至多属于 2 个子集，不妨设每个元素恰属于 2 个子集（否则在一些子集中添加一些元素，上述条件仍然成立），由抽屉原理，必有一个子集，设为 A，至少含有 $\left[\dfrac{56\times 2}{15}\right]+1=8$ 个元素，又设其他 14 个子集为 A_1，A_2，…，A_{14}.

考察不含 A 的任何 7 个子集，都对应 X 中的 41 个元素，所有不含 A 的7 -子集组一共至少对应 $41C_{14}^7$个元素.

另一方面，对于元素 a，若 $a\notin A$，则 A_1，A_2，…，A_{14}中有 2 个含有 a，于是 a 被计算$(C_{14}^7-C_{12}^7)$次；若 $a\in A$，则 A_1，A_2，…，A_{14}中有 1 个含有 a，于是 a 被计算$(C_{14}^7-C_{13}^7)$次，于是，$41C_{14}^7\leqslant(56-|A|)(C_{14}^7-C_{12}^7)+|A|\cdot(C_{14}^7-C_{13}^7)=56(C_{14}^7-C_{12}^7)-|A|(C_{13}^7-C_{12}^7)\leqslant 56(C_{14}^7-C_{12}^7)-8(C_{13}^7-C_{12}^7)$，即$48C_{12}^7+8C_{13}^7\leqslant 15C_{14}^7$，化简得，$3\times 48+4\times 13\leqslant 15\times 13$，即 $196\leqslant 195$，矛盾.

其次证明 $n\geqslant 41$，用反证法.

假定 $n\leqslant 40$，设 $X=\{1,2,\cdots,56\}$，令 $A_i=\{x\in X\mid x\equiv i\ (\bmod 7)\}$ $(i=1,2,\cdots,7)$，$B_j=\{x\in X\mid x\equiv j\ (\bmod 8)\}$ $(j=1,2,\cdots,8)$，显然，$|A_i|=8$，$|A_i\cap A_j|=0(1\leqslant i<j\leqslant 7)$，$|B_j|=7$，$|B_i\cap B_j|=0(1\leqslant i<j\leqslant 8)$，此外，由中国剩余定理，$|A_i\cap B_j|=1(1\leqslant i\leqslant 7,1\leqslant j\leqslant 8)$. 于是，对其中任何 3 个子集，必有 2 个同时为 A_i，或同时为 B_j，其交为空集. 对其中任何 7 个子集，设有 $t\ (0\leqslant t\leqslant 7)$ 个为 A_i，$7-t$ 个为 B_j，则由容斥原理，这 7 个子集的并的元素个数为 $8t+7(7-t)-t(7-t)=49-t(6-t)\geqslant 49-9$(因为 $0\leqslant t\leqslant 7$) $=40$，于是任何 7 个子集的并不少于 40 个元素，但任何 3 个子集的交为空集，所以 $n\geqslant 41$.

综上所述，n 的最小值为 41.

习 题 11

1 1650 个学生排成 22 行、75 列. 已知其中任意两列处于同一行的两个人中，性别相同的学生都不超过 11 对. 证明：男生的个数不超过 928.（2003 年西部数学奥林匹克试题）

2 一次会议有 $12k$ 个人参加，每人恰与其中 $3k+6$ 个人打过招呼. 对任意两人，与他们打过招呼的人数都相等，问：此次会议有多少个人参加？（第 36 届 IMO 备选题）

3 有 n 名选手参加比赛，历时 k 天，其中任何一天 n 名选手的得分都恰好是 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的一个排列. 如果在第 k 天末，每个选手的总分都是 26. 求 (n, k) 的所有可能取值.

4 某班有 30 个学生，年龄互不相同，每个学生在同班中有相同个数的朋友. 对某个学生 A，若 A 的年龄比 A 的一半以上（不包括一半）朋友大，则称 A 为大龄的. 问大龄的学生最多有多少个？（第 20 届全俄数学奥林匹克试题）

5 若干学生参加考试，共 4 个选择题，每题有 3 个选择支. 已知：任何 3 个考生都有一个题，他们的答案各不相同. 求考生人数的最大值.（第 29 届 IMO 备选题）

6 给定 25 人，其中每 5 人可以组成一个委员会，且每两个委员会至多有一个公共成员. 求证：委员会的个数不多于 30 .（第 5 届全俄数学奥林匹克试题）

12 缩小包围圈

先找一个合乎条件的“大范围”，然后逐步缩小范围，使其范围仍然合乎条件，再思考范围在变化过程中为什么能继续合乎条件，找到使范围合乎条件的本质因素，由此使范围达到最佳估计；或者分析确定范围的各种因素，考察其中某些因素的“功能”(对范围的直接影响)是否可以优化或改进，从而使范围的估计更精确. 我们称这种估计方法为缩小包围圈.

例1 在$n\times n$棋盘C中，每格填一个数，表的边缘各格所填的数都为-1. 对其他的任何空格，填上与它同行或同列中它两侧最靠近它的已填的两个数的积. 求表中1的个数的最大值$f(n)$与最小值$g(n)$.(第20届全俄数学奥林匹克试题)

-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	a			b	-1
-1					-1
-1	e				-1
-1	d	f		c	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1

分析与解 首先，显然有$f(3)=g(3)=1$.

当$n>3$时，我们希望1尽可能多. 能否都为1？通过尝试，发现至少有一个-1. 实际上，考察紧靠外围一周-1的格，其中至少有一个格填-1. 否则，考察表中a、b、c、d四格，设其中最后一个填数的格是d. 而a、b、c三格都已填1，则d不论何时填数，都只能填-1，矛盾.

这样，$f(n)\leqslant(n-2)^2-1$.

其次，由行积，a处可填1，由列积，b处可填1，再由行积，e、c处可填1，又由列积，f处可填1，这样，d处填-1. 对其他各格，第二行和倒数第二行，都由行积可填1，其余的格都由列积可填1. 此时，共有$(n-2)^2-1$个1. 所以，

$f(n)=(n-2)^2-1$.

下面证明：$n>3$ 时，$g(n)=n-2$.

若 $g(n)=r\leqslant n-3$，则表中 r 个 1 至多占住 $n-3$ 行和 $n-3$ 列，于是在中间的 $n-2$ 行和 $n-2$ 列中，必有一行和一列都为 -1，但这是不可能的，因为它们的交叉处无法填入 -1，矛盾. 所以，$g(n)\geqslant n-2$.

另一方面，将第 2 列 $n-2$ 个格都填 1（按行填），再对每一行，从右至左按行可填 -1，此时表中共有 $n-2$ 个 1. 故 $g(n)=n-2$.

综上所述， $f(n)=\begin{cases}1 & (n=3);\\(n-2)^2-1 & (n>3).\end{cases}$

$g(n)=n-2$.

例 2 有 h 个 8×8 棋盘，每个棋盘上的格均可适当填上 1，2，3，…，64，每个格填一个数，使任何两个棋盘以任何方式重合时，相同位置上的数不同. 求 h 的最大值.（第 29 届 IMO 备选题）

分析与解 先看特殊情形. 考察 2×2 棋盘，我们发现两个这样的棋盘上任何两个格都有可能重合. 从而同一个棋盘上的 4 个格只能看作是一个类，同类中的格只能填互异的正整数.

所以 $h\leqslant\left[\dfrac{\text{填数的个数}}{\text{同类格的个数}}\right]=\left[\dfrac{2\times 2}{4}\right]=1$. 此时 h 的最大值为 1.

再考察 3×3 棋盘，如右表，棋盘上的格可以分为 A、B、C 三类，同一类中的任何两个格都有可能重合. 从而同一类中的格只能填互异的正整数. 注意到最大的类中有 4 个格. 所以 $h\leqslant\left[\dfrac{9}{4}\right]=2$.

B	C	B
C	A	C
B	C	B

当 $h=2$ 时，两个棋盘的填数如下：

2	6	3
9	1	7
5	8	4

1	2	6
5	9	3
8	4	7

所以 h 的最大值为 2.

再考察 4×4 棋盘，棋盘上的格可以分作 4 类，且同一类中的两个格位于两个不同的棋盘时均有可能重合. 从而同一类中的格的填数不能相同. 此时，最大的类有 4 个数，所以 $h\leqslant\left[\dfrac{16}{4}\right]=4$.

B	C	D	B
D	A	A	C
C	A	A	D
B	D	C	B

而 $h=4$ 时，只须 4 个棋盘的同类格中的数互不相同. 先填 4 个棋盘的 16

个 A 类格. 第一个棋盘的 A 类格填 1、2、3、4；第二个棋盘的 A 类格填 5、6、7、8；第三个棋盘的 A 类格填 9、10、11、12；第四个棋盘的 A 类格填 13、14、15、16. 再填 4 个棋盘的 B 类格. 第一个棋盘的 B 类格填 5、6、7、8；第二个棋盘的 A 类格填 9、10、11、12；第三个棋盘的 A 类格填 13、14、15、16；第四个棋盘的 A 类格填 1、2、3、4. 如此轮换，得 C、D 两类格的填法. 这种填法等价于将第一个棋盘的 A 类格填 1、2、3、4，B 类格填 5、6、7、8，C 类格填 9、10、11、12，D 类格填 13、14、15、16. 而第二个棋盘上的填数正好是第一个棋盘上的对应格的填数加 4(大于 16 者取除以 16 的余数)，第三个棋盘上的填数正好是第二个棋盘上的对应格的填数加 4(大于 16 者取除以 16 的余数)等等. 如下表：

5	9	14	6	9	13	2	10	13	1	6	14	1	5	10	2
13	1	2	10	1	5	6	14	5	9	10	2	9	13	14	6
12	3	4	15	16	7	8	3	4	11	12	7	8	15	16	11
8	16	11	7	12	4	15	11	16	8	3	15	4	12	7	3

由上讨论不难知道，8×8 棋盘的格可以分为 16 个不同的类，分别用 16 个字母 $A,B,\cdots,P$ 表示(如下表). 不同类的格不论以何种方式叠合棋盘都不会重合，而同类的格则有可能重合，于是同类格中要填互异的正整数.

J	K	L	M	N	O	P	J
P	E	F	G	H	I	E	K
O	I	B	C	D	B	F	L
N	H	D	A	A	C	G	M
M	G	C	A	A	D	H	N
L	F	B	D	C	B	I	O
K	E	I	H	G	F	E	P
J	P	O	N	M	L	K	J

每个棋盘的 A 类格 4 个格，所以 $h\leqslant\left[\frac{64}{4}\right]=16$. 而 $h=16$ 时，只须 16 个棋盘的同类格填数互不相同. 先填第一个棋盘的 64 个格. 第一个棋盘的 A 类格填 1、2、3、4；B 类格填 5、6、7、8；……，P 类格填 61、62、63、64. 而第二个棋盘上的填数正好是第一个棋盘上的对应格的填数加 4(大于 64 者取除以 64 的余数)，第三个棋盘上的填数正好是第二个棋盘上的对应格的填数加 4(大于 64 者取除以 64 的余数)等等. 64 个数正好填满同类格的 64 个格. 故 $h_{\max}=\left[\frac{8\times 8}{4}\right]=16$.

另一种构造方式是：将 64 个格分为 16 组：A_1，A_2，…，A_{16}，每组 4 个格. 对于第一个棋盘，第一组的 4 个格填 1、2、3、4，第二组的 4 个格填 5、6、7、8，第 16 组的 4 个格填 61、62、63、64. 对于第 i 个棋盘，将第 $i-1$ 个棋盘的第 j 组所填的数作为将第 i 个棋盘的第 $j+1$ 组填的数.

一般地，h 个棋盘，有 $4h$ 个格，这 $4h$ 个格都有可能重合，从而必须填互异

数，所以 $4h \leqslant n^2$. 所以 $h \leqslant \frac{n^2}{4}$，又$\frac{n^2}{4} \in \mathbf{Z}$，所以 $h \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$. 仿照类似的构造可使 $h = \left[\frac{n^2}{4}\right]$，故 $h(n) = \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

例 3　彩票上依次排列着 50 个空格，每个参加者都在彩票上填入 1 至 50 的整数（每个数在同一张彩票中恰出现一次），主持人亦填一张作底. 如果某人所填的数列有一个位置与底票上对应位置上填的数相同，则可中彩. 试问：一个参加者至少要填多少张彩票，才能保证自己一定中彩?（第 25 届全俄数学奥林匹克试题）

分析与解　若适当填 k 张彩票可以中彩，则称 k 是中彩的. 将所填的 k 张彩票排成 $k \times 50$ 的数表：

$$\begin{array}{cccccc}
 & a_1, & a_2, & a_3, & \cdots, & a_{50} \\
 & b_1, & b_2, & b_3 & \cdots, & b_{50} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & c_1, & c_2, & c_3, & \cdots, & c_{50} \\
\hline
\text{底票} & x_1, & x_2, & x_3, & \cdots, & x_{50},
\end{array}$$

所谓 k 是中彩的，即不论 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{50}$ 如何填，数表中至少有一个列，此列中至少有一个数与此列中的 x 相等. 我们称这样的数为好数. 这样，k 是中彩的，等价于存在 $k \times 50$ 数表，使表中至少有一个好数.

显然，$k = 50$ 是好的. 实际上，50×50 数表有 50 行、50 列，每行是 1，2，3，…，50 的一个排列，表中共有 50 个 1，我们可以将 50 个 1 占住 50 列，即每列一个 1. 这样，不论 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{50}$ 如何填，其中的 1 必与表中的某个 1 同列. 进一步，$k = 49$ 是好的. 可这样类似构造如下表：

1	2	3	4	…	49	50
49	1	2	3	…	48	50
48	49	1	2	…	47	50
…	…	…	…	…	…	…
2	3	4	5	…	1	50

因为底票中的数码 1，2，…，49 不能都填在最后一个位置上，即必有一个数码填在前面 49 个位置中，它必与某一行的相应数码相同. 由此我们发现，可让每个数 i 都占住每一列，这样，在此表的下方的任何一列填入 1，2，…，50 中的任何一个数，都必与该列中的一个数相等. 由此可见，只要构造如下的

数表：

$$\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & a-1, & a\\ 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots, & a, & 1\\ 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots, & 1, & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots, & \cdots, & \cdots\\ a, & 1, & 2, & 3, & \cdots, & a-2, & a-1\end{matrix}$$

而且底票上的数 $1, 2, \cdots, a$ 中至少有一个填入前 a 列，则前 k 列中必有一个好数. 要使底票上的数 $1, 2, \cdots, a$ 中至少有一个填入前 a 列，只须 $1, 2, \cdots, a$ 这 a 个数不能都填在后 $50-a$ 列，即 $50-a<a$，得 $a>25$. 所以，$a\geqslant 26$. 由此可见，$k=26$ 是中彩的.

下面证明 $k=25$ 不是中彩的. 实际上，考察 25×50 数表，我们证明可以适当地填一张底票 P：$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{50}$，使表中没有一个好数. 先填 P 中的数 1. 由于表中共有 25 个 1，有 50 列，必有一个列中没有 1，在此列中填 1 即可. 按此方法再依次填 $2, 3, \cdots, a-1$. 直至 a 不能按上述方法填入. 此时，必有 $a\geqslant 26$. 否则，$a<26$，P 中至多填了 $a-1\leqslant 24$ 个数，占了 24 个 P 中的格，但表中只有 25 个 a，占了 25 个格，共占了 $24+25$ 个格，P 中至少还有一个格可填 a，矛盾. 此外，由于表中只有 25 个 a，占了 25 个列，P 中至少还有 25 个格可填 a. 但 a 不能填入，意味着这 25 个格被先填入的 $1, 2, 3, \cdots, a-1$ 中的 25 个数（记为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{25}$）占住. 考察 P 中任一个空格 D，由于 D 所在的列只有 25 个数，于是 D 中至多有 25 个数不能填入. 这样，$a, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{25}$ 中至少有一个数可填入 D 中，但 a 不能填入 D，所以 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{25}$ 中必有一个数 x_i 可填入 D. 于是，将 x_i 填入 D，并将 a 填入 x_i 原来所在的位置，则底票上又新填入了一个数. 如此下去，可将底票的空格填满，使其中任何一个数都不与它所在列中任何一个数相同.

综上所述，k 的最小值为 26.

例 4　某歌舞团有 $n(n>3)$ 名演员，他们编排了一些节目，每个节目都由 3 个演员同台表演. 在一次演出中，他们发现：能适当安排若干个节目，使团中每 2 个演员都恰有一次在这次演出中同台表演，求 n 的最小值.（原创题）

解　用 n 个点表示 n 个演员，若某 2 个演员有一次同台表演则将对应的点连边，那么，本题的条件等价于：能将 n 阶完全图 K_n 分割为若干个 3 阶完全图 K_3，使每一条边都恰属于一个 K_3.

显然，$C_3^2 \mid C_n^2$，即 $6 \mid n(n-1)$，所以 $3 \mid n$，或 $3 \mid n-1$.

其次，（研究 n 的另外的性质，缩小包围圈），考察含点 A（以为顶点）的边，

共有 $n-1$ 条，每条边都恰属于一个 K_3，从而共有 $n-1$ 个含点 A(以为顶点)的 K_3. 但每个含点 A 的 K_3 都有 2 条含点 A 的边，从而每个 K_3 都被计算 2 次，于是 $2 \mid n-1$，所以 n 为奇数.

由上可知，$3 \mid n$(n 为奇数)，或 $6 \mid n-1$，即 $n=6k+3$，或 $6k+1$ $(k \in \mathbf{N}_+)$，于是 $n \geqslant 7$.

当 $n=7$ 时，将 7 个点用 0，1，2，3，4，5，6 表示，对 $m=0$，1，2，3，4，5，6，7，令 m、$m+1$、$m+3$ 组成一个 K_3(下标模 7 理解，也就是将 0、1、3 构成的 K_3 依次旋转 6 次)，则 7 个 K_3 是合乎条件的分割.

综上所述，n 的最小值为 7.

例 5　若自然数 n 满足这样的条件：存在由 n 个实数组成的数列，使得任何连续 17 个项之和为正，而任何连续 10 个项之和为负，求 n 的最大值.(改编题)

解　n 的最大值为 25.

先证明 $n \leqslant 25$，用反证法.

假设可以写出这样的 n 个实数：a_1，a_2，…，a_n，且 $n \geqslant 26$，则有如下性质：

(1) 任意连续 7 个项之和为正.

实际上，考察连续 7 个项之和 $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+7}$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-7)$，如果 $i \geqslant 10$，则因为 $(a_{i-9}+a_{i-8}+\cdots+a_i)+(a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+7})>0$，而 $a_{i-9}+a_{i-8}+\cdots+a_i<0$，所以 $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+7}>0$. 若 $i \leqslant 9$，则 $i+17 \leqslant 9+17=26 \leqslant n$. 因为 $(a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+7})+(a_{i+8}+a_{i+9}+\cdots+a_{i+17})>0$，而 $a_{i+8}+a_{i+9}+\cdots+a_{i+17}<0$，所以 $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+7}>0$.

(2) 任意连续 3 个项之和为负.

实际上，考察连续 3 个项之和 $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-3)$，如果 $i \geqslant 7$，则因为 $(a_{i-6}+a_{i-5}+\cdots+a_i)+(a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3})<0$，而 $a_{i-6}+a_{i-5}+\cdots+a_i>0$，所以 $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}<0$. 若 $i \leqslant 6$，则 $i+10 \leqslant 6+10=16 \leqslant n$. 因为 $(a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3})+(a_{i+4}+a_{i+5}+\cdots+a_{i+10})<0$，而 $a_{i+4}+a_{i+5}+\cdots+a_{i+10}>0$，所以 $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}<0$.

(3) 任意连续 4 个项之和为正.

实际上，考察连续 4 个项之和 $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4}$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-4)$，如果 $i \geqslant 3$，则因为 $(a_{i-2}+a_{i-1}+a_i)+(a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4})>0$，而 $a_{i-2}+a_{i-1}+a_i<0$，所以 $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4}>0$. 若 $i \leqslant 2$，则 $i+7 \leqslant 2+7=9 \leqslant n$. 因为 $(a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4})+(a_{i+5}+a_{i+6}+a_{i+7})>0$，而 $a_{i+5}+a_{i+6}+a_{i+7}<0$，所以 $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4}>0$.

(4) 每个项都为正.

实际上，考察任意一个项 $a_i (i=1, 2, \cdots, n)$，如果 $i \geqslant 4$，则因为 $(a_{i-3}+a_{i-2}+a_{i-1})+a_i>0$，而 $a_{i-3}+a_{i-2}+a_{i-1}<0$，所以 $a_i>0$. 若 $i \leqslant 3$，则 $i+3 \leqslant 3+3=6 \leqslant n$. 因为 $a_i+(a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3})>0$，而 $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}<0$，所以 $a_i>0$.

显然(4)与“任何连续 10 个项之和为负”矛盾，所以 $n \leqslant 25$.

此外，$n=25$ 时，我们可以构造出这样的 25 个实数.

设 25 个合乎条件的实数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{25}$，我们先研究它应满足的若干必要条件. 从前面的论证可知，对 $i=0, 1, 2, \cdots, 25-7$，除 $i=9$ 外，任意连续 7 个项之和 $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+7}$ 为正，于是除 $i=6$、16 外，任意连续 3 个项之和 $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}$ 为负，为了使构造简单，我们可综合考虑对称构造、周期构造和待定参数构造技巧，设 25 个实数为

$a, a, b, a, a, b, c, c, c, b, a, a, d, a, a, b, c, c, c, b, a, a, b, a, a,$

其中 a、b、c、d 为待定参数，满足 $a+a+b<0$，取 $a=1$, $b=-3$ 实验，则数列变为

$1, 1, -3, 1, 1, -3, c, c, c, -3, 1, 1, d, 1, 1, -3, c, c, c, -3, 1, 1, -3, 1, 1.$

为了使任何连续 10 个项之和为负，要求 $d+(1+1-3)+3c+(-3+1+1)<0$，即 $d+3c<2$；

为了使任何连续 17 个项之和为正，要求 $(1-3)+3c+(-3+1+1)+d+(1+1-3)+3c+(-3+1)>0$，即 $d+6c>6$. 所以 $6-6c<d<2-3c$，由 $6-6c<2-3c$，得 $c>\frac{4}{3}$，取 $c=1.5$，则 $-3<d<-2.5$，于是，取 $d=-2.6$，得到如下构造：

$1, 1, -3, 1, 1, -3, 1.5, 1.5, 1.5, -3, 1, 1, -2.6, 1, 1, -3, 1.5, 1.5, 1.5, -3, 1, 1, -3, 1, 1.$

为了得到各项绝对值较小的整数序列，取 $d=-2.75$，构造变为：

$1, 1, -3, 1, 1, -3, 1.5, 1.5, 1.5, -3, 1, 1, -2.75, 1, 1, -3, 1.5, 1.5, 1.5, -3, 1, 1, -3, 1, 1.$

再将每个数乘以 4，得到如下构造：

$4, 4, -12, 4, 4, -12, 6, 6, 6, -12, 4, 4, -11, 4, 4, -12, 6, 6, 6, -12, 4, 4, -12, 4, 4.$

注：在上述构造中，如果令 $a=c$, $b=d$，则所构造的数列为

$a, a, b, a, a, b, a, a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a, a, b, a, a, b, a, a,$

其中 a、b 为待定参数，满足 $a+a+b<0$, $2(a+a+b)+3a+b<0$,

$6(a+a+b)-b>0$，取 $a=8$，$b=-19$ 即可.

于是，得到的另一个合乎条件的数列为：

8，8，−19，8，8，−19，8，8，8，−19，8，8，−19，8，8，−19，8，8，8，−19，8，8，−19，8，8.

习 题 12

1 设 A 是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 16\}$ 的一个 k 元子集，且 A 的任何两个子集的元素之和不相等. 而对于集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 16\}$ 的包含集合 A 的任意 $k+1$ 元子集 B，则存在 B 的两个子集，它们的元素之和相等. (1) 证明：$k\leqslant 5$；(2) 求集合 A 的元素之和的最大值与最小值.（2002 年保加利亚冬季数学竞赛试题）

2 议会中有 2000 名议员，他们决定审核财政预算，共有 200 项开支. 各名议员都准备一份预算草案，列出各项支出的数额. 各位列出的数额的总数都不超过 S. 议会审议时，均将之确定为至少 k 名议员所同意的数目（即 k 名议员列出的数额均不低于通过的数目）. 试问：至少应将 k 确定为多少，才能保证通过的总额不超过 S?（第 54 届莫斯科数学奥林匹克试题）

3 有 $n(n\geqslant 5)$ 支球队参加足球联赛，每两支球队都恰比赛一场. 规定胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分. 联赛结束后，有一些球队可能会被取消比赛资格，因此他们的比赛结果也会被取消. 剩下的球队中，如果一个队的积分多于其他任何球队，则该队成为这次联赛的冠军（如果只有一支球队没有被取消资格，则他就是冠军队）. 记为了让第 i 支球队获得冠军而需要取消比赛资格的球队数的最小值为 f_i，求 $F=f_1+\cdots+f_n$ 的最大值与最小值.（第 53 届白俄罗斯数学奥林匹克试题）

13 考察特例

所谓考察特例，是指考察问题包含的一些简单的特殊情形，从中发现解题途径. 它常包括如下 4 种情形：

情形 1 考察"最坏"的特例——一种最特殊的情况.

情形 2 由充分条件、必要条件寻找特例. 对此，一个找使性质 P 成立的充分条件的方法是：假设所求对象不满足要求 P，由此导出若干性质，然后设法破坏其中一个性质即可.

情形 3 先考虑原问题在特殊情况下如何解决，然后将一般情况变换到特殊情况处理.

情形 4 由特殊情况发现一般规律，猜想问题的结论，最后用数学归纳法加以证明.

例 1 某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 c_i 名学生 $(1 \leqslant c_i \leqslant 39)$ 到体育馆看球赛，其中 $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1990$. 看台上每排有 199 个座位，要求同一学校的学生坐在同一排. 问：最少要安排多少个排，才能使所有学生一定能够坐下？(1990 年全国高中数学联赛试题)

分析与解 先考虑最坏的情况是什么. 所谓情况最坏，是指每个横排空下来的位置最多. 显然，如果各校的人数有多有少，是比较好安排的，因为剩下的空位可以让人数少的学校的学生坐. 于是，较坏的情况是每所学校派出的人数较多而又比较"整齐". 于是，可先设想所有学校派出的人数相等. 假定每所学校都派出 r 人，我们考察 r 为何值时，会使横排空余的位置最多. 列表估计如下：

各学校所派人数 r	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	$r \leqslant 28$
每排可安排学校个数	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	…
每排空余位子数 t	4	9	14	19	24	29	1	7	13	19	25	$t \leqslant 28$

由上表可知，当每所学校派出的人数都为 34 时，每个横排的空位最多，为

29. 注意到 $1990=34\times58+18$. 于是，先考察有 58 所学校各派 34 人，另一所学校派 18 人的情形，看需要多少个横排. 此时，每个横排最多坐 6 所学校，而且坐 6 所学校的排只能有一排，即坐派了 18 人的学校的那一排. 于是，所需要的排数至少是 $1+\left[\frac{58-6}{5}\right]+1=12$.

最后，我们证明，对任何情形，12 排是足够的. 最自然的一个排法如下：

先排第一排，使第一排的空位数 x_1 最小. 再排第二排：又使第二排的空位数 x_2 最小. 显然 $x_1\leqslant x_2$. 否则，$x_1>x_2$，将第 2 排的学生坐到第 1 排，可使第 1 排的空位数减少，这与 x_1 的最小性矛盾. 如此下去，直至排第 11 排，使第 11 排的空位数 x_{11} 最小. 我们证明，按这样的排法，必定可将剩下的所有学生都排在第 12 排.

实际上，设排完 12 排以后还有 x 人没有排下，则 $x>x_{12}$. 否则，将此 x 人坐在第 12 排即可. 所以，$x=1990-\sum\limits_{i=1}^{12}(199-x_i)\geqslant x_{12}$，由此得 $x_1+x_2+\cdots+x_{11}>398$，所以，$398<x_1+x_2+\cdots+x_{11}\leqslant 11x_{11}$，所以，$x_{11}\geqslant37$. 这表明：第 12 排中各校的学生人数都至少是 38 人（任何一个学校的学生都不能坐在前一排的 x_{11} 个空位上）. 又每所学校至多派 39 人，从而坐在第 12 排的学校所派的学生都是 38 或 39 人. 注意到 $5\times39<199<6\times38$，于是第 12 排中恰好坐了 5 个学校的学生. 设其中有 k 个学校来 38 人，$5-k$ 个学校来 39 人（$0\leqslant k\leqslant 5$），则第 12 排的空位数为

$$199-k\times38-(5-k)\times39=199+k-5\times39=4+k\leqslant9.$$

但 $x_{11}\geqslant37$，将第 12 排的学生坐到第 11 排，可使第 11 排的空位数减少，与 x_{11} 是最少的矛盾.

注：我们还有一种更直观的排法：先安排前 10 排，一个个学校的学生就座，直至某行再坐不下任何一个学校的学生为止. 再坐第二排，如此下去，先坐好前 10 排. 我们来估计还剩下多少学校的学生没有安排座位. 不难知道，没有就座的学校至多有 9 个. 否则，至少有 10 所学校的学生没有安排座位. 由于每所学校的学生都不能安排在前 10 排中的任何一排就座，这意味着剩下的任何一所学校的学生与前 10 排中任何一排坐的学生之和多于 199 个. 这样，总人数就多于 1990，矛盾. 所以，安排 10 个横排以后，至多剩下 9 所学校，而每个横排至少坐 5 个学校的学生（$5\times39<199$），用两个横排可以将剩下的学生全部坐下.

例 2　在 $n\times n$ 棋盘上放有 r 只棋，每个格最多一只棋. 若 r 只棋具有如下的性质 p：每行每列至少有一只棋. 但去掉其中任何一只棋，则它们便不再具

有上述的性质 p. 求 r 的最大值 r_n.

分析与解　先考虑简单情形. 为了叙述问题的方便，对于具有性质 p 的棋盘，如果去掉其中一只棋以后，棋盘仍然具有性质 p，则称那只棋为可去棋.

当 $n=2$ 时，$r_2<3$，否则，棋盘上放3只棋，必有一个角上的棋为可去棋. 矛盾.

当 $n=3$ 时，$r_3<5$. 否则，棋盘上放5只棋，必有一行有两只棋. 不妨设第一行的前两格都有一只棋 a_{11}、a_{12}. 此时，第一和第二列都不能再有棋. 比如第一列还有一只棋 A，则棋 a_{11} 可去. 若第二列有一只棋 B，则棋 a_{12} 可去. 这样剩下的3只都在第三列，此时，位于第一行第三列的棋 a_{13} 是可去棋.

一般地，对自然数 n，我们猜想有 $r_n<2n-1$.

实际上，由上面的证明过程可知，若某个行有两只棋 a、b，则棋 a、b 所在的列无其他的棋. 比如，若 a 所在的列还有一只棋，则 a 是可去棋，矛盾. 利用此性质，可适当去掉一行一列，将 n 的问题化归为 $n-1$ 的问题.

下面证明 $r_n<2n-1$. 即证明如下的结论：

若棋盘中至少放有 $2n-1$ 只棋，则棋盘上必有可去棋. (＊)

证法1：对 n 用归纳法.

设结论(＊)对小于 n 的自然数成立. 考察 $n\times n$ 棋盘，为了利用归纳假设，应去掉一行和一列，且使剩下的棋盘中至少 $2n-3$ 只棋. 这就要求去掉的行和列中一共只包含有2只棋. 因此，我们要找到恰有一只棋的行和列. 但棋盘中的棋子数不少于 $2n-1$，并不意味着棋盘中的棋子数为 $2n-1$. 因此，不能由抽屉原理找到恰有一只棋的行和列. 注意到前面所证的结论：若某个行有两只棋，则这两只棋所在的列没有棋. 由此便可找到合乎要求的列.

由于棋盘中至少有 $2n-1$ 只棋，由抽屉原理，至少有一行有两只棋. 不妨设第一行的前两格各有一只棋 a、b(图13-1). 此时，第一、第二列不能再有棋. 比如第一列还有一只棋则棋 a 可去. 第二列有一只棋，则棋 b 可去. 这样剩下的 $2n-3$ 只都在后 $n-2$ 列，由抽屉原理，必有某个列有两只棋. 不妨设第3列的第 i 格和第 j 格各有一只棋 c、d，其中 i、j 中至少有一个不为1. 不妨设 $i\neq1$，则 c 所在的行不能再有棋，否则棋 c 可去. 这样，a 所在的列只有一只棋，c 所在的行只有一只棋. 去掉这行和这列，对剩下的棋盘使用归纳假设，命题(＊)获证.

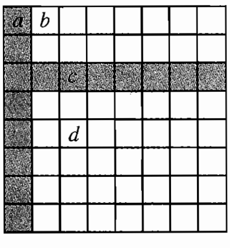


图 13-1

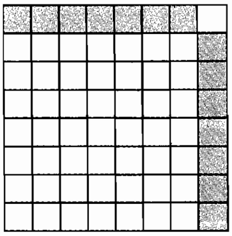


图 13-2

最后，由图 13-2 可知，$r=2n-2$ 是可能的. 故 $r_n=2n-2$.

证法 2：为了找到可去棋，先考虑棋在什么条件下可去.

如果 A 是可去棋，则 A 所在的行至少 2 只棋，A 所在的列也至少 2 只棋. 于是，可取定至少有 2 只棋的行，再从中找有 2 只棋的列.

设第 i 行的棋子数为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2n-1$. 因为每行至少一只棋，所以 $a_1=1$.

假定 $a_1=a_2=\cdots=a_i=1(1\leqslant i\leqslant n-1)$，$2\leqslant a_{i+1}\leqslant a_{i+2}\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则

$$\begin{aligned}a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n&=2n-1-(a_1+a_2+\cdots+a_i)\\&=2n-1-i\\&=n+(n-1-i)\geqslant n.\end{aligned}$$

前 i 行的 i 只棋最多占住 i 个列(图 13-3 的阴影方格所示)，不妨设这 i 只棋都在前 $k(k\leqslant i)$ 列中. 如果后 $n-i$ 行中有一只棋 A 在前 k 列中，由于 A 所在的行至少有 2 只棋，所以 A 可去. 如果后 $n-i$ 行的棋都在后 $n-k$ 列中，但 $n-k<n$，而 $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n\geqslant n$，所以必有一列有 2 只棋 B、C，但 B 所在的行也有 2 只棋，所以 B 可去.

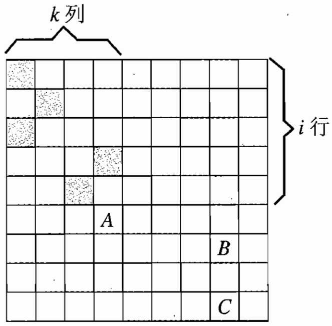


图 13-3

例 3　在 19×89 棋盘中最多可以放多少只棋，使任何 2×2 的矩形内不多于 2 只棋.

分析与解　注意到 19 和 89 都是奇数，从而可以考虑一般的 $(2m-1)\times(2n-1)$ 棋盘(其中 m、n 中至少一个大于 1). 可以考虑对 m 归纳. 设棋盘中可以放的棋数的最大值为 r_m.

(1) 当 $m=1$ 时，每个格都可以放棋，所以，$r_1=2n-1$.

(2) 当 $m=2$ 时，由图 13-4 所示的放法可以猜想：$r_2=2(2n-1)$，即 $3\times(2n-1)$ 棋盘最多可以放 $4n-2$ 只棋.

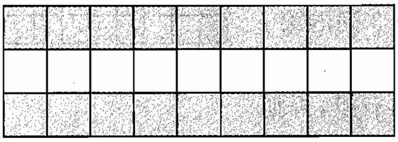


图 13-4

由于 $3\times(2n-1)$ 棋盘要去掉两行才能化为 $1\times(2n-1)$ 棋盘. 那么去掉

的两行中至多有多少只棋呢?为此,我们要研究一下 $2\times(2n-1)$ 棋盘,而这是我们已经跳过了的情形.这种情形对于研究 $3\times(2n-1)$ 棋盘也许有帮助.因此,我们回头看看 $2\times(2n-1)$ 棋盘.

由图 13-5,在 $2\times(2n-1)$ 棋盘中,有 $r\leqslant 2n$,且等号只能以图 13-5 的方式唯一实现.

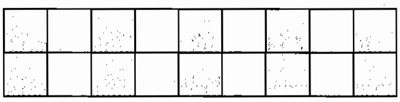


图 13-5

实际上,第一列至多有两只棋,而后 $2n-2$ 列可以划分为 $n-1$ 个 2×2 棋盘,每个 2×2 棋盘至多可以放 2 只棋.所以,$r\leqslant 2+2(n-1)=2n$.若 $r=2n$,则第一列必有两只棋,且每个 2×2 棋盘中都恰有 2 只棋.于是,第一列有两只棋,则第二列中无棋,于是第三列中有两只棋.如此下去,所有奇数列中都有两只棋,而所有偶数列中都没有棋.即等号以唯一的方式出现.

现在考虑 $3\times(2n-1)$ 棋盘.我们要证明 $r\leqslant 2(2n-1)$.很自然地,应将 $3\times(2n-1)$ 棋盘化为一个 $2\times(2n-1)$ 棋盘(简称为 A 盘)和一个 $1\times(2n-1)$ 棋盘(简称为 B 盘)处理.

由前面的讨论可知,$r_A\leqslant 2n$, $r_B\leqslant 2n-1$. 所以

$$r=r_A+r_B\leqslant 4n-1. \qquad ①$$

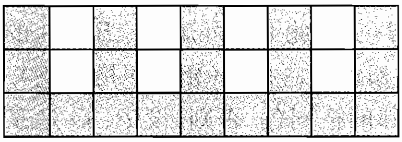


图 13-6

若 ① 成立等号,则 $r_A=2n$, $r_B=2n-1$. 此时,棋盘中棋的放置如图 13-6 所示,但其中有一个 2×2 正方形放了 3 只棋.矛盾.所以,$r\leqslant 4n-2$.

以上证明存在一个漏洞:要使棋盘中有 2×2 正方形,必须 $n>1$,即棋盘中至少要有两列.因此,要优化假设:$m\leqslant n$.此时,必有 $n\geqslant m>1$.

一般地,对 $(2m-1)\times(2n-1)$ 棋盘,若 $m\leqslant n$,我们证明:$r\leqslant m(2n-1)$.

对 m 归纳.当 $m=1$ 时,结论显然成立,设结论对于小于 m 的自然数成立,考察 $(2m-1)\times(2n-1)$ 棋盘,我们将之划分为一个 A 盘:$2\times(2n-1)$ 棋盘和一个 B 盘:$(2m-3)\times(2n-1)$ 棋盘.由前面的讨论和归纳假设可知 $r_A\leqslant 2n$,$r_B\leqslant(m-1)(2n-1)$,所以

$$r=r_A+r_B\leqslant 2n+(m-1)(2n-1)=m(2n-1)+1. \qquad ②$$

若②式成立等号,则 $r_A=2n$, $r_B=(m-1)(2n-1)$. 由 $r_A=2n$ 知,整个 $(2m-1)\times(2n-1)$ 棋盘的第一行中恰有 n 只棋,于是,将后 $2m-2$ 行划分为

$m-1$ 个 $2\times(2n-1)$ 棋盘，每个 $2\times(2n-1)$ 棋盘中不多于 $2n$ 只棋，于是，棋盘中的棋子的个数 $r\leqslant n+2n(m-1)=2mn-n\leqslant 2mn-m=m(2n-1)$，与 $r=m\cdot(2n-1)+1$ 矛盾．所以，②式不成立等号．即 $r\leqslant m(2n-1)$．命题获证．

最后，将棋盘的奇数行的每个格都放一只棋，有 $r=m(2n-1)$，所以 $r_m=m(2n-1)$．特别地，令 $m=10$、$n=45$，有 19×89 棋盘中至多可放 890 只棋．

例 4 一个 9×9 的棋盘的方格被染成黑白两种颜色，使得与每个白格相邻的格中黑格的数目多于白格的数目，与每个黑格相邻的格中白格的数目多于黑格的数目（至少有一条公共边的两格称为相邻）．求所有这样的染色方式中，黑、白格数目之差的最大值．（第 53 届白俄罗斯数学奥林匹克试题）

分析与解 要使染色满足条件，则每个方格至多有一个邻格的颜色与其相同，因而不能出现如下一些特殊情形：(1) 3－L 型的 3 个方格同色．(2) 1×3 的矩形的 3 个方格同色．

如果棋盘中任何 2 个相邻方格的颜色不同，则黑、白格数目之差不大于 1．

如果棋盘中存在 2 个相邻方格 A、B 的颜色相同，不妨设 A、B 在同一行（图 13－7 所示）．考察与这行相邻的行，由于棋盘中没有同色的 3－L 型，所以此行中与 A、B 相邻的两个方格与 A、B 异色．如此下去可知，A、B 所在的两列中，同行的两个方格都同色，同列的方格颜色黑白相间（相邻两格异色）．下面证明，棋盘的任何一列中都没有两个相邻的格同色．否则，设 P、Q 是某列中相邻的方格，P、Q 同色，同上可证，P、Q 所在的两行中，同列的两个方格都同色、同行的方格颜色黑白相间．此时，考察 A、B 两列与 P、Q 两行交叉的 4 个格，由于同行同色且同列同色，所以 4 个格同色，矛盾．所以整个棋盘的每一列的方格的颜色都是黑白相间．

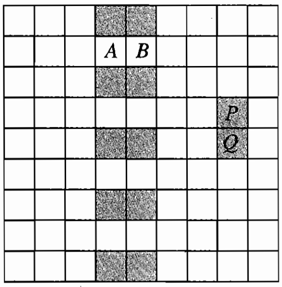


图 13－7

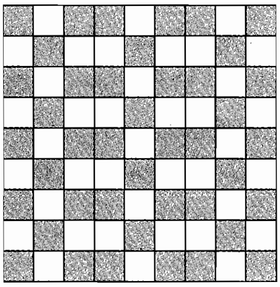


图 13－8

去掉第一行，则剩下的棋盘的每一列中黑、白格数目相等，从而剩下的棋盘中所有方格黑、白格数目相等. 而在第一行中，由于没有同色的 1×3 矩形，所以每 3 个格中黑白格数目之差不大于 1，于是第一行中黑白格数目之差不大于 3.

所以，对任何合乎条件的染色，棋盘中黑、白格数目之差不大于 3. 又如图 13－8 的染色符合要求，此时黑白格个数之差为 3.

综上所述，所求的最大值为 3 .

例 5 设正整数 $n\geqslant 3$，a_1，a_2，…，a_n 是任意 n 个互异的实数，其和为正数. 如果它们的一个排列 b_1，b_2，…，b_n 满足：对任意的 $k=1$，2，…，n，均有 $b_1+b_2+\cdots+b_k>0$，则称这个排列是好的. 求好的排列个数的最小值.（2002 年保加利亚国家数学奥林匹克地区级竞赛试题）

分析与解 考察最坏情形：对 $k=1$，2，…，n，$b_1+b_2+\cdots+b_k>0$ 都很难满足，这只需 a_1，a_2，…，a_n 中的负数尽可能多. 取 a_2，…，a_n 均为负数，而 $a_1=-a_2-\cdots-a_n+1$. 此时任何一个好的排列 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，均有 $b_1=a_1$，而 b_2，…，b_n 可以是 a_2，…，a_n 任意排列，故此时有 $(n-1)!$ 个好的排列.

下面证明至少有 $(n-1)!$ 个好的排列. 注意到 $(n-1)!$ 是将 a_1，a_2，…，a_n 排在圆周上的不同圆排列的个数，我们先证明每一个圆排列对应一个好排列. 为方便，称好排列的首项为好数. 我们只需证明每个圆排列中必存在一个好数.

方法 1：对 n 归纳. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 假设对一切 $n<k$ 结论成立，考虑 $n=k$ 的情况. 若所有数都为正，则结论显然成立，是因每个数都是好数. 若至少存在一个非正数，但 $a_1+a_2+\cdots+a_k>0$，所以至少有一个正数. 将每一个正数和按逆时钟顺序在它之后的下一个正数之间的所有数编为一组，每组至少有一个数，且至少有一组有至少两个数（由于不是所有数都为正），故至多有 $k-1$ 组. 对每组数求和，得到少于 k 个和. 将这些和按它们所在组的顺序写在圆周上，由于这些和的总和为正，由归纳假设知，这些和中存在一个和为好数. 考虑这个和所在的组中的那个正数，则这个数是整个圆排列中的好数. 由归纳原理，结论成立.

方法 2：利用极端性原理. 对任何一个圆排列 $(b_1，b_2，\cdots，b_n)$，考察所有以 b_i 为首项的部分和：$b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{i+t}$，其中大于 n 的下标取模 n 的余数. 对所有 $i=1$，2，…，n 和所有 $t=0$，1，2，…，$n-1$，必存在一个最小的部分和 $b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{i+t}$. 因为至少存在一个非正数，所以 $b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{i+t}\leqslant 0$. 在所有这样的最小和中又设项数 $t+1$ 最大的一个为 $b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{i+t}$，我们证明 b_{i+t+1} 是好数.

实际上，若存在正整数 k，使 $b_{i+t+1}+b_{i+t+2}+\cdots+b_{i+t+k}\leqslant 0$，则 $(b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{i+t})+(b_{i+t+1}+b_{i+t+2}+\cdots+b_{i+t+k})\leqslant b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{i+t}$，这与和 $b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{i+t}$ 最小且项数最多矛盾.

由于共有 $(n-1)!$ 个圆排列，而每个圆排列至少对应一个好排列，且不同的圆排列对应的好排列是不同的，故至少有 $(n-1)!$ 个好的排列.

综上所述，所求的最小值为 $(n-1)!$.

例6　岛上住着 n 个本地人，他们中每两个人要么是朋友，要么是敌人. 一天，首领要求每位居民(包括首领自己)按以下原则自己做一条石头项链：每两个朋友间，他们的项链上至少有一块石头相同；每两个敌人间，他们的项链上没有相同的石头(一条项链上可以无石头). 求证：要完成首领的命令，需要 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ 种不同的石头；而石头种数少于 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ 时，此命令可能无法实现. (2002年克罗地亚国家数学竞赛试题)

分析与解　当 $n=1$ 时，结论显然成立. 设 $n>1$，记需要的不同石头种数的最小值为 S_n. 当 $n=2$ 时，设两个人为 A、B，如果 A、B 是敌人，则 $S_2=0$. 如果 A、B 是朋友，则 $S_2=1$. 结论成立. 当 $n=3$ 时，设三个人为 A、B、C，如果 A、B、C 两两是敌人，则 $S_3=0$. 如果 A、B、C 两两是朋友，则 $S_3=1$. 如果 A、B、C 中有一个二人组是朋友，另两个二人组是敌人，则两个为朋友的二人组需要 1 种石头，此时 $S_3=1$. 如果 A、B、C 中有一个二人组是敌人，另两个二人组是朋友，则两个为朋友的二人组需要 2 种不同的石头. 否则，3 人拥有同一种石头，但其中有两个人是敌人，矛盾，此时 $S_3=2$.

由前面的一些特例，我们发现一个有用的规律：如果 3 个人中有一个二人组是敌人，另两个二人组是朋友，则两个为朋友的二人组需要 2 种不同的石头.

再考虑 $n=4$ 的情形，设四个人为 A、B、C、D，如果为朋友的二人组不多于 4，则 $S_4\leqslant 4$. 如果为朋友的二人组为 5，另一个二人组为敌人，不妨设 A、B 为敌人，则 ACD 是朋友三角形，设他们拥有同种的石头 1. BCD 是朋友三角形，设他们拥有同种的石头 2. 此时 A、B、C、D 的项链分别为 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，$\{1,2\}$，合乎条件. 此时 $S_4=2$. 如果 A、B、C、D 两两都是朋友，则 $S_4=1$.

现在考察何时有 $S_4=4$. 此时，显然有 4 个为朋友的二人组，另两个二人组为敌人. 如果为敌人的两个二人组有公共的人，不妨设 A、B 为敌人且 A、C 为敌人. 因为 BCD 是朋友三角形，设他们拥有共同的石头 1，再注意到 A、D 是朋友，设他们拥有共同的石头 2. 此时 A、B、C、D 的项链分别为 $\{2\}$，$\{1\}$，$\{1\}$，$\{1,2\}$，合乎条件，此时 $S_4=2$. 如果为敌人的两个二人组没有公共的人，不妨设 A、B 为敌人且 C、D 为敌人. 此时，A、B、C、D 被分为 2 组，每组 2 人，

同一组的 2 个人是敌人，而任何不同组的 2 个人都是朋友. 此时，每个为朋友的二人组对应一种石头，我们证明：4 个为朋友的二人组对应的石头互不相同. 实际上，如果某 2 个为朋友的二人组对应相同的石头，而这 2 个为朋友的二人组至少包含 3 个不同的人，他们拥有公共的石头. 但将 3 人归入前述的两组，必有 2 人在同一组，他们应该是敌人，矛盾. 于是 $S_4=4$.

有上述一些特例不难发现一般情况下的构造方法. 当 n 为奇数时，设 $n=2k+1$，将 n 个人分成两组，一组 k 人，另一组 $k+1$ 人，令同一组的任何 2 个人都是敌人，而任何不同组的任何 2 个人都是朋友. 此时，共有 $k(k+1)$ 个为朋友的二人组，每个为朋友的二人组对应一块石头，我们证明：$k(k+1)$ 个为朋友的二人组对应的石头互不相同. 实际上，如果某 2 个为朋友的二人组对应相同的石头，而这 2 个为朋友的二人组至少包含 3 个不同的人，他们拥有公共的石头. 但将 3 人归入前述的两组，必有 2 人在同一组，他们应该是敌人，矛盾. 于是，此时至少需要 $k(k+1)=\left[\frac{n^2}{4}\right]$块石头. 当 n 为偶数时，设 $n=2k$，类似地，将 n 个人分成两组，每组 k 人，则至少需要 $k^2=\left[\frac{n^2}{4}\right]$块石头.

下面证明，$S=\left[\frac{n^2}{4}\right]$时，可按要求构造项链. 对 n 归纳.

假定 $n=k$ 时结论成立，考虑 $n=k+1$ 的情形，我们来分析增量 $\Delta=S_{k+1}-S_k=\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]-\left[\frac{k^2}{4}\right]$. 为了便于计算 Δ，应讨论 k 的奇偶情况.

当 k 为奇数时，设 $k=2r+1$，此时，$\Delta=\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]-\left[\frac{k^2}{4}\right]=(r+1)^2-(r^2+r)=r+1=\frac{k+1}{2}$. 当 k 为偶数时，设 $k=2r$，此时，$\Delta=\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]-\left[\frac{k^2}{4}\right]=(r^2+r)-r^2=r=\frac{k}{2}$. 由此可见，由 k 到 $k+1$，增加的石头种数为$\frac{k+1}{2}$(当 k 为奇数时) 或$\frac{k}{2}$(当 k 为偶数时). 由此想到将原来 k 个人分成$\frac{k+1}{2}$(当 k 为奇数时) 或$\frac{k}{2}$(当 k 为偶数时) 组，每组不多于 2 人(k 为奇数时恰有一组为 1 人，其余各组都是 2 人，而 k 为偶数时，每组都是 2 人). 希望新增加 1 人 P 后，P 与每一组至多需要一块新的石头. 这一要求能否实现？如果某组中的 2 人与 P 都是敌人，则无需增加新石头. 如果该组中的 2 人与 P 一是朋友一是敌人，则将为朋友的 2 人各增加一块相同新石头即可. 但如果该组中的 2 人之间是敌人，而他们与 P 都是朋友呢，此时每人需要增加一块不同的新石头，需要 2 块新石头. 由此可见，与 P 都是朋友且互为敌人的 2 人不能在

同一组，但这样的分组也未必能实现，因为 P 的敌人个数也许比朋友个数多. 现在，换一个角度思考，如果固定某两个为朋友的人 A、B(假定这两人是新增加的)，则原来的每个人与 A、B 之间至多增加一块石头，因此采用 k 到 $k+2$ 的归纳方式即可完成证明.

假定 k 个人时结论成立，考虑 $k+2$ 个人的情形.

如果 $k+2$ 人中没有朋友，则结论显然成立(无需石头). 此外，设 A、B 是朋友，则由归纳假设，另 k 个人之间至多需要$\left[\frac{k^2}{4}\right]$种石头. 考察这 k 个人中任意一个人 P，P 与 A、B 构成一个 3 人组，我们证明此 3 人组只需增加一种新石头. 实际上，如果 A、B 与 P 都是敌人，则无需增加新石头. 如果 A、B 与 P 一是朋友一是敌人，则将为朋友的 2 人各增加一块新石头即可. 如果 A、B 与 P 都是朋友，则每人增加一块新石头即可. 由 P 的任意性可知，k 个人至多增加 k 种新石头. 又 A、B 之间至多需要一种新石头，所以 $k+2$ 人至多需要$\left[\frac{k^2}{4}\right]+k+1=\left[\frac{(k+2)^2}{4}\right]$种石头.

综上所述，命题获证.

例 7　设 m、n 为正整数，$m<2001$，$n<2002$. 有 2001×2002 个不同的实数，将这些数填入 2001×2002 棋盘的方格，使得每个方格内恰有一个数. 如果某个方格内的数小于其所在列的至少 m 个数，也小于其所在行的至少 n 个数，则将此方格称为“坏格”. 对所有填数方法，求坏格个数 S 的最小值. (2002 年越南数学奥林匹克试题)

分析与解　考察一种特殊情形：将 1，2，3，…，2001×2002 按自然顺序填入 2001×2002 的棋盘的方格(如下表)，此时坏格个数 $S=(2001-m)(2002-n)$.

1	2	…	2002
2003	2004	…	4004
…	…	…	…
$2000\times2002+1$	$2000\times2002+2$	…	2001×2002

我们猜想，S 的最小值为 $(2001-m)(2002-n)$. 一般地，对 $p\times q(m<p,n<q)$ 棋盘，S 的最小值为 $(p-m)(q-n)$. 下面用数学归纳法证明.

假定结论对 $p\times q$ 棋盘成立，考虑 $(p+1)\times q$ 棋盘. 为了利用归纳假设，应去掉一行，此行应有至少 $(p+1-m)(q-n)-(p-m)(q-n)=q-n$ 个坏格. 但一行中至多 $q-n$ 个坏格，因为该行中只有较小的前 $q-n$ 个数才小于该

行中至少 n 个数. 为叙述问题方便，如果一个格所填的数小于它所在的行至少 n 个数，则称这个格是“行坏”的，否则称为“行好的”. 类似定义“列坏”、“列好”的. 这样，坏格就是行坏列坏的格. 由上面的分析，我们需要有那样一行，它不含有行坏列好的格. 由对称性，也只需要有那样一列，它不含有列坏行好的格.

引理：$p\times q(m<p,\ n<q)$ 棋盘中要么存在这样一行，它不含有行坏列好的格；要么存在这样一列，它不含有列坏行好的格.

引理的证明：如果棋盘中没有行坏列好的格(或没有行好列坏的格)，此时每行(或每列)都符合要求. 如果既有行坏列好的格又有行好列坏的格，取出这些格中填数最小的一个格 A，不妨设它是行好列坏的，它所填数为 x. 若它所在的行有一个行坏列好的格 B，设 B 填的数为 y. 一方面，由 x 的最小性得 $x<y$. 另一方面，由于 A 是行好的而 B 是行坏的，有 $x>y$，矛盾. 引理获证.

下面证明：对任意 $p\times q(m<p,\ n<q)$ 棋盘，坏格的个数不少于 $(p-m)(q-n)$.

对 $p+q$ 归纳. 当 $p+q=m+n+2$ 时，由于 $p\geqslant m+1,\ q\geqslant n+1$，所以 $p=m+1,\ q=n+1$. 因为所有数中最小者所在的格必为坏格，故坏格个数不少于 $1=(p-m)(q-n)$，结论成立. 假设 $p+q=t$ 时结论成立，考虑 $p+q=t+1$ 时的情形. 由引理，不妨设存在一行，它不含行坏列好的格. 将这一行去掉，则成为一个 $(p-1)$ 行 q 列的棋盘. 由于 $p+q-1=t$，故由归纳假设，此棋盘中坏格不少于 $(p-1-m)(q-n)$ 个. 添上原来去掉的那一行，原来的坏格仍是坏格，而此行中的行坏格必是列坏格(由于此行不含行坏列好的格)，从而也必是坏格. 又此行中行坏格有 $(q-n)$ 个，故坏格总数不少于 $(p-1-m)(q-n)+q-n=(p-m)(q-n)$. 由归纳原理，命题获证.

对原题，坏格的个数不少于 $(2001-m)(2002-n)$. 结合前面的构造可知，坏格个数最小值为 $(2001-m)(2002-n)$.

例 8　正 2006 边形 P 的一条对角线称为好的，如果它的两端点将 P 的边界分成的两部分各含 P 的奇数条边. 特别地，称 P 的边也是好的.

设 P 被不在 P 的内部相交的 2003 条对角线剖分为三角形，试求这种剖分图中有两条边为好的等腰三角形个数的最大值.(第 47 届 IMO 试题)

解　称两条边为好的等腰三角形为好三角形，先考察特例.

对于正方形，本质上只有一种剖分，此时好三角形个数为 2；

对于正 6 边形，本质上只有 3 种剖分，此时好三角形个数最大值为 3，而且我们发现达到最大值时，好三角形的腰都是 P 的边.

对一般情况，不难发现，正 $2n$ 边形的剖分中好三角形个数最大值为 n.

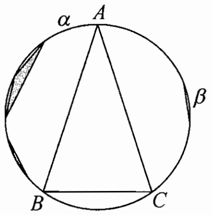
实际上，对于剖分图中的任一三角形 ABC，P 的边界被 A、B、C 分为 3 段，将 $A-B$ 段（按逆时钟方向从 A 到 B）所含 P 的边数记作 $m(AB)$，以此类推.

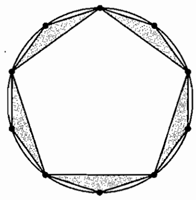
由于 $m(AB)+m(BC)+m(CA)=2006$，故等腰三角形若有两条好边，则恰有两条好边，且两条好边是两腰（否则 3 条边都是好边，矛盾）.

考虑任一好三角形 ABC，其中 $AB=AC$，若 $A-B$ 段上有别的好三角形，则将其两腰所截下的 P 的边全部去掉，则去掉的 P 的边数为偶数，如此下去，直至 $A-B$ 段上没有好三角形，由于 $A-B$ 段上共有奇数条边，至少有一条边 α 没有去掉（如果 AB 本身是 P 的一条边，则 $\alpha=AB$），α 不属于比 AB 小的腰段. 同理，$A-C$ 段上也去掉若干个好三角形后有 P 的一边 β 不属于比 AC 小的腰段，令 $\triangle ABC$ 对应于 2 元集 $\{\alpha, \beta\}$.

对于同一剖分中的两个不同的好三角形 $\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$，它们对应的 2 元集分别为 $\{\alpha, \beta\}$、$\{\alpha_1, \beta_1\}$. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 不位于 $\triangle ABC$ 的腰段，则 $\triangle A_1B_1C_1$ 位于 $\triangle ABC$ 的 $B-C$ 段，此时，$\{\alpha, \beta\}$ 中的边在 $\triangle ABC$ 的腰段上，$\{\alpha_1, \beta_1\}$ 中的边在 $\triangle ABC$ 的 $B-C$ 段上，所以 $\{\alpha, \beta\}$ 与 $\{\alpha_1, \beta_1\}$ 没有公共的边；如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 位于 $\triangle ABC$ 的腰段上，设在 $A-B$ 段上，则 2 元集 $\{\alpha, \beta\}$ 中的边属于去掉 $\triangle A_1B_1C_1$ 的腰段上的边，而 2 元集 $\{\alpha_1, \beta_1\}$ 中的边是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的腰段上的边，从而两个 2 元集没有公共的边.

注意到 2006 条边最多有 $\frac{2006}{2}=1003$ 个两两无公共元的 2 元子集，所以好三角形不多于 1003 个.





最后，设 $P=A_1A_2\cdots A_{2006}$，用对角线 A_1A_{2k+1} $(1\leqslant k\leqslant 1002)$ 及 $A_{2k+1}A_{2k+3}$ $(1\leqslant k\leqslant 1001)$ 所作的剖分图恰有 1003 个好三角形.

因此，好三角形个数的最大值是 1003.

例 9　给定正整数 a，设 $X=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ 是由正整数构成的集合，其中 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n$，若对任何整数 $p(1\leqslant p\leqslant a)$，都存在 X 的子集 A，使 $S(A)=p$，其中规定 $S(A)$ 为集合 A 中的元素的和，求 n 的最小值.（原创题）

解　研究特例，对 $a=1,2,3,4$ 进行试验，得到相应的最小值 $n=1,2,2,3$，并由此发现使 n 达到最小的满足条件的集合 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 具有如下性质：对任何 $i=1,2,\cdots,n$，都有 $a_i\leqslant 2^{i-1}$.

实际上，反设存在 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使 $a_i\geqslant 2^{i-1}+1$，并设 i 是这样的 i 中的最小者(极端假设)，即 $a_1\leqslant 2^0$，$a_2\leqslant 2^1$，$a_3\leqslant 2^2$，$\cdots$，$a_{i-1}\leqslant 2^{i-2}$，而 $a_i\geqslant 2^{i-1}+1$，那么，对 X 的任一不含 $a_i,a_{i+1},\cdots,a_n$ 中任何元素的子集 A，有 $S(A)\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}\leqslant 2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{i-2}=2^{i-1}-1$，而对 X 的任一含有 $a_i,a_{i+1},\cdots,a_n$ 中至少一个元素的子集 A，有 $S(A)\geqslant a_i\geqslant 2^{i-1}+1$，于是，不存在 X 的子集 A，使 $S(A)=2^{i-1}$，所以 $a\leqslant 2^{i-1}-1$.

因为 X 的子集的和跑遍了 $1,2,\cdots,a$，而 X 的任一含有 $a_i,a_{i+1},\cdots,a_n$ 中至少一个元素的子集 A，都有 $S(A)>a$，于是 $X\backslash\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}$ 的子集的和也跑遍了 $1,2,\cdots,a$，这与 n 的最小性矛盾.

对给定的 a，设 $2^r\leqslant a<2^{r+1}$，若 $n\leqslant r$，则因为 $a_i\leqslant 2^{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，所以对 X 的任何子集 A，有 $S(A)\leqslant S(X)=a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1\leqslant 2^r-1<2^r\leqslant a$，所以不存在 X 的子集 A，使 $S(A)=a$，矛盾，所以 $n\geqslant r+1$.

当 $n=r+1$ 时，令 $a_i=2^{i-1}(i=1,2,\cdots,r)$，$a_{r+1}=a+1-2^r$，下证 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{r+1}\}$ 满足条件.

实际上，由二进制可知，$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_r\}$ 的子集的和跑遍了 $1,2,\cdots,2^r-1$，X 的含有 a_{r+1} 的子集的和跑遍了 $a_{r+1},a_{r+1}+1,a_{r+1}+2,\cdots,a_{r+1}+2^r-1=a$，又 $2^r\leqslant a\leqslant 2^{r+1}$，有 $a_{r+1}=a+1-2^r<2^{r+1}+1-2^r=2^r+1$，所以 $a_{r+1}\leqslant 2^r$，于是 X 的子集的和跑遍了 $1,2,\cdots,a$.

综上所述，n 的最小值为 $r+1$，其中 $r=[\log_2 a]$.

习　题　13

1　某次考试有 5 道选择题，每题都有 4 个不同的答案供选择，每人每题恰选一个答案. 在 2000 份答卷中发现存在一个数 n，使得任何 n 份答卷中都存在 4 份，其中每两份答卷选择的答案都至多有 3 题相同. 求 n 的最小可能值. (2000 年中国数学奥林匹克试题)

2　设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是以不超过 n 的正整数为项的有限数列，其中任何一个项的两个相邻项都不同，且不存在任何四个指标 $p<q<r<s$，使得 $a_p=a_r\neq a_q=a_s$. 求 k 的最大值.

3 设有 2^n 个由数字 0、1 组成的有限数列，其中任何一个数列都不是另一个数列的前段. 求所有数列的长度和 S 的最小值.

4 在 $m\times n(m>1, n>1)$ 棋盘上放有 r 只棋，每个格最多一只棋. 若 r 只棋具有如下的性质 p：每行每列至少有一只棋. 但去掉其中任何一只棋，则它们便不再具有上述的性质 p. 求 r 的最大值 $r(m, n)$.

5 设 $F=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族，且满足：(1) $|A_i|=3$，(2) $|A_i\cap A_j|\leqslant 1$. 记 $|F|$ 的最大值为 $f(n)$，求证：$\frac{n^2-4n}{6}\leqslant f(n)\leqslant\frac{n^2-n}{6}$.（第 6 届巴尔干数学竞赛题）

6 在 $m\times n(m>1, n>1)$ 棋盘 C 中，每格填一个数，使对任何正整数 p、q 及任何 $p\times q$ 矩形，相对顶点两格所填的数的和相等. 若对适当的 r 个格填数后，余下各格所填的数被唯一确定，求 r 的最小值.（第 5 届全俄数学奥林匹克试题）

习题解答

习题 1

1. 不妨设$a<b<c$，则7个数中的最小数与最大数分别为$a+b-c$、$a+b+c$，于是$d=(a+b+c)-(a+b-c)=2c$. 又$a+b-c>0$，所以$c<a+b<a+c<b+c$，但$a+b$、$a+c$、$b+c$中有一个为800，所以$c<800$. 又$799=17\times47$、798都不是质数，所以$c\leqslant797$，$d=2c\leqslant1\,594$. 令$c=797$，$a+b=800$，注意到$b<c=797$，满足$a+b=800$的最小质数解$(a, b)=(13, 787)$(因为795，$793=13\times61$，$789=3\times263$都不是质数)，此时，$a+b-c=3$、$a-b+c=23$、$-a+b+c=1571$、$a+b+c=1597$都是质数，故d的最大可能值是1594.

2. 当$n=1$时，$(a_2-a_1)^2=1$，所以$a_2-a_1=\pm1$，易知此时欲求的最大值为1. 当$n\geqslant2$时，设$x_1=a_1$，$x_{i+1}=a_{i+1}-a_i$，$i=1, 2, \cdots, 2n-1$，则$\sum\limits_{i=2}^{2n}x_i^2=1$，且$a_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$，$k=1, 2, \cdots, 2n$. 所以，由柯西不等式得$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=n(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}-[nx_1+(n-1)x_2+\cdots+x_n]=x_2+2x_3+\cdots+(n-1)x_n+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}\leqslant\sqrt{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+1^2}\sqrt{x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{2n}^2}=\sqrt{n^2+2\times\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}}=\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}$，当$a_k=\frac{\sqrt{3}k(k-1)}{2\sqrt{n(2n^2+1)}}$ $(k=1, 2, \cdots, n+1)$，$a_{n+k}=\frac{\sqrt{3}(n^2+2nk-n-k^2+k)}{2\sqrt{n(2n^2+1)}}$ $(k=2, 3, \cdots, n)$时，上述不等式等号成立. 所以，$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$的最大值为$\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}$.

3. 解题的关键是去掉绝对值符号. 注意到$|a_i-i|$等于a_i-i或$i-a_i$，

因此，去掉绝对值符号后，和式中负号的个数不变. 即不论 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 如何排列，去掉绝对值符号后，和式中均有 n 个负号. 这样，当 n 为偶数，$S_n \leqslant n+n+(n-1)+(n-1)+\cdots+\left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\frac{n}{2}+1\right)-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}-\cdots-1-1=\frac{n^2}{2}$. 当 n 为奇数，可得类似结果. 总之，$S_n \leqslant \left[\frac{n^2}{2}\right]$. 又当 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(n, n-1, n-2, \cdots, 2, 1)$ 时，$S_n=\left[\frac{n^2}{2}\right]$. 所以 S_n 的最大值为 $\left[\frac{n^2}{2}\right]$.

4. 对每个 $k(1 \leqslant k \leqslant 1990)$，有 $|y_k-y_{k+1}|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k-kx_{k+1}}{k(k+1)}\right|=\frac{1}{k(k+1)}\left|(x_1-x_2)+2(x_2-x_3)+3(x_3-x_4)+\cdots+k(x_k-x_{k+1})\right| \leqslant \frac{1}{k(k+1)}\left|(x_1-x_2)\right|+\left|2(x_2-x_3)\right|+\left|3(x_3-x_4)\right|+\cdots+\left|k(x_k-x_{k+1})\right|=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k} i\left|x_i-x_{i+1}\right|$，所以 $\sum_{k=1}^{1990}\left|y_k-y_{k+1}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{1990}\left[\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k} i\left|x_i-x_{i+1}\right|\right]=\sum_{k=1}^{1990}\sum_{i\leqslant k}\left[\frac{1}{k(k+1)}\cdot i\left|x_i-x_{i+1}\right|\right]=\sum_{i=1}^{1990}\sum_{k\geqslant i}\left[\frac{1}{k(k+1)}\cdot i\left|x_i-x_{i+1}\right|\right]=\sum_{i=1}^{1990}\left(i\left|x_i-x_{i+1}\right|\right)\sum_{k=i}^{1990}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{i=1}^{1990}\left(i\left|x_i-x_{i+1}\right|\right)\sum_{k=i}^{1990}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{i=1}^{1990}\left(i\left|x_i-x_{i+1}\right|\right)\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{1991}\right)=\sum_{i=1}^{1990}\left(\left|x_i-x_{i+1}\right|\right)\left(1-\frac{i}{1991}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{1990}\left(\left|x_i-x_{i+1}\right|\right)\left(1-\frac{1}{1991}\right)=1991\left(1-\frac{1}{1991}\right)=1990$. 其中等号在 $x_1=1991$，$x_2=x_3=\cdots=x_{1991}=0$ 时成立. 故 $F_{\max}=1990$.

5. $F_2=|1-2|=1 \leqslant 2$，$F_3=\big||1-2|-3\big|=2 \leqslant 3$，$F_4=\big|\big||1-2|-3\big|-4\big|=4 \leqslant 4$. 一般地，猜想 $F_n \leqslant n$. 下用数学归纳法证明. 首先注意到 x、$y>0$ 时，$|x-y| \leqslant \max\{x, y\}$. 所以 $|x_1-x_2| \leqslant \max\{x_1, x_2\}$，$\big||x_1-x_2|-x_3\big| \leqslant \max\{\max\{x_1, x_2\}, x_3\}=\max\{x_1, x_2, x_3\}$. 设 $\big|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-x_k\big| \leqslant \max\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\}$，则 $\big|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-x_{k+1}\big| \leqslant \max\{\max\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\}, x_{k+1}\}=\max\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, x_{k+1}\}$ ①，所以 $F=\big|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-x_{1990}\big| \leqslant \max\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{1990}\}=1990$. 由初值可知，上述不等式①的等号不一

定成立. 实际上, $k=1990$ 时不成立等号. 因为去掉绝对值符号和改变项的正负符号,代数式 F 的值的奇偶性不变,所以 $F\equiv x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{1990}=1+2+\cdots+1990\equiv 1(\bmod 2)$. $1990\equiv 0(\bmod 2)$,所以 $F\leqslant 1989$. 下面构造 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{1990}$,使 $F=1989$. 我们的策略是使"和"中尽可能产生 0. 注意到要使差最大,必须是最大的减最小的,即 $1990-1=1989$. 于是希望其他 1988 个数相互抵消. 考察 4 个连续自然数 $n+1$、$n+2$、$n+3$、$n+4$,我们有 $\left|\left|\left|n+3-(n+1)\right|-(n+4)\right|-(n+2)\right|=0$. 将 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{1988}$ 按相连 4 个数一组,分为 497 组,第 k 组为: $(x_{4k+1}, x_{4k+2}, x_{4k+3}, x_{4k+4})$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 496)$. 令 $(x_{4k+1}, x_{4k+2}, x_{4k+3}, x_{4k+4})=(4k+2, 4k+4, 4k+5, 4k+3)$,则 $\left|\left|\left|x_{4k+1}-x_{4k+2}\right|-x_{4k+3}\right|-x_{4k+4}\right|=\left|\left|\left|(4k+2)-(4k+4)\right|-(4k+5)\right|-(4k+3)\right|=0$. 于是,再令 $x_{1989}=1990$, $x_{1990}=1$,则 $F=|1990-1|=1989$.

6. 不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,由于函数在闭域中连续,所以 F 存在最大、最小值. 由排序不等式,有 $F=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}1=n$,等号在 $a_i=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时成立,所以 $F_{\min}=n$. 又由排序不等式,有 $F=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{n+1-i}}=F'$,下面求 $F'=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{n+1-i}}$ 的最大值. 由对称性, $2F'=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{n+1-i}}+\frac{a_{n+1-i}}{a_i}\right)$. 因为 $p\leqslant a_i\leqslant q$,所以 $\frac{p}{q}\leqslant\frac{a_i}{a_{n+1-i}}\leqslant\frac{q}{p}$. 而 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减,在 $[1, \infty)$ 上单调递增,所以 $2F'$ 只能在 $\frac{a_i}{a_{n+1-i}}\in\left\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right\}$ 时达到最大. 当 $2\mid n$ 时, $\frac{a_i}{a_{n+1-i}}$ 都可取到 $\frac{p}{q}$ 或 $\frac{q}{p}$,此时 $F_{\max}=\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)=n+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$. 当 2 不整除 n 时,总有 $\frac{a_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}{a_{n+1-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}}=\frac{a_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}{a_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}=1$,其余 $\frac{a_i}{a_{n+1-i}}$ 都可取到 $\frac{p}{q}$ 或 $\frac{q}{p}$. 此时, $F_{\max}=\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)+1=n+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$. 故 F 的最小值为 n,最大值为 $n+\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$.

习 题 2

1. 由 $x+y+z=a$，得 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$，令 $x=au$，$y=av$，$z=aw$，则 $0\leqslant u, v, w\leqslant 1$，$u+v+w=1$，$F=2x^2+y+3z^2=2a^2u^2+av+3a^2w^2$. 因为 $a\geqslant 1$ 时，$a^2\geqslant a\geqslant 1$，于是，$F=2a^2u^2+av+3a^2w^2\leqslant 2a^2u^2+a^2v+3a^2w^2\leqslant 3a^2u^2+3a^2v+3a^2w^2\leqslant 3a^2u+3a^2v+3a^2w=3a^2$. 等号在 $u=v=0$、$w=1$，即 $x=y=0$、$z=a$ 时成立. 所以 $2x^2+y+3z^2$ 的最大值为 $3a^2$.

2. 设所求的三位数为 $100x+20y+z$，考察 $F=\frac{100x+10y+z}{x+y+z}=1+\frac{99x+9y}{x+y+z}$，注意到上式右边，$z$ 仅在分母中出现，从而 F 是关于 z 的单调函数. 固定 x、y，则由 $z\leqslant 9$，得 $F\geqslant 1+\frac{99x+9y}{x+y+9}=10+\frac{90x-81}{x+y+9}$. 注意到上式右边，$y$ 仅在分母中出现，从而右边是关于 y 的单调函数. 再固定 x，则由 $y\leqslant 9$，得 $F\geqslant 10+\frac{90x-81}{x+9+9}=100-\frac{1701}{18+x}\geqslant 100-\frac{1701}{19}=\frac{199}{99}$. 其中等式在 $x=1$、$y=z=9$ 时成立. 故所求的三位数为 199.

3. 先证明引理：设 $g(x)=\frac{a}{x+b}+\frac{x}{(x+b)^2}$，其中 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 1$，利用判别式方法可以求得：当 $x=\frac{b(1-a)}{1+a}$ 时，$g(x)$ 的最大值为 $\frac{(1+a)^2}{4b}$. 原题解答：固定 $x_2, x_3, \cdots, x_n$，则 H 是关于 x_1 的函数 $g(x_1)+C_1$，其中 $a_1=0$，$b_1=1+x_2+\cdots+x_n$. 则由引理知，当 $x_1=\frac{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)(1-a_1)}{1+a_1}$ 时，$g(x_1)+C_1$ 的最大值为：$\frac{(1+a_1)^2}{4}\cdot\frac{1}{1+x_2+x_3+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2}+\cdots+\frac{x_n}{(1+x_n)^2}=H_2$. 再固定 $x_3, x_4, \cdots, x_n$，则 H_2 是关于 x_2 的函数 $g(x_2)+C_2$，其中 $a_2=\frac{(1+a_1)^2}{4}$，$b_2=1+x_3+\cdots+x_n$. 则由引理知，当 $x_2=\frac{(1+x_3+x_4+\cdots+x_n)(1-a_2)}{1+a_2}$ 时，$g(x_2)+C_2$ 的最大值为 $\frac{(1+a_2)^2}{4}\cdot\frac{1}{1+x_3+x_4+\cdots+x_n}+\frac{x_3}{(1+x_3+x_4+\cdots+x_n)^2}+\cdots+\frac{x_n}{(1+x_n)^2}=H_3$. 如此下去，可以得到 $\frac{(1+a_{n-1})^2}{4}\cdot\frac{1}{1+x_n}+\frac{x_n}{(1+x_n)^2}=H_n$.

再利用引理($b=1$时)，当$x_n=\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$时，H_n的最大值为$\dfrac{(1+a_n)^2}{4}$. 其中$a_n=\dfrac{(1+a_{n-1})^2}{4}$. 由此可知，设$a_{n+1}$是$H$的最大值，则$a_n$满足：$a_1=0$，$a_k=\dfrac{(1+a_{k-1})^2}{4}$. 且最大值在$x_n=\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$，$x_{n-1}=\dfrac{(1+x_n)(1-a_{n-1})}{1+a_{n-1}}$，…，$x_1=\dfrac{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)(1-a_1)}{1+a_1}$时达到. 易知，$a_n\geqslant a_{n-1}$，且当$0\leqslant a_{n-1}\leqslant 1$时，$0\leqslant a_n\leqslant 1$. 所以$x_1$，$x_2$，…，$x_n$都是非负数. 注意到$a_n$是单调有界序列，所以必存在极限. 设极限为$a$，则$a=\dfrac{(1+a)^2}{4}$，即$a=1$.

4. 记$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$的最大值为$f(n)$，不妨设$a\leqslant c$. 如果$a\geqslant n+1$，则$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\leqslant\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{a}=\dfrac{b+d}{a}\leqslant\dfrac{n}{n+1}$. 如果$a\leqslant n$，则固定$a$，记$x=a(n-a+1)+1$. 若$c\leqslant x$，则由$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}<1$，得$bc+ad<ac$，即$bc+ad\leqslant ac-1$，所以$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}=\dfrac{bc+ad}{ac}\leqslant\dfrac{ac-1}{ac}=1-\dfrac{1}{ac}\leqslant 1-\dfrac{1}{ax}$. 若$c>x$，则由$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}<1$，得$\dfrac{b}{a}<1$，于是$a\geqslant b+1$. 所以$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}-\left(\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b+d-a+1}{c}\right)=(b+1-a)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)\leqslant 0$，所以$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\leqslant\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b+d-a+1}{c}\leqslant\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{n-a+1}{c}\leqslant\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{n-a+1}{x}=1-\dfrac{1}{ax}$. 所以，$a\leqslant n$时，恒有$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\leqslant 1-\dfrac{1}{ax}$，且等式能够成立，于是问题转化为求函数$g(a)=1-\dfrac{1}{ax}=1-\dfrac{1}{a[a(n-a+1)+1]}$ $(2\leqslant a\leqslant n,\ a\in\mathbf{N}^*)$的最大值，也就是求$h(a)=a[a(n-a+1)+1]$ $(2\leqslant a\leqslant n,\ a\in\mathbf{N}^*)$的最大值. 因为$h'(a)=-3a^2+(2n+2)a+1$，所以$h'(a)=0$的正根为$a_0=\dfrac{n+1+\sqrt{(n+1)^2+3}}{3}$. 而$\dfrac{2n+2}{3}<a_0<\dfrac{2n+3}{3}=\dfrac{2n}{3}+1$，将与$a_0$最接近的两个正整数代入$h(a)$作比较. 推出当$a=\left[\dfrac{2n}{3}\right]+1$时，$h(a)$达到最大值. 此时$g(a)$达到最大值$1-\dfrac{1}{a[a(n-a+1)+1]}$，其中$a=\left[\dfrac{2n}{3}\right]+1$.

习　题　3

1. 当1989分拆成：$199+199+\cdots+199+198$时，对应的积为$199^9\times$

198. 下面证明它是最大的.因为分拆种数是有限的,最大值一定存在,所以可假定分拆$(x_1, x_2, \cdots, x_{10})$,其中$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=1989$,是相应的积$x_1x_2\cdots x_{10}$为最大的一种分拆.若$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$中有小于198者,设为$x_1$,那么其中必有大于198者,设为$x_{10}$.令$x'_1=x_1+(x_{10}-198)$, $x'_{10}=198$,则得到一种新的分拆$(x'_1, x_2, \cdots, x_9, x'_{10})$,相应的积为$x'_1x_2\cdots x_9x'_{10}$.但$x'_1x'_{10}-x_1x_{10}=[x_1+(x_{10}-198)]\cdot 198-x_1x_{10}=198x_1+198x_{10}-198^2-x_1x_{10}=(198-x_1)(x_{10}-198)>0$,所以$x'_1x_2\cdots x_9x'_{10}>x_1x_2\cdots x_{10}$,矛盾.由此可见,$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$均不小于198.若$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$中有大于199者,设为$x_1$,那么其中必有小于199者,设为$x_{10}$.因为$x_{10}$不小于198,所以$x_{10}=198$.令$x'_1=x_1-1$, $x'_{10}=x_{10}+1$,则得到一种新的分拆$(x'_1, x_2, \cdots, x_9, x'_{10})$,相应的积为$x'_1x_2\cdots x_9x'_{10}$.但$x'_1x'_{10}-x_1x_{10}=(x_1-1)(x_{10}+1)-x_1x_{10}=x_1x_{10}+x_1-x_{10}-1-x_1x_{10}=x_1-x_{10}-1=x_1-198-1=x_1-199>0$,所以$x'_1x_2\cdots x_9x'_{10}>x_1x_2\cdots x_{10}$,矛盾.所以$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$均只能是199或198,从而分拆:$199+199+\cdots+199+198$对应的积为$199^9\times 198$为最大.

2. 首先,最大的数一定存在.由条件有$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{19}=85$.我们猜想,极值点是各个$a_i$尽可能大且各个$a_i$相等,各个$b_j$相等.实际上,若有$a_i<a_{i+1}(1\leqslant i\leqslant 18)$,则令$a'_i=a_i+1$.对任何$j\neq i$,令$a'_j=a_j$,对应的$b_j$记为$b'_j$.那么,因为$a_{i+1}>a_i$,所以$a_{i+1}\geqslant a_i+1$.但$a_i<a_i+1$,所以$b_{a_i+1}=i+1$, $b'_{a_i+1}=i=b_{a_i+1}-1$, $b'_j=b_j$(当$j\neq a_i+1$时).由此可知,调整使得b_{a_i+1}减少1,其余的b_i不变.于是,S的值不减.综上所述,有$S\leqslant 19\times 85+1\times 85=1700$,等号在$a_i=85$, $b_j=1$ $(1\leqslant i\leqslant 19, 1\leqslant j\leqslant 85)$时成立.

3. 问题等价于将155只鸟分为若干组,使可见鸟对数最小.注意到组数不确定,于是要估计组数.通过特殊化可知,要使可见鸟对少,相邻两个位置不能过近,即任何两个位置都不可见时,可见鸟对才可能最小.实际上,设P_i、P_j是一对可见鸟,则称P_i、P_j的位置是互相可见的.假设有两个可见位置P_i、P_j,设k为P_j可以见到而P_i不能见到的鸟的只数,t是P_i可以见到而P_j不能见到的鸟的只数.不妨设$k\geqslant t$.假设P_j的鸟都飞往P_i处,那么,对任何一个鸟对(p, q),若它不含飞动的鸟,其“可见性”不变.又对飞动的每只鸟来说,减少k只可见鸟,增加t只可见鸟,从而可见鸟对的增加数为$t-k\leqslant 0$,即可见鸟对数不增.每一次这样的变动,停鸟的位置数减少1.若干次变动后,可使任何两个停鸟的位置互不可见.此时,圆周上至多有35个停鸟的位置.于是,问题化为在条件:$x_1+x_2+\cdots+x_{35}=155$, $x_i\geqslant 0$的约束下,求$S=\sum_{i=1}^{35}C_{x_i}^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{35}x_i(x_i-1)$的最小值.若对所有$x_i$、$x_j$,都有$x_i=x_j$,则35整

除 155，矛盾. 所以，至少一个 $i\neq j$，使 $x_i-x_j\neq 0$. 此外，对所有 i、j，有 $x_i-x_j\leqslant 1$. 实际上，若 $x_i-x_j\geqslant 2$，不妨设 $x_2-x_1\geqslant 2$，则令 $x_1'=x_1+1$，$x_2'=x_2-1$. 此时，$x_1(x_1-1)+x_2(x_2-1)-[x_1'(x_1'-1)+x_2'(x_2'-1)]=x_1(x_1-1)+x_2(x_2-1)-(x_1+1)x_1-(x_2-1)(x_2-2)=-2x_1+2(x_2-1)\geqslant 1$. 从而 S 减少. 注意到 $155=4\times 35+15$，所以，极值点为 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{35})=(5,\ 5,\ \cdots,\ 5,\ 4,\ 4,\ \cdots,\ 4)$. 此时，$S$ 的最小值为 $20C_4^2+15C_5^2=270$.

4. 由直观猜想最值点 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 是均匀的，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$（待定）. 此时 $d=\sum\limits_{i=1}^{n}(P_i-x_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(P_i-x)^2=nx^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}(P_i)x+\sum\limits_{i=1}^{n}P_i^2$. 此二次函数在 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{P_i}{n}=P$ 时达到最小. 于是，我们猜想 d 在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=P$ 时达到最小. 我们只须证明：给定实数 $P_1\leqslant P_2\leqslant P_3\cdots\leqslant P_n$，对任何实数 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}(P_i-x_i)^2\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(P_i-P)^2\left(\text{其中 } P=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{P_i}{n}\right)$. 记上式左边与右边的差为 H，则 $H=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}P_ix_i+2P\sum\limits_{i=1}^{n}P_i-nP^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}P_ix_i+nP^2\geqslant$（切比雪夫不等式）$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nP^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2P\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nP^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-P)^2\geqslant 0$.

5. (1) 因为分组方法是有限的，必存在一种分组方法，使得三角形个数最少. 注意到 $1994=83\times 24+2=81\times 24+2\times 25$，于是，将 1994 个点分为 83 组，其中 81 组中各有 24 个点，2 组中各有 25 个点，我们证明这样的分组才使三角形的个数最少，即 $(m(G))_{\min}=81C_{24}^3+2C_{25}^3=168\ 544$. 否则，将 $(i,\ j)(i\geqslant j+2)$，$S=C_i^3+C_j^3$，调整为 $(i-1,\ j+1)$，$S'=C_{i-1}^3+C_{j+1}^3$，有 $S-S'=C_i^3+C_j^3-(C_{i-1}^3+C_{j+1}^3)=C_{i-1}^2-C_j^2>0$. 按此方法调整一次，三角形个数减少. (2) G' 由若干个独立的连通图组成，因而只须考虑 $|G_1|=25$ 和 $|G_2|=24$ 的两个图 G_1 和 G_2 的染色. 进一步可知，只须考虑图 G_1 的染色. 实际上，对 $|G_2|=24$，在 G_1 的染色的基础上去掉其中一个点及其关联的边即可. 将 25 个点分为 5 组，每组 5 个点. 每一组中的 5 点之间的边 12、23、34、45、51 用第一种颜色染；边 13、35、52、24、41 用第二种颜色染. 再将染色后的五点组看作一个“大点”，有 5 个“大点”. 对此 5 个大点之间的边再按上述方法用另外两种颜色染色，从而 4 色可完成染色.

6. 解法 1：设 14 个人为 A_1，A_2，$\cdots$，A_{14}，他们胜的场数分别为 w_1，

$w_2, \cdots, w_{14}$，则 $\sum_{i=1}^{14} w_i = C_{14}^2 = 91$. 如果某三个人不组成"三联角"，那么这三个人中一定有一个人胜了其余两个人. 而 A_i 胜另两人的三人组有 $C_{w_i}^2$ 个，从而非三联角的三人组总数为 $\sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2$（其中规定 $C_0^2 = C_1^2 = 0$）. 所以三联角的三人组总数 $S = C_{14}^3 - \sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2$. 下面求 $S' = \sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2$ 的最小值. 首先，比赛结果只有有限种，从而最小值一定存在. 其次，我们证明：当 $\sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2$ 达到最小时，对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant 14$，一定有 $|w_i - w_j| \leqslant 1$. 实际上，若存在 $1 \leqslant i < j \leqslant 14$，使 $w_i - w_j \geqslant 2$，则令 $y_i = w_i - 1$，$y_j = w_j + 1$，$y_k = w_k (k \neq i、j)$，则 $\sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2 - \sum_{i=1}^{14} C_{y_i}^2 = C_{w_i}^2 + C_{w_j}^2 - (C_{w_i-1}^2 + C_{w_j+1}^2) = w_i - w_j - 1 > 0$，于是 $\sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2$ 不是最小的，矛盾. 注意到 $91 = 14 \times 6 + 7$，所以当 $\{w_1, w_2, \cdots, w_{14}\} = \{6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7\}$ 时，$\sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2$ 达到最小值 $7C_6^2 + 7C_7^2 = 252$，于是 $S = C_{14}^3 - \sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2 \leqslant C_{14}^3 - 252 = 112$. 解法 2：同解法 1，得非三联角的三人组总数为 $\sum_{i=1}^{14} C_{w_i}^2$. 又设 A_i 输的场数为 l_i，同样可知，非三联角的三人组总数为 $\sum_{i=1}^{14} C_{l_i}^2$. 于是非三联角的三人组总数为 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{14}(C_{l_i}^2 + C_{w_i}^2)$. 由于 $w_i + l_i = 13$，所以 $w_i^2 + l_i^2 = \frac{1}{2}[13^2 + (w_i - l_i)^2] \geqslant 85$，从而 $C_{w_i}^2 + C_{l_i}^2 = \frac{w_i^2 + l_i^2}{2} - \frac{13}{2} \geqslant 36$，于是 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{14}(C_{l_i}^2 + C_{w_i}^2) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{14} 36 = 252$. 故三联角数目 $S \leqslant C_{14}^3 - 252 = 112$. 另一方面，对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant 14$，当且仅当 $i、j$ 同奇偶时，令 A_i 胜 A_j，则 $w_2 = w_4 = w_6 = w_8 = w_{10} = w_{12} = w_{14} = 7$，$w_1 = w_3 = w_5 = w_7 = w_9 = w_{11} = w_{13} = 6$，此时 $S = 112$. 故所求最大值为 112.

习　题　4

1. F 的最大值为：$n^2 + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$. 由于 F 在闭域上连续，所以必存在最大值. 固定 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$，令 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = A$，$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} = B$，则 A, B 为常数，且 $F = (A + a_n)\left(B + \frac{1}{a_n}\right) = 1 +$

$AB+Ba_n+\frac{A}{a_n}$. 考察 $f(x)=Bx+\frac{A}{x}$，易知，当 $x\leqslant\sqrt{\frac{A}{B}}$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x\geqslant\sqrt{\frac{A}{B}}$ 时，$f(x)$ 单调递增. 于是，$\sqrt{\frac{A}{B}}$ 是 $f(x)$ 的最小值点. 注意到 $p\leqslant a_n\leqslant q$，所以 $f(a_n)=Ba_n+\frac{A}{a_n}$ 只能在其端点 $a_n=p$ 或 $a_n=q$ 处取最大值. 由对称性，F 只能在 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in\{p, q\}$ 时取最大值. 于是，不妨设 F 取最大值时，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有 k 个为 p，$n-k$ 个为 q，则 F 的最大值是如下形式的 $F(k)$ 的最大值：$F(k)=[kp+(n-k)q]\left(\frac{k}{p}+\frac{n-k}{q}\right)=k^2+(n-k)^2+(nk-k^2)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)=\left[2-\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\right]k^2+\left[n\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)-2n\right]k+n^2$. 在二次函数 $F(k)$ 中，二次项系数 $2-\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)<0$，顶点横坐标为 $\frac{n}{2}$. 但 $k\in\mathbf{N}$，于是，当 n 为偶数时，$F(k)\leqslant F\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(n-\frac{n}{2}\right)^2+\left[n\cdot\frac{n}{2}-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)=n^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2=n^2+\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$. 当 n 为奇数时，$F(k)\leqslant F\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)=F\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)=n^2+\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$. 所以 $F_{\max}=n^2+\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$.

2. 由于 F 在闭域上连续，所以，必定存在最小值. 固定 $x_2, x_3, \cdots, x_n$，则 $F(x_1)$ 是关于 x_1 的一次函数. 又 $-1\leqslant x_1\leqslant 1$，于是，当 $F(x_1)$ 取最小值时，必有 $x_1\in\{-1, 1\}$. 由对称性，知 F 取最小值时，必有 $x_i\in\{-1, 1\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 设 F 取最小值时，x_i 中有 k 个为 1，$n-k$ 个为 -1，则 F 的最值是如下形式的 $F(k)$ 的最小值：$F(k)=C_k^2+C_{n-k}^2-C_k^1C_{n-k}^1=2\left(k-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{n}{2}\geqslant-\frac{n}{2}$. 但 $F(k)$ 为整数，所以 $F(k)\geqslant-\left[\frac{n}{2}\right]$，其中等式在 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$ 时成立. 所以，F 的最小值为 $-\left[\frac{n}{2}\right]$. 或者，当 $x_i\in\{-1, 1\}$ 时，$F=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}x_i^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-\frac{n}{2}\geqslant-\frac{n}{2}$，于是 $-F\leqslant\frac{n}{2}$. 但 $-F$ 为整数，所以 $-F\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，即 $F\geqslant-\left[\frac{n}{2}\right]$.

3. 因为 F 在闭域 $0\leqslant x_i\leqslant 1$ 上连续，所以 F 必有最大值和最小值. 不妨设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 F 的最值点，我们证明，对任何 $i\neq j$，$x_ix_j=0$，或 $x_i=x_j$. 实际上，由对称性，我们只须考察 x_1、x_2. 固定 $x_3, x_4, \cdots, x_n$，则 $x_1+x_2=1-(x_3+x_4+\cdots+x_n)=c$（常数）. $F=(x_1+x_2)^2+x_3^2+\cdots+x_n^2-2x_1x_2+\lambda x_1x_2\cdots x_n=(x_1+x_2)^2+x_3^2+\cdots+x_n^2+(\lambda x_3x_4\cdots x_n-2)\cdot x_1(c-x_1)$. 令 $f(x_1)=x_1(c-x_1)$，因为 $0\leqslant x_1\leqslant c$，由二次函数的性质，当 $f(x_1)$ 达到最值时，$x_1\in\left\{0, c, \dfrac{c}{2}\right\}$. 注意此时 $x_1+x_2=c$，于是 x_1、x_2 之间有以下关系：(1) $x_1=0$，$x_2=c$. (2) $x_1=c$，$x_2=0$. (3) $x_1=x_2=\dfrac{c}{2}$. 于是，要么 $x_1x_2=0$，要么 $x_1=x_2$. 由上面讨论可知，若 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 F 的最值点，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的非零数都相等. 不妨设 $x_1=x_2=\cdots=x_k\neq 0$，$x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n=0$，有以下情况：(1) 若 $k=n$，那么 F 在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ 达到最值，此时 $F=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n^2}+\lambda\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}=\dfrac{\lambda+n^{n-1}}{n^n}$. (2) 若 $k<n$，那么 F 在 $x_1=x_2=\cdots=x_k=\dfrac{1}{k}$，$x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots=x_n=0$ 达到最值，此时 $F=\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{k}$. 注意到 $1\leqslant k\leqslant n-1$，所以 $\dfrac{1}{n-1}\leqslant F\leqslant 1$. 所以 F 的最值的集合是 $\left\{1, \dfrac{1}{n-1}, \dfrac{\lambda+n^{n-1}}{n^n}\right\}$. 故 $F_{\min}=\min\left\{\dfrac{1}{n-1}, \dfrac{\lambda+n^{n-1}}{n^n}\right\}$，$F_{\max}=\max\left\{1, \dfrac{\lambda+n^{n-1}}{n^n}\right\}$.

习　题　5

1. 当 $n=2$ 时，$x_1+x_2\leqslant\dfrac{1}{2}$，$(1-x_1)(1-x_2)=1+x_1x_2-(x_1+x_2)\geqslant 1-x_1-x_2\geqslant\dfrac{1}{2}$. 其中等号在 $x_1+x_2=\dfrac{1}{2}$，$x_1x_2=0$，即 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=0$ 时成立. 当 $n=3$ 时，$x_1+x_2+x_3\leqslant\dfrac{1}{2}$，利用上述变换，有 $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\geqslant(1-x_1)[1-(x_2+x_3)]\geqslant 1-x_1-(x_2+x_3)\geqslant\dfrac{1}{2}$. 其中注意 $0\leqslant x_i<1$，$1-x_i>0$. 等号在 $x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{2}$，且 $x_2x_3=x_1(x_2+x_3)=0$，即 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=x_3=0$ 时成立. 由上可以猜想，一般情况下的极值点为：

$\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0\right)$.采用磨光变换.先证明引理：若 $0 \leqslant x, y \leqslant 1$，则$(1-x)(1-y) \geqslant 1-x-y$. 此式左边直接展开即证.此磨光工具相当于$(x, y) \rightarrow (x+y, 0)$.设 $n \geqslant 2$，对自变量组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，则 $F=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \geqslant (1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-2})(1-x_{n-1}-x_n) \geqslant (1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-3})(1-x_{n-2}-x_{n-1}-x_n) \geqslant \cdots \geqslant 1-x_1-x_2-\cdots-x_n \geqslant \frac{1}{2}$. 取等号时变量组变为$\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0\right)$，此时，$F$ 达到最小值$\frac{1}{2}$.

2. 仿上题方法，可求得 F 的最大值为 $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0\right)=\frac{1}{4}$.

3. 当 $n=2$ 时，$x_1+x_2=\pi$，$F=\sin^2 x_1+\sin^2 x_2=2\sin^2 x_1 \leqslant 2$. 其中等式在 $x_1=x_2=\frac{\pi}{2}$ 时成立.当 $n \geqslant 3$ 时，设 $x_3, x_4, \cdots, x_n$ 为常数，则 x_1+x_2 亦为常数.考察 $A=\sin^2 x_1+\sin^2 x_2$，$2-2A=1-2\sin^2 x_1+1-2\sin^2 x_2=\cos 2x_1+\cos 2x_2=2\cos(x_1+x_2)\cos(x_1-x_2)$.为了找到磨光工具，我们考察 $\cos(x_1-x_2)$ 的极值以及 $\cos(x_1+x_2)$ 的符号.注意到 $x_1+x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$\cos(x_1+x_2) \geqslant 0$，$x_1+x_2>\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos(x_1+x_2)<0$.所以当 $x_1+x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$|x_1-x_2|$ 越大，A 越大.此时的磨光工具为$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1+x_2, 0)$；当 $x_1+x_2>\frac{\pi}{2}$ 时，$|x_1-x_2|$ 越小，A 越大.此时需要 $x_1=x_2$.磨光工具为$(x_1, x_2) \rightarrow \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$.为了保证存在 x_1、x_2，使 $x_1+x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$，一个充分条件是 $n \geqslant 4$.于是，$n \geqslant 4$ 时，可利用如下的磨光工具.引理：若 $0 \leqslant x_1$、$x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$，且 $x_1+x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$，则 $\sin^2 x_1+\sin^2 x_2 \leqslant \sin^2(x_1+x_2)$.实际上，由 $0 \leqslant x_1$、$x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$，$x_1+x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ 知，$|x_1-x_2| \leqslant |x_1+x_2| \leqslant \frac{\pi}{2}$.所以 $\cos(x_1-x_2) \geqslant \cos(x_1+x_2)$，所以 $2-2(\sin^2 x_1+\sin^2 x_2)=\cos 2x_1+\cos 2x_2=2\cos(x_1+x_2)\cos(x_1-x_2) \geqslant 2\cos(x_1+x_2)\cos(x_1+x_2)=2\cos^2(x_1+x_2)=2[1-\sin^2(x_1+x_2)]=2-2\sin^2(x_1+x_2)$，移项，引理即证.下面分情况讨论.当 $n=3$ 时，若三个角为$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$，则调整为$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$，$F$ 的值由 2 增大到 $1+\sqrt{2}$，所以不妨设

$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$，且$(x_1,\ x_2,\ x_3)\neq\left(0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. 则 $x_2<\frac{\pi}{2},\ x_1+x_3>\frac{\pi}{2}$，$x_1\leqslant\frac{\pi}{3}\leqslant x_3$. 将$(x_1,x_2,x_3)$磨光到$\left(\frac{\pi}{3},\ x_2,\ x_1+x_3-\frac{\pi}{3}\right)$，由以上叙述可知，$F$ 增大. 再作一次磨光变换，便得到$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)$，所以，$F\leqslant\frac{9}{4}$. 当 $n\geqslant 4$ 时，不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{n-1}\geqslant x_n$，则必有两个角：$x_{n-1}+x_n\leqslant\frac{\pi}{2}$. 由引理，$F=\sin^2x_1+\cdots+\sin^2x_{n-1}+\sin^2x_n\geqslant\sin^2x_1+\sin^2x_2+\cdots+\sin^2(x_{n-1}+x_n)=\sin^2x'_1+\cdots+\sin^2x'_{n-2}+\sin^2x'_{n-1}$（其中 $x'_1,\ x'_2,\ \cdots,\ x'_{n-2},\ x'_{n-1}$是 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-2},\ x_{n-1}+x_n$ 由大到小排列）. 如果$n-1\geqslant 4$，则必有两个角：$x'_{n-2}+x'_{n-1}\leqslant\frac{\pi}{2}$. 再继续利用引理进行上述变换，如此至多进行 $n-3$ 次变换，可将变量组变为$(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$. 再利用 $n=3$ 时的结果，可知，$F\leqslant\frac{9}{4}$，等号在 $x_1=x_2=x_3=\frac{\pi}{3},\ x_4=x_5=\cdots=x_n=0$ 时成立. 故当 $n=2$ 时，F 的最大值为 2；当 $n>2$ 时，F 的最大值为$\frac{9}{4}$.

4. 仿上题方法，可求得 $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n$ 的最大值为$n\sin\frac{A}{n}$.

5. 首先注意，如果 $x_1+x_2=a$（常数），则由 $2\sin x_1\sin x_2=\cos(x_1-x_2)-\cos a$，及 $|x_1-x_2|<\pi$ 可知，$\sin x_1\sin x_2$ 的值随 $|x_1-x_2|$ 变小而增大（磨光工具）.

如果 x_1、x_2、x_3、x_4 不全等，则其中必有一个大于$\frac{\pi}{4}$，也必有一个小于$\frac{\pi}{4}$.

不妨设 $x_1>\frac{\pi}{4}>x_2$，则固定 $x_3,\ x_4$，对 x_1、x_2 作磨光变换：即令 $x'_1=\frac{\pi}{4}$，$x'_2=x_1+x_2-\frac{\pi}{4},\ x'_3=x_3,\ x'_4=x_4$，则 $x'_1+x'_2=x_1+x_2,\ |x'_1-x'_2|<|x_1-x_2|$，于是，由上述磨光工具，有

$\sin x_1\sin x_2<\sin x'_1\sin x'_2$，所以 $\sin^2x_1\sin^2x_2<\sin^2x'_1\sin^2x'_2$.

记 $f(x,\ y)=\left(2\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)\left(2\sin^2y+\frac{1}{\sin^2y}\right)$，则

$$\begin{aligned}f(x_1,\ x_2)&=\left(2\sin^2x_1+\frac{1}{\sin^2x_1}\right)\left(2\sin^2x_2+\frac{1}{\sin^2x_2}\right)\\&=2\left(2\sin^2x_1\sin^2x_2+\frac{1}{2\sin^2x_1\sin^2x_2}\right)+2\left(\frac{\sin^2x_1}{\sin^2x_2}+\frac{\sin^2x_2}{\sin^2x_1}\right)\end{aligned}$$

$$= 2\left(2\sin^2 x_1 \sin^2 x_2 + \frac{1}{2\sin^2 x_1 \sin^2 x_2}\right) + 2\left(\frac{\sin^4 x_1 + \sin^4 x_2}{\sin^2 x_1 \sin^2 x_2}\right)$$

$$= 2g(2\sin^2 x_1 \sin^2 x_2) + 2\left(\frac{\sin^4 x_1 + \sin^4 x_2}{\sin^2 x_1 \sin^2 x_2}\right),\text{其中 } g(x) = x + \frac{1}{x}.$$

注意到 $g(x)$在$(0, 1)$上递减，而 $2\sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \leqslant 2\sin^2 x_2 < 2\sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$，

所以
$$g(2\sin^2 x_1 \sin^2 x_2) > g(2\sin^2 x_1' \sin^2 x_2').$$

所以，$f(x_1, x_2) = 2g(2\sin^2 x_1 \sin^2 x_2) + 2\left(\frac{\sin^2 x_1}{\sin^2 x_2} + \frac{\sin^2 x_2}{\sin^2 x_1}\right)$

$> 2g(2\sin^2 x_1' \sin^2 x_2') + 2\left(\frac{\sin^4 x_1' + \sin^4 x_2'}{\sin^2 x_1' \sin^2 x_2'}\right) = f(x_1', x_2')$，

$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) > f(x_1', x_2') f(x_3', x_4') = A(x_1', x_2', x_3', x_4')$.

这样，我们将 x_1 磨光到$\frac{\pi}{4}$，函值减小. 如果 x_2'、x_3'、x_4'中仍有不等于$\frac{\pi}{4}$者，则继续上述变换，由此可见，A 在 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{\pi}{4}$ 时达到最小.

综上所述，A 的最小值为 $\left(2\sin^2 \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}}\right)^4 = 81$.

习 题 6

1. $|X|_{\min} = 9$. 设 $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，且 $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 100$. 我们估计 a_k、a_{k-1}间的间距. 任取 $a_k \in X\ (k > 1)$，都存在 a_i、a_j，使 $a_k = a_i + a_j$，其中必有 $a_i < a_k$, $a_j < a_k$，即 $a_i \leqslant a_{k-1}$, $a_j \leqslant a_{k-1}$，所以 $a_k = a_i + a_j \leqslant a_{k-1} + a_{k-1} = 2a_{k-1}$. 若对所有 k，有 $a_k = 2a_{k-1}$，则 X 中的所有数都是 2 的方幂，与 $100 \in X$ 矛盾. 于是存在 k，使 $a_k < 2a_{k-1} = a_{k-1} + a_{k-1}$，这样，$a_k \leqslant a_{k-1} + a_{k-2} \leqslant 2a_{k-2} + a_{k-2} = 3a_{k-2}$. 利用上述找到的 k，我们有 $100 = a_n \leqslant 2a_{n-1} \leqslant 4a_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant 2^{n-k} a_k \leqslant 3 \times 2^{n-k} a_{k-2} \leqslant 3 \times 2^{n-k+1} a_{k-3} \leqslant \cdots \leqslant 3 \times 2^{n-3} a_1 = 3 \times 2^{n-3}$，所以 $n \geqslant 9$. 另一方面，当 $n = 9$ 时，存在合乎条件的集合 $X = \{100, 50, 25, 13, 12, 6, 3, 2, 1\}$，所以 n 的最小值为 9. 另解：设$X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，且 $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 100$. 我们估计 a_k、a_{k-1} 间的间距. 任取 $a_k \in X\ (k > 1)$，都存在 a_i、a_j，使 $a_k = a_i + a_j$，其中必有 $a_i < a_k$, $a_j < a_k$，即 $a_i \leqslant a_{k-1}$, $a_j \leqslant a_{k-1}$，所以 $a_k = a_i + a_j \leqslant a_{k-1} + a_{k-1} = 2a_{k-1}$. 所以 $100 = a_n \leqslant 2a_{n-1} \leqslant 4a_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1}$，所以 $n \geqslant 8$. 若 $n = 8$，则 $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_8 = 100$. 易知，$a_2 = 2 = 2^{2-1}$，否则 a_2 不能表成 X 中的两个数的和. 再注意到

$a_8=100$ 不是 2 的方幂，可设 X 中 $a_k=2^{k-1}(k=1, 2, \cdots, t-1)$，$a_t\neq 2^{t-1}$. 由于 a_t 可表成 X 中两数之和，所以存在 a_i、$a_j(i、j<t)$，使 $a_t=a_i+a_j$. 若 $a_i=a_j$，则 $a_t=2a_i=2\times 2^{i-1}=2^i$. 若 $i=t-1$，则与 $a_t\neq 2^{t-1}$ 矛盾. 所以 $i<t-1$，所以 $a_t=2a_i=2^i=a_{i+1}$，与 X 中的数互异矛盾. 所以 $a_i\neq a_j$. 所以 $a_j<2^{t-2}$，$a_i<2^{t-3}$，所以 $a_t=a_i+a_j<2^{t-2}+2^{t-3}$. 所以 $100=a_8=2^{8-t}a_t<2^{8-t}(2^{t-2}+2^{t-3})=2^6+2^5=96$，矛盾. 所以 $n\neq 8$，于是 $n\geqslant 9$.

2. $C_g=n+1$. 首先，第 i 行依次填 $(i-1)n+1$，$(i-1)n+2$，$\cdots$，$(i-1)n+n$. 此时，数表的 C-间隙为 $n+1$. 对任何一个数表，设 g 是它的 C-间隙. 即对任何两个相连的数 x、y，有 $|x-y|\leqslant g$. 我们证明：$g\geqslant n+1$. 将 1 和 n^2 所在的格用一条链连接，此链（包括 1 和 n^2 所在的格）至多有 n 个格. 不妨设共有 m 个格 $(m\leqslant n)$，这 m 个格中的数依次为 $a_1=1$，a_2，a_3，$\cdots$，$a_m=n^2$. 考察各相连两数之差，有 $|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_m-a_{m-1}|\geqslant(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_m-a_{m-1})=a_m-a_1=n^2-1$. 于是，必有一个 i，使 $|a_i-a_{i-1}|\geqslant\dfrac{n^2-1}{m-1}\geqslant\dfrac{n^2-1}{n-1}=n+1$.

3. 考虑一般问题：设 $f(n)$ 是 n（n 为奇数）段折线自身相交的交点的个数的最大值. 取定一个点，由此点出发沿折线前进，依次经过的段分别叫做第 1，2，$\cdots$，n 段. 画前两段时，没有交点. 再画第 3 段，最多与第一段有一个交点. 考虑第 4 段，它最多与前两段有两个交点. 如此下去，画第 i 段时，它最多与前面的 $i-2$ 段有 $i-2$ 个交点（i 段与 $i-1$ 段相连，不相交. i 段与本身不相交），其中 $i=1, 2, \cdots, n-1$. 最后，画第 n 段时，最多产生 $n-3$ 个交点，从而最多有 $\sum\limits_{i=3}^{n-1}(i-2)+(n-3)=\dfrac{1}{2}(n-2)(n-3)+\dfrac{1}{2}\cdot 2(n-3)=\dfrac{1}{2}n(n-3)$ 个交点. 所以 $f(n)\leqslant\dfrac{1}{2}n(n-3)$. 另一方面，当 n 为奇数时，存在 n 段折线，使 $f(n)=\dfrac{1}{2}n(n-3)$. 实际上，取定两点 A_1、A_2，以 A_1A_2 为直径作圆. 从 A_1 开始，在半圆上按逆时钟方向排列点 A_1，A_3，$\cdots$，A_n；从 A_2 开始，在另一半圆上按逆时钟方向排列点 A_2，A_4，A_6，$\cdots$，A_{n-1}，则闭折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 各段之间有 $\dfrac{1}{2}n(n-3)$ 个交点. 故本题答案是：$f(2005)=\dfrac{1}{2}(2005\times 2002)=2005\times 1001=2\,007\,005$.

4. 记 $i(i=1, 2, \cdots, 10)$ 在 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 中出现的次数为 $d(i)$. 首先证明 $d(i)\leqslant 4$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$. 事实上，对 $i\in M$，i 与 M 中另 9 个元素中的某个元素 j $(j\neq i)$ 组成二元组 (i, j) 在所有满足题设条件的五元子集 A_1，

A_2，…，A_k 中最多出现两次，因此 i 参与组成的 9 个二元组 (i, j) 最多出现 $2\times 9=18$ 次. 由于 $|A_j|=5\ (j=1, 2, \cdots, k)$，而每个含 i 的子集恰有 4 个二元组 (i, j)，因此 $4\cdot d(i)\leqslant 18$，故 $d(i)\leqslant 4$. 其次，k 个 5 元子集共有 $5k$ 个元素，而每个 M 的元素在 A_1，…，A_k 中出现的次数为 $d(i)$，从而 $5k=d(1)+\cdots+d(10)\leqslant 4\times 10$，所以 $k\leqslant 8$. 最后，当 $k=8$ 时，下述 8 个 5 元数集满足要求：$A_1=\{1, 2, 3, 4, 5\}$、$A_2=\{1, 6, 7, 8, 9\}$、$A_3=\{1, 3, 5, 6, 8\}$、$A_4=\{1, 2, 4, 7, 9\}$、$A_5=\{2, 3, 6, 7, 10\}$、$A_6=\{3, 4, 7, 8, 10\}$、$A_7=\{4, 5, 8, 9, 10\}$、$A_8=\{2, 5, 6, 9, 10\}$，故 $k_{\max}=8$.

习 题 7

1. 将 X 划分为 47 个子集：$A_i=\{x \mid x\equiv i$，或 $x\equiv 93-i \pmod{93}\}$，$i=0, 1, 2, \cdots, 46$. 对任何 $x, y\in A_i$，都有 $x-y\equiv 0 \pmod{93}$，或 $x+y\equiv 0 \pmod{93}$，所以 A 至多含有 A_i 中的一个数. 于是 $|A|\leqslant 47$. 令 $A=\{10, 11, \cdots, 46\}\cup\{93, 94, \cdots, 101\}\cup\{84\}$，则 A 合乎要求. 故 $|A|$ 的最大值为 47.

2. 首先，令 $A_1=\{1, 2, 3, 5, 8\}$，$A_2=\{4, 6, 10\}$，$A_3=\{7, 9\}$，则 A_i 中的任何 3 个数不构成三角形，从而 A 最多含有 A_i 中的 2 个数，所以 $|A|\leqslant 2\times 3=6$. 其次，令 $A=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，则 A 合乎要求. 故 $|A|$ 的最大值为 6.

3. 首先，令 $A_1=\{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$，$A_2=\{4, 6, 10, 16\}$，$A_3=\{7, 12, 19\}$，$A_4=\{9, 11, 20\}$，$A_5=\{14, 15\}$，$A_6=\{17, 18\}$，则 A_i 中的任何 3 个数不构成三角形，从而 A 最多含有 A_i 中的 2 个数，所以 $|A|\leqslant 2\times 6=12$. 但若 $|A|=12$，则 $14, 15, 17, 18\in A$，于是，$1, 2, 3, 5\notin A$，所以 $8, 13\in A$，于是，$7, 9\notin A$，所以 $12, 19, 11, 20\in A$. 但 $8+12=20$，矛盾. 所以 $|A|\neq 12$，所以 $|A|\leqslant 11$. 其次，令 $A=\{10, 11, 12, \cdots, 20\}$，则 A 合乎要求. 故 $|A|$ 的最大值为 11.

4. 令 $A_{ij}=\{\overline{ij}, \overline{ji}\}$，$i, j\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，则 A 至少含有 A_{ij} 中的一个元素，否则，无穷序列 $ijijijij\cdots$ 无相邻数码属于 A，矛盾. 显然集合 A_{ij} 共有 $10+C_{10}^2=55$ 个(其中，A_{00}，A_{11}，…，A_{99} 有 10 个)，所以，$|A|\geqslant 55$. 此外，令 $A=\{\overline{ij} \mid 0\leqslant i\leqslant j\leqslant 9\}$，(即 A_{ij} 中均取 $i\leqslant j$ 的下标)，则 $|A|=55$. 此时，对任何无穷序列，设它的最小数字为 i，排在 i 后面的一个数字为 j，则 $i\leqslant j$，那么 $\overline{ij}\in A$. 故 $|A|$ 的最小值为 55.

5. 令 $A_1=\{1, 2, 4, 8, 16\}$，$A_2=\{3, 6, 12\}$，$A_3=\{5, 10, 20\}$，$A_4=\{7, 14\}$，$A_5=\{9, 18\}$，$A_6=\{11\}$，$A_7=\{13\}$，$A_8=\{15\}$，$A_9=$

$\{17\}$，$A_{10}=\{19\}$. 因为$\{1, 2\}$、$\{4, 8\}$、$\{16\}$三个集合的每一个中最多取出一个数，所以 A_1 中最多可取 3 个数. 如果 A_1 中取出 3 个数，则必取 16，于是不能取 8，所以必取 4，于是不能取 2，所以必取 1，因而只有唯一的方法在 A_1 中取出 3 个数. 同理可知，A_2 和 A_3 中分别最多可取 2 个数，而且只有唯一的方法取出 2 个数. A_4、A_5 中都最多可取 1 个数，但都有 2 种方法取出 2 个数. 其他集合都最多取出 1 个数，且只有唯一的取法. 于是，最多可取出 $3+2+2+(1+1)+1\cdot 5=14$ 个数. 而且等号可以成立. 取数共有 $2\cdot 2=4$ 种方法. 取出来的数构成的集合为 $X\cup Y_i(i=1、2、3、4)$. 其中 $X=\{1, 4, 16, 3, 12, 5, 20, 11, 13, 15, 17, 19\}$，$Y_1=\{7, 18\}$，$Y_2=\{7, 9\}$，$Y_3=\{14, 18\}$，$Y_4=\{14, 9\}$. 故取出来的数的个数的最大值为 14.

另解：令 $A_1=\{1, 2\}$，$A_2=\{3, 6\}$，$A_3=\{4, 8\}$，$A_4=\{5, 10\}$，$A_5=\{7, 14\}$，$A_6=\{9, 18\}$. 则每个集合中最多取出一个数，所以这些集合中最多可取 6 个数. 这些集合外还有 8 个数，所以最多可取出 $6+8=14$ 个数. 若取出 14 个数，则必取 11、12、13、15、16、17、19、20. 注意取了 12、16、20 后不能取 6、8、10，所以必取 3、4、5. 又取了 4 后不能取 2，所以必取 1. 剩下 A_5、A_6 中各取出 1 个数，共有 $2\cdot 2=4$ 种方法.

6. k 的最大值为 663. 首先证明 $k\leqslant 663$. 我们注意如下的事实：当 $x-y=1$ 或 2 时，有 $x-y\mid x+y$. 由此可知，在任何连续 3 个自然数中任取两个数 x、y，必有 $x-y\mid x+y$. $k>663$ 时，令 $A_i=\{3i-2, 3i-1, 3i\}$ $(i=1, 2, \cdots, 662)$，$A_{663}=\{1987, 1988\}$，将取出的 $k\geqslant 664$ 个数归入上述 663 个集合，至少有一个集合含有其中的两个数 x、y，此时显然有 $x-y\mid x+y$，矛盾. 其次，当 $k=663$ 时，令 $A=\{1, 4, 7, \cdots, 1987\}$，对 A 中的任何两个数 a_i、a_j，有 $a_i-a_j=(3i-2)-(3j-2)=3(i-j)$，$a_i+a_j=(3i-2)+(3j-2)=3(i+j-1)-1$，所以 a_i-a_j 不整除 a_i+a_j.

7. 将 X 划分为 2 个子集：$A_1=\{x\mid x\equiv 0 \pmod 7, x\in X\}$，$A_2=X\backslash A_1$. 则 $|A_1|=7$，$|A_2|=43$. 显然，S 最多含有 A_1 中的 1 个数，于是 $|S|\leqslant 43+1=44$. 另一方面，对任何整数 x，若 $x\equiv 0、\pm 1、\pm 2、\pm 3 \pmod 7$，则 $x^2\equiv 0、1、4、2 \pmod 7$，由此可见，如果 $x^2+y^2\equiv 0 \pmod 7$，则 $x^2\equiv y^2\equiv 0 \pmod 7$，于是，令 $S=A_2\cup\{7\}$，则 S 合乎要求，此时 $|S|=44$. 故 $|S|$ 的最大值为 44.

8. 令 $A_k=\{k, 19k\}$，$k=6, 7, \cdots, 105$，则 A 最多含有 A_k 中的 1 个数，于是 $|A|\leqslant 1995-100=1895$. 另一方面，令 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}\cup\{106, 107, \cdots, 1995\}$，则 A 合乎要求，此时 $|A|=1895$. 故 $|A|$ 的最大值为 1895.

习 题 8

1. n 的最小值为 27. 首先证明 $n\geqslant 27$. 若 $n\leqslant 26$，则令 $A=\{1, 3, 5, \cdots, 2n-1\}$，则 $|A|=n$，但 A 中任何两个数的和：$(2i-1)+(2j-1)=2(i+j)-2\leqslant 2(26+25)-2=100<102$（其中 $0<i<j\leqslant n\leqslant 26$），矛盾. 其次，当 $n=27$ 时，令 $A_i=\{2i+1, 101-2i\}(i=1, 2, \cdots, 24)$，$A_{25}=\{1\}$，$A_{26}=\{51\}$. 将取出的 $n\geqslant 27$ 个数归入上述 26 个集合，至少有一个集合含有其中的两个数，这两个数只能在某个 $A_i(1\leqslant i\leqslant 24)$ 中，这两个数的和为 102.

2. 令 $A=\{1, 2, \cdots, 8\}\cup\{134, 135, \cdots, 1995\}$，则 A 显然合乎条件，此时 $|A|=1870$. 另一方面，考察 125 个集合 $A_k=\{k, 15k\}$ $(k=9, 10, \cdots, 133)$，它们含有 250 个互异的数. 去掉这些数后，X 中还有 1745 个数. 将这 1745 个数中的每一个数都作成一个单元素集合，连同前面 125 个集合 A_k 共 $1745+125=1870$ 个集合. 若 $|A|>1870$，则 A 必含有某个集合 A_k 中的 2 个数，其中较大的数是其较小的数的 15 倍，矛盾. 故 $|A|$ 的最大值是 1870.

3. 设 F 合乎条件，要使 $|F|$ 最大，注意到 $|A_i\cap A_j|\leqslant 2$，应取一些元素个数较少的集合归入 F. 显然，所有满足 $|A_i|\leqslant 2$ 的集合都可归入 F. 其次，所有满足 $|A_i|\leqslant 3$ 的集合也可归入 F. 实际上，考察 F 中任意两个集合 A_i、A_j. 当 A_i、A_j 中有一个集合，比如 A_i，使 $|A_i|\leqslant 2$ 时，则有 $|A_i\cap A_j|\leqslant 2$；当 $|A_i|=|A_j|=3$ 时，若 $|A_i\cap A_j|>2$，则 $|A_i\cap A_j|=3$，所以 $A_i=A_j$，矛盾. 于是，$|F|_{\max}\geqslant \mathrm{C}_{10}^1+\mathrm{C}_{10}^2+\mathrm{C}_{10}^3=175$. 上述构造的 F 是饱和的，即不能再放进任何一个集合. 但这并不能说明 $|F|$ 最大. 下面证明 $|F|\leqslant 175$. 反设 $|F|>175$，则必有 F 中的一个集合，设为 A，使 $|A|>3$. 取 A 的任意一个三元子集 A'，由于 $|A\cap A'|=3>2$，A 在 F 中，所以 A' 不在 F 中. 将 F 中的 A 换作 A'，得到 F'，则 F' 也合乎条件. 如此下去，可将 F 中的所有元素个数多于 3 的集合都换作 3 元集合，所得到的 F^* 仍合乎条件. 但此时 $|F|=|F^*|\leqslant 175$，矛盾.

4. 令 $A_i=\{i, i+1, i+2, \cdots, i+59\}$ $(i=1, 2, \cdots, 70)$，其集合中的元素按模 70 理解，即 $x>70$ 时，将 x 换作 $x-70$. 显然，$60\in A_1, A_2, \cdots, A_{60}$，所以 $k_{\max}\geqslant 60$. 我们猜想，$k_{\max}=60$. 这只须证明任何满足条件的 k，有 $k\leqslant 60$. 用反证法. 若 $k\geqslant 61$，我们证明取出的任何 k 个集合，都能找到 7 个集合的交为空集. 要找到 7 个集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_7}$，其交为空集，只须它们的补集的并为全集，即 $\overline{A}_{i_1}\cup\overline{A}_{i_2}\cup\cdots\cup\overline{A}_{i_7}=I$，注意到 $\overline{A}_{i_1}, \overline{A}_{i_2}, \cdots, \overline{A}_{i_7}$ 都是 10 元集，而 I 有 70 个元素，要使 $\overline{A}_{i_1}, \overline{A}_{i_2}, \cdots, \overline{A}_{i_7}$ 包含所有元素，则它们应在 $A_1, A_2, \cdots, A_{70}$ 中均匀分布，即 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_7}$ 在 $A_1, A_2, \cdots, A_{70}$ 中均匀

分布，所以要找的 7 个集合具有形式：A_i，A_{10+i}，…，A_{60+i}. 现在的问题是，这样的 7 个集合是否都被取出. 注意到这 7 个集合的共同特征是下标的个位数都是 i. 因为取出了 $k \geqslant 61$ 个集合后，至多剩下 9 个集合，它们不能同时含有下标的个位数为 0，1，2，…，9 这 10 种可能，即存在 $0 \leqslant i \leqslant 9$，使 i 不是剩下的 9 个集合的下标的个位数. 也即集合 A_i，A_{10+i}，…，A_{60+i} 都是取出的集合. 而 $A_i \cap A_{10+i} \cap \cdots \cap A_{60+i} = \Phi$，矛盾.

5. S 中元素个数的最大可能值为 76. 设 $|S| \geqslant 3$，$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \in S$，$p_1$、$p_2$、$p_3$ 为三个不同的素数，$p_1 < p_2 < p_3 \leqslant 7$，$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$ 为正整数. 设 $q \in \{2, 3, 5, 7\}$，$q \neq p_1$、p_2、p_3，则 $\{p_1, p_2, p_3, q\} = \{2, 3, 5, 7\}$. 由(i)知存在 $c_1 \in S$，使 $(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}, c_1) = 1$，取 c_1 为所有这样数中最小素因子最小的一个. 由(i)知存在 $c_2 \in S$，使 $(c_2, c_1) = 1$，$(c_2, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}) = 1$. 由(ii)知存在 $c_3 \in S$，使 $(c_3, c_1) > 1$，$(c_3, c_2) > 1$. 由 $(c_1, c_2) = 1$ 知 c_1、c_2 的最小素因子之积 $\leqslant c_3 \leqslant 108$. 从而 $q \mid c_1$. 由 $(c_2, c_1) = 1$，$(c_2, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}) = 1$，$\{p_1, p_2, p_3, q\} = \{2, 3, 5, 7\}$，$c_2 \leqslant 108$ 知 c_2 为大于 10 的素数. 由 $(c_3, c_2) > 1$ 知 $c_2 \mid c_3$. 又 $1 < \left(c_1, \dfrac{c_3}{c_2}\right) < 10$，$(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}, c_1) = 1$，故 $\left(c_1, \dfrac{c_3}{c_2}\right) = q^{\alpha}$ ①. 由(i)知存在 $c_4 \in S$，使 $(c_4, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}) = 1$，$(c_4, c_3) = 1$. 因此(由①)$(c_4, p_1 p_2 p_3 q) = 1$，即 $(c_4, 2 \times 3 \times 5 \times 7) = 1$. 从而 c_4 为大于 10 的素数. 由(ii)知存在 $c_5 \in S$，使 $(c_5, c_2) > 1$，$(c_5, c_4) > 1$. 所以 $c_2 \mid c_5$、$c_4 \mid c_5$. 又 $c_2 \mid c_3$、$(c_4, c_3) = 1$ 知 $(c_2, c_4) = 1$. 所以 $c_2 c_4 \mid c_5$. 而 $c_2 c_4 \geqslant 11 \times 13 > 108$，矛盾. 取 $S_1 = \{1, 2, \cdots, 108\} \backslash (\{1$ 及大于 11 的素数$\} \cup \{2 \times 3 \times 11, 2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5, 2 \times 3 \times 7, 2^2 \times 3 \times 7, 2 \times 5 \times 7, 3 \times 5 \times 7\})$. 则 $|S_1| = 76$. 下面证明 S_1 满足(i)、(ii). 若 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \in S_1$，$p_1 < p_2 < p_3$，则 $p_3 \geqslant 11$. 因此 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} = 2 \times 3 \times 13$ 或 $2 \times 3 \times 17$. ① $a = 2 \times 3 \times 13$，$b \in S_1$，$b \neq a$. (a) 由于 5、7、11 中至少有一个不整除 b，设为 p，则 $(a, p) = (b, p) = 1$. (b) 设 b 的最小素因子为 q_1，则 $2q_1 \leqslant 108$，$3q_1 \leqslant 108$. 若 $b \neq 2q_1$，则 $2q_1 \in S_1$，$(2q_1, a) > 1$，$(2q_1, b) > 1$；若 $b \neq 3q_1$，则 $3q_1 \in S_1$，$(3q_1, a) > 1$，$(3q_1, b) > 1$. ② $a = 2 \times 3 \times 17$，$b \neq a$，则①可证. ③ $a = b$，由于 5、7、11 中至少有一个不整除 a，故(i)成立. 若 a 为合数，取 a 的最小素因子 p，则 $p \in S_1$，$(p, a) > 1$；若 a 为素数，则 $a \leqslant 11$，$2a \in S_1$，$(2a, a) > 1$. ④ a、b 为 S_1 中两个不同的数，a、b 均至多含两个不同素因子，$a < b$. (a) 2、3、5、7、11 中有一个 p 不能整除 ab，此时 $p \in S_1$，$(p, a) = (p, b) = 1$. (b) 设 a、b 的最小素因子分别为 r_1、r_2，则 $r_1 r_2 \leqslant 108$. 若 $r_1 = r_2 < a$，则 $r_1 \in S_1$，$(a, r_1) > 1$，$(b, r_1) > 1$；若 $r_1 = r_2 = a$，则取 $u = 2$ 或 3，使 $b \neq ua$. 则 $ua \in S$，$(ua, a) > 1$，$(ua, b) > 1$；若

$r_1r_2 \neq a$, $r_1r_2 \neq b$,则 $r_1r_2 \in S_1$, $(r_1r_2, a) > 1$, $(r_1r_2, b) > 1$;若 $r_1r_2 = a$,则 $r_1 < r_2$,取 $u = 2$、3、5,使 $b \neq ur_2$, $a \neq ur_2$,则 $ur_2 \in S_1$, $(ur_2, a) > 1$, $(ur_2, b) > 1$;若 $r_1r_2 = b$,则取 $v = 2$、3、5,使 $a \neq vr_1$, $b \neq vr_1$,则 $vr_1 \in S_1$, $(vr_1, a) > 1$, $(vr_1, b) > 1$. 已证 S_i 满足(i)(ii). 另一方面已可见 $2\times3\times5$、$2^2\times3\times5$、$2\times3^2\times5$、$2\times3\times7$、$2^2\times3\times7$、$2\times5\times7$、$3\times5\times7$ 均不属于 S. 现证：$2\times3\times11$、$2\times3\times13$、5×7 不同时属于 S. 反设此三数均属于 S. 由(i) 知存在 d_1, $d_2 \in S$,使 $(2\times3\times11, d_1) = 1$, $(5\times7, d_1) = 1$, $(2\times3\times13, d_2) = 1$, $(5\times7, d_2) = 1$. 因此 d_1、d_2 均为大于 10 的素数. 由(ii) 知 $d_1 = d_2 \geqslant 17$. 由(ii) 知存在 $d_3 \in S$,使 $(7, d_3) > 1$, $(d_2, d_3) > 1$. 因此,$7d_2 \mid d_3$. 而 $7d_2 \geqslant 7\times17 = 119$,矛盾. 另一方面,大于 10 的素数中至多有一个属于 S, $1 \notin S$,这样 $|S| \leqslant 108-7-1-23-1 = 76$.

6. 先对 $n \leqslant 16$ 构造出不满足题目要求的染色方法.

用 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 表示正 n 边形的顶点(按顺时针方向),M_1、M_2、M_3 分别表示三种颜色的顶点集.

当 $n = 16$ 时,令 $M_1 = \{A_5, A_8, A_{13}, A_{14}, A_{16}\}$, $M_2 = \{A_3, A_6, A_7, A_{11}, A_{15}\}$, $M_3 = \{A_1, A_2, A_4, A_9, A_{10}, A_{12}\}$. 对于 M_1,点 A_{14} 到另 4 个顶点的距离互不相同,而另 4 个点刚好是一个矩形的顶点. 类似于 M_1,可验证 M_2 中不存在 4 个顶点是某个等腰梯形的顶点. 对于 M_3,其中 6 个顶点刚好是 3 条直径的顶点,所以任意 4 个顶点要么是某个矩形的 4 个顶点,要么是某个不等边 4 边形的 4 个顶点.

当 $n = 15$ 时,令 $M_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_5, A_8\}$, $M_2 = \{A_6, A_9, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$, $M_3 = \{A_4, A_7, A_{10}, A_{11}, A_{12}\}$, 每个 M_i 中均无 4 点是等腰梯形的顶点.

当 $n = 14$ 时,令 $M_1 = \{A_1, A_3, A_8, A_{10}, A_{14}\}$, $M_2 = \{A_4, A_6, A_7, A_{11}, A_{12}\}$, $M_3 = \{A_2, A_6, A_9, A_{13}\}$, 每个 M_i 中均无 4 点是等腰梯形的顶点.

当 $n = 13$ 时,令 $M_1 = \{A_5, A_6, A_7, A_{10}\}$, $M_2 = \{A_1, A_8, A_{11}, A_{12}\}$, $M_3 = \{A_2, A_3, A_4, A_9, A_{13}\}$,每个 M_i 中均无 4 点是等腰梯形的顶点.

在上述情形中去掉顶点 A_{13},染色方式不变,即得到 $n = 12$ 的染色方法;然后再去掉顶点 A_{12},即得到 $n = 11$ 的染色方法;继续去掉顶点 A_{11},得到 $n = 10$ 的染色方法.

当 $n \leqslant 9$ 时,可以使每种颜色的顶点个数小于 4,从而无 4 个同色顶点是某个等腰梯形的顶点.

由此可见,$n \leqslant 16$ 不具备题目要求的性质.

下面证明 $n=17$ 时，结论成立.

反证法. 反设存在一种将正 17 边形的顶点三染色的方法，使得不存在 4 个同色顶点是某个等腰梯形的顶点.

由于 $\left[\frac{17-1}{3}\right]+1=6$，故必存在某 6 个顶点染同一种颜色，不妨设为黄色. 将这 6 个点两两连线，可以得到 $C_6^2=15$ 条线段. 由于这些线段的长度只有 $\left[\frac{17}{2}\right]=8$ 种可能，于是必出现如下的两种情况之一：

(1) 有某 3 条线段长度相同.

注意到 $3\nmid 17$，不可能出现这 3 条线段两两有公共顶点的情况，所以存在两条线段，顶点互不相同. 这两条线段的 4 个顶点即满足题目要求，矛盾.

(2) 有 7 对长度相等的线段.

由假设，每对长度相等的线段必有公共的黄色顶点，否则能找到满足题目要求的 4 个黄色顶点. 再根据抽屉原理，必有两对线段的公共顶点是同一个黄色点. 这 4 条线段的另 4 个顶点必然是某个等腰梯形的顶点，矛盾. 所以，$n=17$ 时，结论成立.

综上所述，所求的 n 的最小值为 17.

习 题 9

1. 先改造条件. 令 $A'_i=\{A_i$ 中不大于 1988 的数$\}=A_i\cap\{1,2,\cdots,1988\}$，则 $N_i(1988)=|A'_i|$，$N_{ij}(1988)=|A'_i\cap A'_j|$. 因此本题实质上是要证明存在 i、$j(1\leqslant i<j\leqslant 29)$，使 $|A'_i\cap A'_j|>200$. 由题意，对任何 i，$|A'_i|=N_i(1988)\geqslant\frac{1988}{\mathrm{e}}>731$，所以，$|A'_i|\geqslant 732$. 令 $X=\{1,2,3,\cdots,1988\}$，则 A'_1，A'_2，$\cdots$，A'_{1988} 是 X 的子集. 不妨设 $|A'_i|=732$，否则，去掉 A'_i 中的一些元素. 考察集合元素关系表，设第 i 行 m_i 个 1. 计算各元素在子集中出现的总次数，有 $\sum\limits_{i=1}^{1988}m_i=S=\sum\limits_{i=1}^{29}|A'_i|=732\times 29$. 再计算各元素在集合对的交集中出现的总次数，有 $\sum\limits_{i=1}^{1988}C_{m_i}^2=T=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 29}|A'_i\cap A'_j|$. 于是，由 Cauchy 不等式，得 $2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 29}|A'_i\cap A'_j|=2\sum\limits_{i=1}^{1988}C_{m_i}^2=\sum\limits_{i=1}^{1988}m_i^2-\sum\limits_{i=1}^{1988}m_i\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{1988}m_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{1988}1^2}-\sum\limits_{i=1}^{1988}m_i=\frac{(732\times 29)^2}{1988}-732\times 29$，所以，必有一个 $A'_i\cap A'_j$，使 $|A'_i\cap A'_j|\geqslant$

$\dfrac{\dfrac{(732\times29)^2}{1988}-732\times29}{2C_{29}^2}>253$. 即必有一个 $A'_i\cap A'_j$，使 $|A'_i\cap A'_j|>200$.

2. 因为 $\sum_{i=1}^{10}m_i=\sum_{i=1}^{k}5=5k$，所以由 Cauchy 不等式，有 $2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|A_i\cap A_j|=2\sum_{i=1}^{10}C_{m_i}^2=\sum_{i=1}^{10}m_i^2-\sum_{i=1}^{10}m_i\geqslant\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{10}m_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{10}1^2}-\sum_{i=1}^{10}m_i=\dfrac{25k^2}{10}-5k$. 又由条件，$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|A_i\cap A_j|\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}2=2C_k^2=k^2-k$. 结合以下两式，得 $k\leqslant6$. 当 $k=6$ 时，6 个集合：$\{1,2,3,4,5\}$、$\{3,5,7,8,9\}$、$\{1,2,6,7,8\}$、$\{1,3,6,9,10\}$、$\{2,4,7,9,10\}$、$\{4,5,6,8,10\}$，合乎条件，故 k 的最大值为 6.

3. 解法 1：考察 m 个集合与 n 个元素的关系表 $B(n, m)$. 计算表中 1 的个数. 设第 i 行有 t_i 个 1 $(i=1, 2, \cdots, n)$，那么，$\sum_{i=1}^{n}t_i=S=\sum_{j=1}^{m}|A_j|=rm$. 再计算各元素在集合对的交集中出现的总次数，有 $\sum_{i=1}^{n}C_{t_i}^2=T=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|$. 于是，由 Cauchy 不等式，有 $2kC_m^2\geqslant2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|=2\sum_{i=1}^{n}C_{t_i}^2=\sum_{i=1}^{n}t_i^2-\sum_{i=1}^{n}t_i\geqslant\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}1^2}-\sum_{i=1}^{n}t_i=\dfrac{r^2\cdot m^2}{n}-rm$. 所以，$km(m-1)\geqslant\dfrac{r^2\cdot m^2}{n}-rm$，解得 $n\geqslant\dfrac{mr^2}{r+(m-1)k}$.

解法 2：设元素 x 在 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中出现的总次数为 $d(x)$，称为 x 的度. 则 $\sum_{x\in X}d(x)=\sum_{i=1}^{m}|A_i|$. 对于集合 A_i，它的所有元素的度的和称为 A_i 的度，记为 $d(A_i)$，即 $d(A_i)=\sum_{x\in A_i}d(x)$. 考察所有集合的度的和 $S=\sum_{i=1}^{m}d(A_i)$，则一方面，$d(A_i)=\sum_{\substack{j\neq i\\1\leqslant j\leqslant m}}|A_i\cap A_j|+|A_i|\leqslant\sum_{\substack{j\neq i\\1\leqslant j\leqslant m}}k+r=(m-1)k+r$. 所以 $S=\sum_{i=1}^{m}d(A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{m}[r+(m-1)k]=m[r+(m-1)k]$. 另一方面，对固定的 A_i，当 $x\in A_i$ 时，x 对 $d(A_i)$ 的贡献为 $d(x)$. 又 x 共在 $d(x)$ 个 A_i 中出现，

从而 x 对 S 的贡献为 $d(x)^2$. 于是，由 Cauchy 不等式，有 $S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{x\in A_i}d(x)=\sum_{x\in X}d(x)^2\geqslant\frac{\left(\sum_{x\in X}d(x)\right)^2}{\sum_{x\in X}1}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}|A_i|\right)^2}{|X|}=\frac{(mr)^2}{|X|}$. 命题获证.

4. 设共有 n 道试题，我们证明 $n_{\max}=5$. 显然，$n_{\max}>1$. 当 $n>1$ 时，对某道题 A，若有 5 人选择了同一答案，那么，这 5 人在 A 以外的任何一道题 B 中所选的答案互不相同. 但题 B 只有 4 个选择支，矛盾. 所以，任何一道题至多只有 4 人选择同一选择支. 另一方面，对于题目 A，16 个人的答案分布到 4 个支中，又每个支至多 4 个人选择，从而每个选择支都恰有 4 个人选择. 这样，对每个人 x，第 $i(i=1, 2, \cdots, n)$ 道题恰有 3 人与其同答案，得到一个 3 人组 A_i. 从整体上考察 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若有两个 3 人组 A_i、$A_j(i<j)$ 相交，设 $y\in A_i\cap A_j$，那么，x、y 在第 i、j 两道题中同答案，矛盾. 于是 A_i 两两不交. 所以，人数 $S\geqslant 1+|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|=3n+1$. 所以，$3n+1\leqslant 16$，$n\leqslant 5$. 下表说明 $n=5$ 是可能的.

学生 / 题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
2	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	1	2	3	4	4	3	2	1	3	4	1	2	2	1	4	3
4	1	2	3	4	2	1	4	3	4	3	2	1	3	4	1	2
5	1	2	3	4	3	4	1	2	2	1	4	3	4	3	2	1

5. 记 M 中的元素 $i(i=1, 2, \cdots, 10)$ 在 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中出现的次数为 $d(i)$.

从整体上考虑，一个显然的等式是：$d(1)+\cdots+d(10)=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_k|=5+5+\cdots+5=5k$，现在要求 k 的范围，只需求每个 $d(i)$ 的范围.

下面证明 $d(i)\leqslant 4(i=1, 2, \cdots, 10)$.

事实上，对 $i\in M$，考察所有含 i 的二元组 (i, j)（其中 $j\neq i$）和所有含 i 的五元子集. 一方面，i 与 M 中的其他元素可组成 9 个含 i 的二元组 (i, j)（其中 $j\neq i$），每一个含 i 的二元组在五元子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中最多出现两次，因此所有含 i 的二元组 (i, j) 最多出现 $2\times 9=18$ 次.

另一方面，$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中共有 $d(i)$ 个含 i，由于 $|A_j|=5(j=1,$

$2, \cdots, k)$，因而每个含 i 的子集恰有 4 个含 i 的二元组 (i, j)，所以 $4 \cdot d(i) \leqslant 18$，故 $d(i) \leqslant 4$.

于是，$5k = d(1) + \cdots + d(10) \leqslant 4 \times 10 \Rightarrow k \leqslant 8$.

最后，当 $k=8$ 时，下述 8 个 5 元数集的确满足要求：

$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A_2 = \{1, 6, 7, 8, 9\}$，$A_3 = \{1, 3, 5, 6, 8\}$，$A_4 = \{1, 2, 4, 7, 9\}$，$A_5 = \{2, 3, 6, 7, 10\}$，$A_6 = \{3, 4, 7, 8, 10\}$，$A_7 = \{4, 5, 8, 9, 10\}$，$A_8 = \{2, 5, 6, 9, 10\}$，故 $k_{\min} = 8$.

另解：考察集合元素关系表，将同一列中的每两个"1"连线段.

一方面，由于每列有 5 个 1，从而每列连了 $C_5^2 = 10$ 条线段，表中共连了 $10 \cdot k = 10k$ 条线段. 另一方面，每一条线段对应两个行（端点所在的行），依题意，每两行最多对应两条线段，于是线段条数不多于 $2C_{10}^2 = 90$，所以 $10k \leqslant 90$，所以 $k \leqslant 9$.

若 $k = 9$，则每两行都恰对应两条线段，即每条类型的线段恰出现 2 次，于是，每一行中的 1 成对出现，都为偶数个 1，从而表中 1 的个数为偶数. 但每列都有 5 个 1，9 列共有 $9 \cdot 5 = 45$（奇数）个 1，矛盾，所以 $k \leqslant 8$.

6. (1) 设第 $i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 家航空公司提供了 a_i 条直飞航线，记 $S = a_1 + s_2 + \cdots + a_k$，则当第 i 家航空公司倒闭时，各航空公司可提供服务的直飞航线的条数为 $S - a_i$，于是，$S - a_i \geqslant n - 1$.

所以 $\sum_{i=1}^{k}(S - a_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k}(n-1) = k(n-1)$，即 $kS - S \geqslant k(n-1)$，所以 $S \geqslant \dfrac{k(n-1)}{k-1}$.

但 S 是整数，所以 $S \geqslant \left[\dfrac{k(n-1)+k-2}{k-1}\right] = \left[\dfrac{kn-2}{k-1}\right]$.

反之，我们证明 $S = \left[\dfrac{kn-2}{k-1}\right]$ 合乎条件，即存在一个 n 阶图 G，使 $\| G \| = \left[\dfrac{kn-2}{k-1}\right]$，并可将 G 的边 k-染色（每条边恰染 k 种颜色中的一种），使去掉任何一种颜色的边后（对应航空公司倒闭），剩下的图仍是连通的.

对 n 归纳（跨度为 $k-1$）.

当 $n = 1, 2, \cdots, k-1$ 时，$n < k$，此时 $S = \left[\dfrac{kn-2}{k-1}\right] = n + \left[\dfrac{n-2}{k-1}\right] = n$，构造一个长为 n 的圈，将其边 k-染色，使任何两条边不同色（由于 $n < k$，这是可能的），这样，任意去掉一种颜色边，剩下的图仍是连通的，结论成立.

设 $n \leqslant r$（其中 $r \geqslant k-1$）时结论成立，考虑 $n = r + k - 1$ 的情形.

取其中的 r 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_r$，由归纳假设，存在一个有 $\left[\dfrac{kn-2}{k-1}\right]$ 条边

的 n 阶图 G，可按要求对边 k-染色，设这 k 种颜色为 $1, 2, \cdots, k$.

取 G 中一点 A_1，及 G 外的另 $k-1$ 个点 $B_1, B_2, \cdots, B_{k-1}$，连边 $B_{i-1}B_i(i=1, 2, \cdots, k$，其中 $B_0=B_k=A_1)$，得到图 G'，则 $\|G'\|=\|G\|+k=\left[\frac{kn-2}{k-1}\right]+k=\left[\frac{k(n+k-1)-2}{k-1}\right]$，将边 $B_{i-1}B_i$ 染第 i 色，我们证明染色合乎要求.

实际上，假定去掉第 $i(i=1, 2, \cdots, k)$ 种颜色的边，考虑 G' 中的任意两点 A、B.

如果 A、$B\in V(G)$，则由归纳假设，A、B 连通；

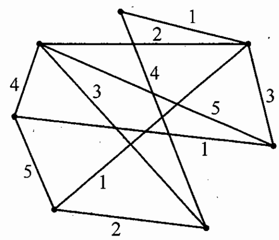
如果 A、$B\in\{B_1, B_2, \cdots, B_{k-1}\}$，则因为 $B_0=A_1, B_1, B_2, \cdots, B_{k-1}$ 组成一个长为 k 的圈，每种颜色的边各出现一次，于是该圈中只去掉了一条边，A、B 连通；

如果 $A\in V(G)$，$B\in\{B_1, B_2, \cdots, B_{k-1}\}$，则 $A=A_1$，或由归纳假设，A 与 A_1 连通，又 B 通过圈$(A_1, B_1, B_2, \cdots, B_{k-1})$与 A_1 连通，从而 A、B 连通.

所以 $n=r+k-1$ 时结论成立，故这些航空公司一共至少提供$\left[\frac{kn-2}{k-1}\right]$条直飞航线.

(2) 当 $n=7$，$k=5$ 时，如果某个机场只有 2 条直飞航线与其连通，则这两条航线所属航空公司倒闭时，该机场无法到达，从而每个机场都至少有 3 条直飞航线与其连通，于是至少有 $3\cdot 7=21$ 条直飞航线. 但每条直飞航线同时属于 2 个机场，被计算 2 次，所以 $S\geqslant\frac{21}{2}$，但 S 是整数，所以 $S\geqslant 11$.

当 $S=11$ 时，设 5 家航空公司提供航线的代号为 1, 2, 3, 4, 5，则如图所示的 11 条直飞航线合乎要求.



所以，所有这些航空公司一共至少提供 11 条直飞航线.

习　题　10

1. 甲的得分 S 由他答题情况确定，因而可引入参数：设甲答对、不答、答错的题数分别为 x、y、z，$x+y+z=30$，则甲的得分 $S=5x+y+0z=5x+y$. 所谓“甲的得分少些，但仍大于 80，则乙就无法推算了”，则意味着要求出 $S>80$，使对应的 x 是唯一的且 S 是最小的. 因为由 S 可猜想(x, y)，也可猜想$(x-1, y+5)$，还可猜想$(x+1, y-5)$，要使猜想的结果只能是(x, y)，必须$(x-1, y+5)$、$(x+1, y-5)$都不存在. 因为$(x-1, y+5)$都不存在，所以 $x-1<0$ 或$(x-1)+(y+5)>30$. 但 $x\geqslant 1$，所以只能是$(x-1)+$

$(y+5)>30$. 于是，$x+y\geqslant 27$. 因为$(x+1,\ y-5)$不存在，所以 $y-5<0$ 或$(x+1)+(y-5)>30$. 但 $x+y+z=30$ 得 $x+y\leqslant 30$，所以只能是 $y-5<0$. 于是，$y\leqslant 4$. 所以 $S=5x+y=5(x+y)-4y\geqslant 5\times 27-4y\geqslant 5\times 27-4\times 4=119$. 等式在 $x=23$，$y=4$ 时成立. 故 $S_{\min}=119$，即此次考试甲得了 119 分.

2. 称 $i+j$ 为格$(i,\ j)$的特征值，则学生的位置数即是他前后位置的特征值之差. 记所有格的特征值之和为 M. 引入参数：设最初空格的位置为$(x,\ y)$，调整后为$(p,\ q)$，那么最初所有学生的特征值之和为 $M-(x+y)$，调整后所有学生的特征值之和为 $M-(p+q)$，于是 $S=M-(x+y)-[M-(p+q)]=p+q-(x+y)$. $S_{\max}=6+8-(x+y)$，$S_{\min}=1+1-(x+y)$，$S_{\max}-S_{\min}=[6+8-(x+y)]-[1+1-(x+y)]=14-2=12$.

3. 设 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 7\}$ 为演出日期的集合，A_i 为第 i 个剧团演出的日期的集合$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$. 易知，A_1，A_2，$\cdots$，A_{12} 互不包含. 否则对 $i\neq j$，设 A_i 包含于 A_j 内，则第 j 团看不到第 i 团的演出. 考察演出场数 $t=\sum\limits_{i=1}^{12}|A_i|$，若有某个 $|A_i|=0$，则其他团都看不到第 i 团的演出，矛盾. 因此，对任何 i，有 $|A_i|\geqslant 1$. 引入参数：设其中恰有 k 个集合是单元集，而其他集合中的元素个数至少是 2，于是 $t=\sum\limits_{i=1}^{12}|A_i|\geqslant \underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\text{个}1}+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{12-k\text{个}2}=24-k$. 不妨设$\{a_1\}=A_1$，$\{a_2\}=A_2$，$\cdots$，$\{a_k\}=A_k$. 因为 A_1，A_2，$\cdots$，A_{12} 互不包含，从而 a_1，a_2，$\cdots$，a_k 都不在 A_{k+1}，A_{k+2}，$\cdots$，A_{12} 中，所以 A_{k+1}，A_{k+2}，$\cdots$，A_7 都是$\{a_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots,\ a_7\}$的子集，即$\{A_{k+1},\ A_{k+2},\ \cdots,\ A_{12}\}$是 $A\backslash\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\}$的互不包含子集族，所以 $C_{7-k}^{\left[\frac{7-k}{2}\right]}\geqslant 12-k$. 此式在 $7-k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 时不成立，所以 $7-k\geqslant 5$，即 $k\leqslant 2$. 所以 $t\geqslant 24-k\geqslant 22$. 最后，当$t=22$ 时，令 $A_1=\{1\}$、$A_2=\{2\}$，而 A_3，A_4，$\cdots$，A_{12}取$\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$中的 10 个互异二元集即可. 比如 $A_3=\{3,\ 4\}$、$A_4=\{3,\ 5\}$、$A_5=\{3,\ 6\}$、$A_6=\{3,\ 7\}$、$A_7=\{4,\ 5\}$、$A_8=\{4,\ 6\}$、$A_9=\{4,\ 7\}$、$A_{10}=\{5,\ 6\}$、$A_{11}=\{5,\ 7\}$、$A_{12}=\{6,\ 7\}$. 所以，演出场数的最小值为 22.

4. (1) 反设 $n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$，其中 $k=n^2-13$，不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_k$，则 $a_k^2=n^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k-1}^2)\leqslant n^2-(k-1)=n^2-(n^2-14)=14$. 所以 $a_k\leqslant 3$. 不妨设 a_1，a_2，$\cdots$，a_k 中有 i 个为 1、j 个为 2、t 个为 3，其中 $i+j+t=k=n^2-13$，那么 $n^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)=i+4j+9t=(n^2-13)+3j+8t$，所以 $3j+8t=13$，$8t=13-3j\leqslant 13$，所以 $t\leqslant 1$. 当 $t=0$ 时，$3j=13$，矛盾. 当 $t=1$ 时，$3j=5$，亦矛盾. 所以，当$s(n)\geqslant n^2-13$ 时，都

存在 $k=n^2-13\leqslant s(n)$，使 n^2 不能表成 k 个正整数的平方和. 所以 $s(n)\leqslant n^2-14$. (2) 若 $s(n)=n^2-14$，则对任何自然数 $k\leqslant n^2-14$，正整数 n 都可表成 k 个正整数的平方和. 考察其中的任意一个正整数 $k\leqslant n^2-14$，令 $k=n^2-r\ (14\leqslant r\leqslant n^2-1)$，我们要找到一个 n，使 n^2 存在相应分拆：$n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$（其中 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_k$）. 引入参数：不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中有 i 个为 1、j 个为 2、t 个为 3，其中 $i+j+t=k=n^2-r$. 我们记此 k—分拆为 $k(i,j,t)$，那么，$n^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)=i+4j+9t=(n^2-r)+3j+8t$，所以 $3j+8t=r$ ①. 使 n 合乎要求的一个必要条件是，对所有 $14\leqslant r\leqslant n^2-1$，方程 ① 有非负整数解. 实际上，若 $r\equiv1\pmod 3$，令 $r=3r_1+1(r_1\geqslant5)$，此时，$(j,t)=(r_1-3,1)$ 是 ① 的解. 若 $r\equiv2\pmod 3$，令 $r=3r_1+2\ (r_1\geqslant4)$，此时，$(j,t)=(r_1-2,1)$ 是 ① 的解. 若 $r\equiv0\pmod 3$，令 $r=3r_1\ (r_1\geqslant5)$，此时，$(j,t)=(r_1,0)$ 是 ① 的解. 注意到 $k=n^2-r$，所以 ① 等价于 $3j+8t=n^2-k$ ②. 于是，n^2 存在 $k(i,j,t)$分拆，则 j、t、k 满足②. 注意②中不含对 i 的要求，所以 k、i、j、t 还要满足：$i=k-(j+t)\geqslant0$，即 $k\geqslant j+t$. 于是，对任何 n，只要分拆的项数 k 不小于 $j+t$，其中 j、t 满足②，则 n 存在相应的 k—分拆 $k(i,j,t)$. 注意到 $(n^2-k)=3j+8t\geqslant3(j+t)$，从而使 $k\geqslant j+t$ 的一个充分条件是 $k\geqslant\dfrac{n^2-k}{3}$，即 $k\geqslant\dfrac{n^2}{4}$. 于是，当 $k\geqslant\dfrac{n^2}{4}$ 时，对所有 n，都存在相应的 $k(i,j,t)$分拆. 若分拆的项数 $k<\dfrac{n^2}{4}$，则 n 不一定存在 $k(i,j,t)$分拆. 此时应立足于找其他形式的分拆. 若 $k<\dfrac{n^2}{4}$，则当 n 较小时，分拆的项数的可能取值较少. 于是，可从较小的自然数 n 开始一一验证. 为了便于利用勾股数，可取 3、4、5、6、8、10、12，这些都难于分解. 取 $n=13$，有 $13^2=12^2+5^2=12^2+(3^2+4^2)=8^2+8^2+5^2+4^2$. 又 $8^2=4^2+4^2+4^2+4^2$，$4^2=2^2+2^2+2^2+2^2$，$2^2=1^2+1^2+1^2+1^2$，所以 13^2 可以进行 7，10，13，…，43 分拆. 又 $5^2=4^2+3^2$，于是 13^2 又可进行 5，8，11，…，44 分拆. 再由 $12^2=6^2+6^2+6^2+6^2$，$6^2=3^2+3^2+3^2+3^2$，$4^2=2^2+2^2+2^2+2^2$，$2^2=1^2+1^2+1^2+1^2$，可知，13^2 可以进行 3，6，9，…，33 分拆. 最后，$13^2=3^2+3^2+\cdots+3^2+4^2$，$3^2=2^2+2^2+1^2$，于是选择其中 9 个或 12 个 3^2 拆开，则 13^2 又可进行 $18+2\times9=36$、$18+2\times12=42$ 分拆. 于是，13^2 可进行 1，2，…，44 分拆. 而对 $k\geqslant45$，有 $k\geqslant\dfrac{13^2}{4}$，所以 13^2 可以进行 $k(i,j,t)$分拆. 故 $s(13)=13^2-14$. (3) 我们证明当 $n=2^m\times13$ 时，$s(n)=n^2-14$. 实际上，$n^2=(2^m\times13)^2=4^t(2^{m-t}\times13)^2(0\leqslant t\leqslant m)$. 因为 13^2 可以进行 1，2，3，…，

155 分拆，所以 n^2 可以进行 1，2，3，…，$4^m\times155$ 分拆. 但 $4^m\times155>\frac{(2^m\times13)^2}{4}=\frac{n^2}{4}$，由前面的讨论，$n^2$ 可以进行 1，2，3，…，n^2-14 分拆，故 $s(2^m\times13)=(2^m\times13)^2-14$.

5. 取 $n=4$，$a_1=a_2=a_3=a_4=2$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=8\geqslant4$，$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_n^2=16\geqslant4^2$. 所以 a_1、a_2、a_3、a_4 合乎题目条件，此时 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=2$. 下面证明，对任何满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n$，且 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant n^2$ 的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n(n>3)$，有 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\geqslant2$. 假设 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}<2$，并设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有 i 个非负数，记为 $x_1, x_2, \cdots, x_i$，有 j 个负数，记为 $-y_1, -y_2, \cdots, -y_j$，其中 $y_1, y_2, \cdots, y_j>0$，$i>0$，$j\geqslant0$，$i+j=n$. 那么，$\max\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}<2$. 因为 $x_1+x_2+\cdots+x_i+[(-y_1)+(-y_2)+\cdots+(-y_j)]\geqslant n$，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_i\geqslant n+y_1+y_2+\cdots+y_j$. 又 $\max\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}<2$，$y_1, y_2, \cdots, y_j>0$，于是 $2i=2+2+\cdots+2>x_1+x_2+\cdots+x_i\geqslant n+y_1+y_2+\cdots+y_j=i+j+y_1+y_2+\cdots+y_j$. 移项得 $i-j>y_1+y_2+\cdots+y_j$. 因为 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_i^2+(-y_1)^2+(-y_2)^2+\cdots+(-y_j)^2\geqslant n^2$，所以 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_i^2\geqslant n^2-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_j^2)\geqslant n^2-(y_1+y_2+\cdots+y_j)^2>n^2-(i-j)^2=(i+j)^2-(i-j)^2=4ij$. 又 $i>0$，所以 $j<1$，即 $j=0$，故 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是非负数，所以 $0\leqslant a_i<2\ (i=1, 2, \cdots, n)$，所以 $4n>a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant n^2$，解得$n<4$，与条件 $n>3$ 矛盾. 综上所述，$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=2$.

习　题　11

1. 设第 i 行的男生数为 a_i，则女生数为 $75-a_i$. 依题意，可知，$\sum\limits_{i=1}^{22}(\mathrm{C}_{a_i}^2+\mathrm{C}_{75-a_i}^2)\leqslant11\times\mathrm{C}_{75}^2$. 这是因为任意给定的两列处于同一行的两个人中，性别相同的学生不超过 11 对，故所有性别相同的两人对的个数不大于 $11\times\mathrm{C}_{75}^2$. 于是，我们有 $\sum\limits_{i=1}^{22}(a_i^2-75a_i)\leqslant-30\,525$，即 $\sum\limits_{i=1}^{22}(2a_i-75)^2\leqslant1650$. 利用柯西不等式，可知 $\left[\sum\limits_{i=1}^{22}(2a_i-75)\right]^2\leqslant22\sum\limits_{i=1}^{22}(2a_i-75)^2\leqslant36\,300$，因此，$\sum\limits_{i=1}^{22}(2a_i-75)<191$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{22}a_i<\frac{191+1650}{2}<921$. 所以，男生的个数不超过 928.

2. 用点表示人，对打过招呼的两个人，对应的两个点连线，得到一个简单图. 计算此图中角的个数 S. 一方面，对 G 计算，每个点引出 $3k+6$ 条边，有 C_{3k+6}^2 个角. $12k$ 个点，共有 $12k\mathrm{C}_{3k+6}^2$ 个角. 又每个角都有顶点，且不同的顶点对

应的角不同，于是 $S=12kC_{3k+6}^{2}$. 另一方面，从"2 人组"出发，因为对任意两人，与他们打过招呼的人数都相等. 设这样的人数为 t，则每个 2 人组都得到 t 个角. 又每个角都对应一个 2 人组，且不同的 2 人组对应的角不同，于是 $S=tC_{12k}^{2}$. 所以 $12kC_{3k+6}^{2}=tC_{12k}^{2}$，解得 $t=\dfrac{(3k+6)(3k+5)}{12k-1}$. 所以 $16t=\dfrac{(12k-1+25)(12k-1+21)}{12k-1}=(12k-1)+25+21+\dfrac{25\times21}{12k-1}$. 显然，$(3,12k-1)=1$，所以 $12k-1\mid25\times7$. 注意到 $12k-1$ 模 4 余 3，所以 $12k-1=7$，5×7，$5^2\times7$，其中只有 $12k-1=5\times7$ 有整数解 $k=3$、$t=6$，所以会议的人数只可能是 36. 下面证明：36 人的会议是可能的. 即存在 36 阶图 G，G 中每个点的度是 15，并且对每一对点，同时与它们相连的点都有 6 个. 先作 6 个完全图 K_6. 每个完全图的顶点都用 1、2、3、4、5、6 编号. 现在将这 6 个完全图的有关点用边联接，构成图 G. G 中的顶点记为 (i,j)，它表示第 i 个完全图中的第 j 个顶点. 注意到每个点已与所在完全图中的 5 个点相连，现将每个点再与纵坐标相同的点相连，则每个点又连了 5 条边. 再将坐标差相同的点相连，即 $i-j=i'-j'$，则 (i,j) 与 (i',j') 相连. 这样，每个点又引出了 5 条边. 所以每个点都连了 15 条边且每个点向它不在的完全图都有 2 点相连，其中一个点与它的纵坐标相同，另一个点与它的坐标差相同. 对任意两个点，若某个点与它们都相连，则称这两个点对了一个角. 下面证明 G 中的任何两个点都对了 6 个角. 实际上，考察任意的两个点 (i,j)、(i',j')，若 $i=i'$，即这两个点在同一个完全图中，于是它们在该完全图中对了 4 个角. 此外，恰有两个点：$(i'-j'+j,j)$ 和 $(i-j+j',j')$ 这两个点与它们相连，所以它们共对了 6 个角. 若 $i\neq i'$，且 $i-j=i'-j'$，则 (i,j') 和 (i',j) 与它们都相连. 此外，对 i, i' 以外的 4 个 i''，点 $(i'',i''-i+j)$ 与它们都相连，其他点都不同时与它们相连. 所以它们对了 6 个角. 若 $i\neq i'$，且 $i-j\neq i'-j'$，则 (i,j')、(i',j)、$(i,i-i'+j')$ 和 $(i',i'-i+j)$ 与它们都相连. 此外，还有两点 $(i'-j'+j,j)$、$(i-j+j',j')$ 与它们都相连，其他点都不同时与它们相连. 所以它们对了 6 个角. 综上述，参加会议的人数为 36.

3. 由条件"每个选手的总分都是 26"，想到计算第 k 天后 n 名选手得分之和 S. 一方面，每天的得分为 $1+2+3+\cdots+n$，所以，$S=k(1+2+\cdots+n)$. 另一方面，每个选手得 26 分，从而 $S=26n$. 所以，$k(n+1)=52$. 所以 $(n,k)=(51,1)$、$(25,2)$、$(12,4)$、$(3,13)$. 其中 $(n,k)=(51,1)$ 时，各选手的总分互异，矛盾，故舍去. 由下面的构造可知，其他 3 种情况都是可能的. 当 $(n,k)=(25,2)$ 时，第 i 号选手的名次集合为 $A_i=\{i,26-i\}$ $(i=1,2,\cdots,25)$. 当 $(n,k)=(12,4)$ 时，第 i 号选手的名次集合为 $A_i=\{i,13-i,i,$

$13-i\}$ $(i=1, 2, \cdots, 12)$. 当$(n, k)=(3, 13)$时，各选手的名次集合为$A_1=\{2, 3, 1\}\cup\{1, 3, 1, 3, \cdots, 1, 3\}$、$A_2=\{3, 1, 2\}\cup\{2, 2, 2, 2, \cdots, 2, 2\}$、$A_3=\{1, 2, 3\}\cup\{3, 1, 3, 1, \cdots, 3, 1\}$.

4. 设有 t 个大龄学生，每个学生都有 k 个朋友. 为叙述问题方便，用 30 个点表示 30 个学生. 对任何两个点 A、B，如果 A、B 是朋友，且 A 的年龄大于 B 的年龄，则连一条指向 B 的有向边，得到一个竞赛图. 称大龄学生对应的点为"大点"，设所有的大点为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$. 依题意，有 $d^+(A_i)>d^-(A_i)$，$d(A_i)=d^+(A_i)+d^-(A_i)=k$，于是 $d^+(A_i)\geqslant\dfrac{k+1}{2}$. 不妨设 A_1 的年龄$\leqslant A_2$ 的年龄$\leqslant\cdots\leqslant A_t$ 的年龄，则 $d^+(A_1)\leqslant 30-t$(A_1 最多向 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 外的 $30-t$ 个点引出边)，$d^+(A_t)=k$. 计算所有"大点"的出度的和 S. 一方面，$S=d^+(A_1)+d^+(A_2)+\cdots+d^+(A_{t-1})+k\geqslant\dfrac{k+1}{2}(t-1)+k$. 另一方面，$S\leqslant\|G\|=15k$，所以 $15k=\|G\|\geqslant S\geqslant\dfrac{k+1}{2}(t-1)+k$，所以 $t\leqslant\dfrac{28k}{k+1}+1$ ①. 此外，$\dfrac{k+1}{2}\leqslant d^+(A_1)\leqslant 30-t$，所以 $k\leqslant 59-2t$ ②. 由①②消去 k(利用①右边关于 k 的函数的单调性)，有 $t\leqslant\dfrac{28(59-2t)}{60-2t}+1$，即 $t^2-59t+856\geqslant 0$ ③. 但 $t\leqslant 30$，使③成立的最大整数是 $t=25$. 即大龄学生不多于 25. 最后，$t=25$ 是可能的. 实际上，当 $t=25$ 时，以上不等式成立等号，代入②，解得 $k=9$.

将 $1, 2, \cdots, 30$ 排成 6 行(如图)，

1,	2,	3,	4,	5
6,	7,	8,	9,	10
11,	12,	13,	14,	15
16,	17,	18,	19,	20
21,	22,	23,	24,	25
26,	27,	28,	29,	30

规定 i、j 是一对朋友，当且仅当 i、j 满足下列 3 个条件之一：

(1) i、j 在相邻的行中但不同列.

(2) i、j 同列，但其中一个在最后一行.

(3) i、j 都在第一行中.

此时，每人有 9 个朋友. 比如 1 的 9 个朋友为 2、3、4、5、7、8、9、10、26. 故 t 的最大值为 25.

5. 设有 n 个考生. 易知，每个考生的答卷都是一个长为 4 的序列，此序列由 A、B、C 三个字母组成. 从而本题等价于对 $n\times 4$ 方格棋盘的格 3-染色，使"任何三行都有某列的 3 个格两两异色". 设所有列中的异色格对的总数为 S. 一方面，对任何一列，设该列中有 a 个格为 A 色，b 个格为 B 色，c 个格为 C 色，则该列中的异色对有 $ab+bc+ca$ 个. 注意到 $3(ab+bc+ca)\leqslant a^2+b^2+$

$c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2=n^2$，所以，4 列中至多有$\frac{4n^2}{3}$个异色对. 即 $S\leqslant\frac{4n^2}{3}$. 另一方面，任何 3 行都有一列包含 3 色，此 3 色构成 3 个异色对，于是有 $3C_n^3$ 个异色对. 但同一个异色对可能出现在 $n-2$ 个不同的3-行组中，这样，$S\geqslant 3\cdot\frac{C_n^3}{n-2}$. 所以，$3\cdot\frac{C_n^3}{n-2}\leqslant S\leqslant\frac{4n^2}{3}$. 但此不等式恒成立，不能求出 n 的范围. 读者可以考虑，这一估计是否可以改进？从另一角度考虑“任何三行都有某列的 3 个格两两异色”的反面：存在三行，这三行的所有列的 3 个格都只有两色. 我们用反证法找每列只有两色的那些列. 通过尝试，发现 $n<10$. 否则，取其中任意 10 行得到 10×4 方格表 M. 考察 M 的第一列格，必有一种颜色至多出现 3 次. 于是，至少有 7 行，这 7 行的首列只有两色. 考察这 7 行的第二列，必有一种颜色至多出现 2 次. 从而在上述 7 行中至少有 5 行，这 5 行的首列、第二列都只有两色. 再考察这 5 行的第三列，必有一颜色至多出现 1 次. 从而在上述 5 行中至少有 4 行，这 4 行的首列、第二列、第三列都只有两色. 再考察这 4 行的最后一列，必有一颜色至多出现 1 次，从而在上述 4 行中至少有 3 行，这 3 行的每一列都只有两色. 设这 3 行为 A_1、A_2、A_3，则 A_1、A_2、A_3 的任何一列都有两个格同色，矛盾. 当 $n=9$ 时，9 个人对每道题选择的答案代号分别为(1, 2, 1, 2)、(2, 3, 2, 2)、(3, 1, 3, 2)、(1, 1, 2, 1)、(2, 2, 3, 1)、(3, 3, 1, 1)、(1, 3, 3, 3)、(2, 1, 1, 3)、(3, 2, 2, 3)，所以 $n=9$ 是可能的，故 n 的最大值为 9.

6. 将每两个委员至多有一个公共成员理解为 $|A_i\cap A_j|\leqslant1$，则应记 A_i 为第 i 个委员会的人的集合. 再令 X 为给定的 25 个人的集合，$F=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$. 我们来计算所有二人组的总数 S. 一方面，$|A_i|=5$，从而每个 A_i 中有 $C_5^2=10$ 个二人组，于是，F 中的 k 个集合可产生 $10k$ 个二人组. 由于 $|A_i\cap B_j|\leqslant1$，这 $10k$ 个二人组互异. 所以，$S\geqslant10k$. 另一方面，设 $|X|=25$，则 X 中的二人组的总数为 $S=C_{25}^2$. 所以，$C_{25}^2=S\geqslant10k$，所以，$k\leqslant30$. 命题获证.

习 题 12

1. (1) 若 $k\geqslant7$，则 A 的非空子集有 2^k-1 个，而其中每个子集元素和不超过 $17k$，但 $2^k-1>17k$，必有两个子集的和相等，矛盾. 若 $k=6$，考虑 A 的一、二、三、四元子集，共有 $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$ 个不同的子集，其元素和都在区间[1, 57]内(因为任意一个这样的和 $\leqslant16+15+14+13=58$，且由 $13+16=15+14$ 知，13、14、15、16 不都属于 A). 若 $1\in A$，则由 $1+15=$

16 知，15、16 不同时属于 A. 由 $1+13=14$ 知，13、14 不同时属于 A. 由 $1+11=12$ 知，11、12 不同时属于 A. 所以此时最大的和不大于 $16+14+12+10=52$，而 $56>52$，必有两个子集的和相等，矛盾. 若 $2\in A$，则由 $2+14=16$ 知，14、16 不同时属于 A. 由 $2+13=15$ 知，13、15 不同时属于 A. 由 $2+10=12$ 知，10、12 不同时属于 A. 所以此时最大的和不大于 $16+15+12+9=52$，而 $56>52$，必有两个子集的和相等，矛盾. 若 1 和 2 都不属于 A，则最小的和不小于 3. 于是，其和都属于区间 $[3, 57]$，最多有 55 个不同的和. 而 $56>55$，必有两个子集的和相等，矛盾. 综上所述，$k\leqslant 5$. (2) 设 A 的元素和为 S. 若 $S<16$，考察包含 A 的 $k+1$ 元子集 $B=A\cup\{16\}$. 由于 A 的任意两个子集元素之和不等，且 B 的任意一个包含 16 的子集元素和比 B 的任意一个不包含 16 的子集元素和大，从而 B 的任意两个子集元素之和不相等，与条件矛盾. 从而 $S\geqslant 16$. 又 $A=\{1, 2, 4, 9\}$ 满足要求，此时 $S(A)=16$，从而 S 最小值为 16. 若 $k\leqslant 4$，则 $S\leqslant 16+15+14+13=58<66$；若 $k=5$，且 16、15 不全属于 A，则 $S\leqslant 16+14+13+12+11=66$；若 $k=5$，且 16、15 都属于 A，则 (14, 13)、(12, 11)、(10, 9) 每一组中的两个数都不能全属于 A，故 $S\leqslant 16+15+14+12+10=67$，且等号不成立，否则 14、12、10、$16\in A$，但 $16+10=12+14$，矛盾. 于是 $S\leqslant 66$. 又 $A=\{16, 15, 14, 12, 9\}$ 满足要求，此时 $S(A)=66$. 从而 S 最大值为 66.

2. 显然，每个议员所填的各项开支是一个长为 200 的数列，2000 个议员所填的数列构成一个 2000×200 的数表. 此数表的各行的和都不大于 S. 现在要在数表的最下面填一行数，使每列中所填的数至少小于该列中 k 个数. 求最小的 k，使最后所填的一行数的和不大于 S. 若数 k 合乎上述要求，则称 k 是好的. $k=2000$ 显然是好的. 进一步，$k=1999$ 也是好的. 实际上，$k=1999$ 时，每一列只有一个数小于 x_j，我们称这样的数为坏数. 于是，200 个列至多有 200 个坏数. 但数表有 2000 行，于是，至少有一个行没有坏数. 这表明：填此行数的议员同意选出的每一项开支. 如此下去(不断缩小包围圈)，不难发现，$k=1991$ 是好的. 实际上，当 $k=1991$ 时，每列至多有 9 个坏数，200 列至多有 1800 个坏数. 于是，至少有一个行中没有坏数. 下面证明：$k=1990$ 不是好的. 实际上，将数表的每 10 行分为一个组，第 i 组中，每行的数都填 $\frac{S}{199}$，$\frac{S}{199}$，…，$\frac{S}{199}$，0，$\frac{S}{199}$，…，$\frac{S}{199}$. 其中只有第 i 列的数为 0，其余各数都为 $\frac{S}{199}$. 这样，数表中的每一行都有 199 个 $\frac{S}{199}$，一个 0. 于是，每行的和为 S. 每列中有 10 个 0，1990 个 $\frac{S}{199}$. 从而对任何 j，令 $x_j=\frac{S}{199}$. 此时通过的支出总额为

$200\cdot\dfrac{S}{199}>S$,矛盾. 综上所述,k 的最小值为 1991.

3. 如果将除 i 队外的其他所有队取消资格,则 i 队自然是冠军,所以 $f_i\leqslant n-1$. 于是 $F\leqslant n(n-1)$. 又当所有队打平时,对一切 $i=1, 2, \cdots, n$,有 $f_i=n-1$. 此时 $F=n(n-1)$. 故 $F_{\max}=n(n-1)$. 当 $n\geqslant 5$ 时,我们先证明 $F\geqslant n$. $F\geqslant n$ 的一个充分条件是 $f_i\geqslant 1$,即没有球队的积分多于其他所有球队. 此外,假定对 $i=1, 2, \cdots, n-1$,第 n 队的积分 S_n 多于第 i 队的积分 S_i,则第 i 队要成为冠军,至少要去掉一支球队,即 $f_i\geqslant 1\ (i<n)$, $f_n=0$,所以 $F\geqslant n-1$. 如果 $F=n-1$,则上述不等式成立等号,即 $i=1, 2, \cdots, n-1$ 时,$f_i=1$,且 $f_n=0$. 要使第 $i(i<n)$ 支球队获得冠军,必须去掉一支球队. 设去掉的球队序号为 a_i,则有如下一些性质:(1) $S_i\geqslant S_n-2$. 否则,$S_n>S_i+2$,去掉第 a_i 队后第 n 队的积分至少是 S_n-3,而第 i 队的积分不增,而 $S_n-3\geqslant S_i$,与第 i 队要为冠军矛盾. (2) 当 $a_i\neq n$ 时,第 a_i 队输给第 n 队. 否则,去掉 a_i 后第 n 队的积分至少是 S_n-1,而第 i 队的积分不增. 但 $S_n>S_i$,所以 $S_n-1\geqslant S_i$,与第 i 队要为冠军矛盾. (3) 当 $i\neq j$ 时,$a_i\neq a_j$. 否则,去掉 a_i 后有 2 个冠军队第 i 队和第 j 队,矛盾. 由(2)(3)可知,第 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 中不是第 n 队的队都输给第 n 队. 于是至少有 $n-2$ 个队输给第 n 队,所以 $S_n\geqslant 3(n-2)$. 于是,$S=\sum\limits_{i=1}^{n}S_i=\sum\limits_{i=1}^{n-1}S_i+S_n\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n-1}(S_n-2)+S_n=(n-1)(S_n-2)+S_n=nS_n-2(n-1)\geqslant n\cdot 3(n-2)-2(n-1)=3n^2-8n+2$. 另一方面,每场比赛对 S 的贡献至多是 3 分,于是 $S\leqslant 3C_n^2=3\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}$. 所以 $3\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}\geqslant 3n^2-8n+2$,解得 $n<5$,矛盾. 最后,当 A_1 胜 A_2, A_2 胜 $A_3\cdots\cdots A_n$ 胜 A_1,且其余比赛全部平局时,可以验证所有 $f_i=1$,此时 $F=n$. 从而 $n\geqslant 5$ 时 $F_{\min}=n$.

习 题 13

1. n 的最小可能值是 25. 将每道题的 4 种答案分别记为 1、2、3、4,每份试卷上的答案记为(g, h, i, j, k),其中 $g, h, i, j, k\in\{1, 2, 3, 4\}$. 对于所有 2000 份答案$(g, h, i, j, k)$,将后 4 个分量完全相同的看作一类,则共有 $4^4=256$ 类. 因为 $2000=256\times 7+208$,于是必有 8 份试卷属于同一个类 A. 取出这 8 份试卷,剩下 1992 份试卷中仍有 8 份试卷属于同一个类 B. 再取出这 8 份试卷,剩下 1984 份试卷中仍有 8 份试卷属于同一个类 C. 取出的 24 份试卷共属于 3 个类 A、B、C,于是,当 $n\leqslant 24$ 时,从这 24 份试卷中任取 n 份,

则 n 份中的任何 4 份试卷必有 2 份属于同一个类，不满足题目要求，于是 $n \geqslant 25$. 下面构造这样的 2000 份答卷，它们共有 250 种不同答案，同一种答案的试卷各有 8 份. 这 250 种答案是满足 $g+h+i+j+k \equiv 0 \pmod 4$ 的所有 $4^4=256$ 种答案 (g, h, i, j, k) 中的任意 250 种. 显然，对于任何 2 份不同的答案，它们至多有 3 个分量相同，否则，若有 4 个分量相同，则由同余式可知，第 5 个分量也相同，矛盾. 在这样的 2000 份答卷中任取 25 份，由于相同的答卷至多有 8 份，从而至少有 4 份试卷是两两不同的，它们至多有 3 个分量相同，故 $n=25$ 合乎题目要求.

2. 数列 $n, n, n-1, n-1, \cdots, 2, 2, 1, 1, 2, 2, \cdots, n-1, n-1, n, n$ 合乎要求，因为 $a_i=a_j$，必有 i、j 相邻或关于数列中间两项 1, 1 对称. 所以 k 的最大值不小于 $4n-2$. 其次，在任意合乎条件的数列中，任何连续三项都不能是同一数. 而且若某一项的所有邻项（注意首项、末项只有一个邻项）都与该项不同，则在该项旁添加一个与该项相同的项时，新数列仍满足条件. 于是，只须考虑每连续两项相同的数列. 进一步，只须研究任何连续两项都不同的数列的项数（在每两个相同的项中去掉一个项）. 下面用归纳法证明：如果数列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中的任何连续两项都不同，其中每一个项都是不大于 n 的自然数，且不存在任何四个指标 $p<q<r<s$，使得 $a_p=a_1 \neq a_q=a_s$. 则 $k \leqslant 2n-1$. 当 $n=2$ 时，结论显然成立. 设结论对小于 n 的自然数成立. 考察 n 的情形. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是一个最长的合乎条件的数列，$a_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$. 记 $a_k=t$, $1 \leqslant t \leqslant n$. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 中任何一个项的值都不是 t，则可在 a_1 之前添加一项 t，得到更长的数列，矛盾. 于是 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 中至少有一个项是 t. 设 a_v 是 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 中下标最大的一个为 t 的项 $(1 \leqslant v \leqslant k-2)$，则 $a_{v+1}, a_{v+2}, \cdots, a_{k-1}$ 都不是 t. 若 $v=1$，则 $a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}$ 中没有等于 t 的项. 考察数列 $a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}$，每一项都在 $\{1, 2, \cdots, n\} \backslash \{t\}$ 中，且满足题设条件，由归纳假设知，$k-2 \leqslant 2(n-1)-1$，所以 $k \leqslant 2n-1$，结论成立. 若 $v>1$，则令 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_v\}$, $B=\{a_{v+1}, a_{v+2}, \cdots, a_{k-1}\}$，则 A、B 中分别没有数相同的连续两项，且 B 的项都在 $\{1, 2, \cdots, n\} \backslash \{t\}$ 中，A 的项都在 $\{1, 2, \cdots, n\} \backslash \{B\}$ 中，从而都可利用归纳假设. 设 A 中互异的项的个数为 p，B 中互异的项的个数为 q，则 $p+q \leqslant n$. 这样分别对 A、B 使用归纳假设，有 $v \leqslant 2p-1$, $k-v-1 \leqslant 2q-1$. 所以 $k \leqslant 2q+v \leqslant 2q+2p-1=2(p+q)-1 \leqslant 2n-1$. 故 k 的最大值为 $4n-2$.

3. 一个数列可以看成是一个排列. 对两个不同的排列，其中一个不是另一个的前段的一个充分条件是：它们的长度相等. 假设它们的长度都是 r，那么互异的排列有 2^r 个. 但题给的数列有 2^n 个，所以 $r=n$. 即长为 n 的互异的

排列有 2^n 个，它们中任何一个不是另一个的前段，此时 $S=n\times 2^n$. 下面证明 $S\geqslant n\times 2^n$. 我们只须把任意一个合乎条件的排列集中的每一个排列都操作到长度不小于 n. 我们称长度为 n 的排列为标准排列，长度小(大)于 n 的排列为短(长)排列. 如果合乎条件的排列集中存在短排列，则必存在长排列. 否则，每个短排列至少可以扩充为 2 个互异的标准排列，使得标准排列个数超过 2^n，矛盾. 任取一个短排列 A，必存在长排列 B. 去掉 A,B，加入两个排列：$A\cup\{0\}$，$A\cup\{1\}$，得到的排列集仍合乎条件. 因为 $|A|<n$，$|B|>n$，于是操作后长度和 S 的增量为 $|A|+1+|A|+1-|A|-|B|=2+|A|-|B|\leqslant 2+(n-1)-(n+1)=0$，即 S 不增. 如此下去，直至排列中不存在短排列，必有 $S\geqslant n\times 2^n$.

4. $r(m,n)=m+n-2$. 一方面，由构图可知，$r=m+n-2$ 是可能的(第一行与第一列各格除第一格外都放棋). 下面证明：$r<m+n-1$. 即证明棋盘上放有至少 $m+n-1$ 只棋时，棋盘中有可去棋. 对 $m+n$ 归纳. 当 $m=2$，$n=2$，棋盘上放有至少 3 只棋，显然有可去棋. 设结论对 $m+n<k$ 的正整数 (m,n) 成立. 考察 $m+n=k$ 的情形. 此时，棋盘中至少放有 $k-1$ 只棋. 若 $n=2$ 或 $m=2$，则结论显然成立. 若 $m>2$ 且 $n>2$，则由于棋盘上至少放有 $m+n-1>m$ 只棋，必有一行至少含有两只棋. 不妨设第一行的棋最多，共有 t 只棋，设为 a_{11}，a_{12}，$\cdots$，$a_{1t}(t>1)$. 则这些棋所在的列中不能再有其他的棋，比如，若 a_{11} 所在的列中还有一只棋，则 a_{11} 可去. 于是，去掉第一行和前 t 列，剩下 $(m-1)\times(n-t)$ 棋盘，此棋盘中至少有 $m+n-1-t=(m-1)+(n-t)$ 只棋. 注意到 $(m-1)+(n-t)=k-t-1<k$，若 $n-t\geqslant 2$，对 $(m-1)\times(n-t)$ 棋盘利用归纳假设，知 $(m-1)\times(n-t)$ 棋盘中存在可去棋. 若 $n-t\leqslant 1$，则棋均分布在第 1 行或第 n 列上. 亦容易得出有可去棋. 命题获证.

5. 因为 $|A_j\cap B_j|\leqslant 1$，我们来计算二元子集的个数 S. 一方面，$|A_i|=3$，从而每个 A_i 中有 $C_3^2=3$ 个二元集，于是，F 中的 k 个集合可产生 $3k$ 个二元集. 由于 $|A_i\cap B_j|\leqslant 1$，这 $3k$ 个二元集互异. 所以，$S\geqslant 3k$. 另一方面，设 $|X|=n$，则 X 中的二元集的总数为 $S=C_n^2$. 所以，$C_n^2=S\geqslant 3k$，所以，$k\leqslant\dfrac{n^2-n}{6}$. 不等式右边获证. 下面，我们只须构造出一个合乎条件的子集族 F，使 $|F|\geqslant\dfrac{n^2-4n}{6}$. 为了构造 F，只须构造出若干个 3-数组 $\{a,b,c\}$，使 $|A_i\cap A_j|\leqslant 1$. 考察反面：$|A_i\cap A_j|\geqslant 2$，此时 A_i、A_j 中第三个元素要互异，否则 $A_i=A_j$. 现在要设法破坏这一性质，即当 A_i、A_j 中有两个元素对应相等时，第三个元素必然相等. 这表明 a、b、c 中只有两个自由量，第三个量 c 由前两个量 a、b 唯一确定. 由此想到 a、b、c 满足一个方程，最简单的方程是

线性方程：$a+b+c=0$. 但 a、b、c 都是正整数，此等式不成立，可将此方程改为同余式：$a+b+c\equiv 0 \pmod n$. 考察所有满足 $a+b+c\equiv 0 \pmod n$ 的三数组 $\{a, b, c\}$，每一个这样的三数组组成一个集合，则这些集合合乎条件. 现在证明这些集合的个数不少于 $\frac{n^2-4n}{6}$. 注意到满足 $a+b+c\equiv 0 \pmod n$ 的三数组 $\{a, b, c\}$ 由其中的两个数比如 a、b 唯一确定，这是因为 $c=\begin{cases}n-(a+b) & (a+b<n)\\ 2n-(a+b) & (a+b\geqslant n)\end{cases}$ ①. 因此，我们只须考虑 a、b 分别有多少种取值. 首先，a 有 n 种取值方法. 当 a 取定后，b 的取值应满足如下两个条件：(1) $b\neq a$；(2) b 的值应使 $c\neq a$ 和 b. 其中 c 由①确定. 显然，(2)成立的一个充分条件是 $n-(a+b)\neq a$ 和 b，且 $2n-(a+b)\neq a$ 和 b. 即 $b\neq n-2a$ 和 $\frac{n-a}{2}$，且 $b\neq 2n-2a$ 和 $\frac{2n-a}{2}$. 但 $n-2a$ 和 $2n-2a$ 不同属于 X，否则 $1\leqslant n-2a\leqslant n$，$1\leqslant 2n-2a\leqslant n$，有 $2a+1\leqslant n\leqslant 2a$，矛盾. 于是，满足(2)的 b 最多有 3 个值不能取，连同(1)，b 最多有 4 个值不能取，从而至少有 $n-4$ 种取法，于是，这样的三数组至少有 $n(n-4)$ 个. 但每个三数组 $\{a, b, c\}$ 有 6 个不同的顺序，被计数 6 次，故合乎条件的三数组至少有 $\frac{n(n-4)}{6}$ 个. 综上所述，命题获证.

6. 填好数表的第一行和第一列后，数表被唯一确定，此时，数表只填了 $m+n-1$ 个数. 即 $r=m+n-1$ 时，存在相应的填法. 下面证明，对所有合乎条件的填法，有 $r\geqslant m+n-1$. 用反证法. 即 $r\leqslant m+n-2$ 时，不论怎样填表，数表都不唯一确定. 对 $m+n$ 归纳. 当 $m+n=4$ 时，$m=n=2$，2×2 数表中填 2 个数，数表不唯一确定，结论成立. 设结论对 $m+n=k$ 成立. 考察 $m+n=k+1>4$ 时的情形. 数表填入 $r\leqslant m+n-2=k-1$ 个数，我们要证明此数表不唯一确定. 为了利用假设，应去掉数表的一行或一列. 而且去掉的行或列应具有这样的性质：(1) 去掉这行后，数表至少还有两行(否则不能利用归纳假设). 为此，不妨设 $m\leqslant n$，则 $n>2$. 于是可去掉一个列. (2) 去掉这列后，$(m-1)\times n$ 数表中的数不多于 $(m-1)+n-1=k-2$ 个数，即去掉的列中至少有一个数. (3) 加上去掉的这个列，数表仍不唯一确定，这只须此列中的数不多于一个(一个充分条件). 实际上，若有一个数 a，在子表中不被唯一确定，而被后加上的一列中的两个数 b、c 及与 a 同列的一个数 d 唯一确定，但这列中只有一个数，则不妨设 c 是新填入的，则 c 只能由另一列中的两个数 e、f 确定. 于是，a 可由子表中的 e、f、d 唯一确定. 矛盾. 现在要找到合乎上述两个条件的一个列. 即此列中恰有一个数. 注意到 $m\leqslant n$，所以，棋盘中的数的

个数 $r\leqslant k-1=m+n-2\leqslant 2n-2<2n$. 所以，至少有一列不多于一个数. 若此列中没有数，则此列不唯一确定，结论成立. 若此列中恰有一个数 a，则去掉此列，其余的数必可唯一确定，否则假设 b 不唯一确定，则 b 要由 a 确定，从而 a，b 是同一矩形的两个顶点，且此矩形中除 b 以外的 3 个数都已知，这 3 个数中除 a 外必有一个与 a 同列，矛盾. 于是，$(m-1)\times n$ 数表对应的最小值 $\leqslant r-1\leqslant k-2=m+n-3<m+n-2$，与归纳假设矛盾.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 组合极值 / 冯跃峰编著. —2版. —上海:华东师范大学出版社,2011.12
ISBN 978-7-5617-9166-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第261947号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷

组合极值(第二版)

编　　著　冯跃峰
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　武文佳
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　上海崇明县裕安印刷厂
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　9.75
字　　数　172千字
版　　次　2012年7月第二版
印　　次　2013年3月第二次
印　　数　11 001-16 100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9166-0/G·5470
定　　价　20.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)