全国高中数学联赛模拟试题（十）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、设集合 $M=\{-2,0,1\}$，$N=\{1,2,3,4,5\}$，映射 f：$M\to N$ 使对任意的 $x\in M$，都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数，则这样的映射 f 的个数是

（A）45　　（B）27　　（C）15　　（D）11

2、已知 $\sin2\theta=a$，$\cos2\theta=b$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，给出 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 值的五个答案：

①$\dfrac{b}{1-a}$；②$\dfrac{a}{1-b}$；③$\dfrac{1+b}{a}$；④$\dfrac{1+a}{b}$；⑤$\dfrac{a-b+1}{a+b-1}$.

其中正确的是：

（A）①②⑤　　（B）②③④　　（C）①④⑤　　（D）③④⑤

3、若干个棱长为 2、3、5 的长方体，依相同方向拼成棱长为 90 的正方体，则正方体的一条对角线贯穿的小长方体的个数是

（A）64　　（B）66　　（C）68　　（D）70

4、递增数列 1,3,4,9,10,12,13,⋯，由一些正整数组成，它们或者是 3 的幂，或者是若干个 3 的幂之和，则此数列的第 100 项为

（A）729　　（B）972　　（C）243　　（D）981

5、$C_n^1+C_n^5+C_n^9+\cdots+C_n^{4m+1}$（其中 $m=\left[\dfrac{n-1}{4}\right]$，$[x]$表示不超过 x 的最大整数）的值为

（A）$\sqrt{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{4}$　　（B）$\sqrt{2^n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$

（C）$\dfrac{1}{2}\left(2^{n-1}+\sqrt{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)$　　（D）$\dfrac{1}{2}\left(2^{n-1}+\sqrt{2^n}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

6、一个五位的自然数 $\overline{abcde}$ 称为“凸”数，当且仅当它满足 $a<b<c$，$c>d>e$（如 12430，13531 等），则在所有的五位数中“凸”数的个数是

（A）8568　　（B）2142　　（C）2139　　（D）1134

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、过椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上任意一点 P，作椭圆的右准线的垂线 PH（H 为垂足），并延长 PH 到 Q，使得 $HQ=\lambda PH$（$\lambda\geqslant1$）. 当点 P 在椭圆上运动时，点 Q 的轨迹的离心率的取值范围是__________.

2、已知异面直线 a、b 所成的角为 60°，过空间一点 P 作与 a、b 都成角 α（$0<\alpha<90°$）的直线 l，则这样的直线 l 的条数是 $f(\alpha)=$__________.

3、不等式$\dfrac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$的解集为__________.

4、设复数 z 满足条件$|z-i|=1$，且 $z\neq0$，$z\neq2i$，又复数ω使得$\dfrac{\omega-2i}{\omega}\cdot\dfrac{z}{z-2i}$为实数，则复数$\omega-2$ 的辐角主值的取值范围是__________.

5、设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2002}$ 均为正实数，且$\dfrac{1}{2+a_1}+\dfrac{1}{2+a_2}+\cdots+\dfrac{1}{2+a_{2002}}=\dfrac{1}{2}$，则 $a_1a_2\cdots a_{2002}$ 的最小值是__________.

6、在一个由十进制数字组成的数码中，如果它含有偶数个数字 8，则称它为“优选”数码（如 12883，787480889 等），否则称它为“非优选”数码（如 2348756，958288 等），则长度不超过 n（n 为自然数）的所有“优选”数码的个数之和为__________.

三、(20 分)

已知数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，且前 n 项和为 S_n.

（1）用 S_n 表示 S_{n+1}；

（2）是否存在自然数 c 和 k，使得$\dfrac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$ 成立.

四、(20 分)

设异面直线 a、b 成 60° 角，它们的公垂线段为 EF，且$|EF|=2$，线段 AB 的长为 4，两端点 A、B 分别在 a、b 上移动．求线段 AB 中点 P 的轨迹方程.

五、(20 分)

已知定义在 $\mathbf{R}^+$上的函数 $f(x)$满足

（i）对于任意 a、$b\in\mathbf{R}^+$，有 $f(ab)=f(a)+f(b)$；

（ii）当 $x>1$ 时，$f(x)<0$；

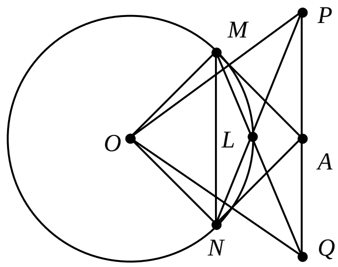
（iii）$f(3)=-1$.

现有两个集合 A、B，其中集合 $A=\{(p，q) \mid f(p^2+1)-f(5q)-2>0，p、q\in\mathbf{R}^+\}$，集合 $B=\{(p，q) \mid f(\frac{p}{q})+\frac{1}{2}=0，p、q\in\mathbf{R}^+\}$．试问是否存在 p、q，使 $A\cap B\neq\varnothing$，说明理由.

第二试

一、（50 分）

如图，AM、AN 是⊙O 的切线，M、N 是切点，L 是劣弧 MN 上异于 M、N 的点，过点 A 平行于 MN 的直线分别交 ML、NL 于点 Q、P．若 $S_{\odot O}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}S_{\triangle POQ}$，求证：$\angle POQ=60^\circ$．



二、（50 分）

已知数列 $a_1=20$，$a_2=30$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$（$n\geqslant 1$）．求所有的正整数 n，使得 $1+5a_na_{n+1}$ 是完全平方数．

三、（50 分）

设 M 为坐标平面上坐标为$(p\cdot 2002, 7p\cdot 2002)$的点，其中 p 为素数．求满足下列条件的直角三角形的个数：

（1）三角形的三个顶点都是整点，而且 M 是直角顶点；

（2）三角形的内心是坐标原点．

参考答案

第一试

一、选择题：

1、A；2、C；3、B；4、D；5、D；6、B

二、填空题：

1、$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$；2、$f(\alpha)=\begin{cases}0,0^\circ<\alpha<30^\circ\\1,\alpha=30^\circ\\2,30^\circ<\alpha<60^\circ\\3,\alpha=60^\circ\\4,0^\circ<\alpha<90^\circ\end{cases}$；3、$\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{45}{8}\right)$；

4、$\left[\pi-\arctan\frac{4}{3},\pi\right)$；5、$4002^{2002}$；6、$\frac{1}{2}\left(\frac{10^{n+1}}{9}+\frac{8^{n+1}}{7}-\frac{142}{63}\right)$.

三、（1）$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+2$；（2）不存在.

四、$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

五、不存在.

第二试

一、证略；

二、n=3.

三、$p\neq2,7,11,13$ 时，324 个；p=2 时，162 个；p=7,11,13 时，180 个.