2017 年全国高中数学联赛安徽赛区预赛

中图分类号:G424.79　　文献标识码: A　　文章编号: 1005-6416(2018)01-0029-03

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 在不大于 2 017 的正整数中,被 12 整除但不被 20 整除的数共有______个.

2. 设复数 z 满足

$$\frac{1\,017z-25}{z-2\,017}=3+4\mathrm{i}.$$

则 $|z|=$______.

3. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中,$AB=3$, $BC=4$, $CD=5$, $DA=6$. 则四边形 $ABCD$ 的面积为______.

4. 设正八面体的边长为 1. 则其两个平行平面之间的距离为______.

5. 设平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}|=3,\ |2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}|=4.$$

则 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 的最小值为______.

6. 已知过椭圆 $x^2+2y^2=3$ 的一个焦点作斜率为 k 的直线,与椭圆交于 A、B 两点. 若 $AB=2$,则 $|k|=$______.

7. 设 $\theta\in[0,2\pi]$ 满足对于 $x\in[0,1]$,均有

$$f(x)=2x^2\sin\theta-4x(1-x)\cos\theta+3(1-x)^2>0.$$

则 θ 的取值范围是______.

8. 设 n 为正整数. 随机选取 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集 A、B. 则 $A\cap B$ 不是空集的概率为______.

二、解答题(共 86 分)

9. (21 分)如图 1,设 H 为锐角$\triangle ABC$ 的垂心,点 D 在直线 AC 上,$HA=HD$,四边形 $ABEH$ 为平行四边形. 证明:B、E、C、D、H 五

又 $CD/\!/PQ$,因此,

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{AC}{AD},\ \frac{PB}{QB}=\frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow\frac{AC}{AD}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow AC\cdot BC=AD\cdot BD.$$

五、由柯西不等式得

$$\frac{a^2}{1+\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{1+\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{1+\sqrt{ab}}$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}.$$

故只需证明:$\dfrac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

由均值不等式及已知得

$$a+b+c=\frac{1}{2}((a+b)+(b+c)+(c+a))$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\times3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{3}{2}.$$

由赫尔德不等式、均值不等式及已知得

$$(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})^3$$

$$=(\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot b\cdot a}+\sqrt[3]{b\cdot\sqrt{bc}\cdot c}+\sqrt[3]{a\cdot c\cdot\sqrt{ca}})$$

$$\leqslant(\sqrt{ab}+b+a)(b+\sqrt{bc}+c)(a+c+\sqrt{ca})$$

$$\leqslant\left(\frac{a+b}{2}+a+b\right)\left(b+\frac{b+c}{2}+c\right)\left(c+a+\frac{c+a}{2}\right)$$

$$=\frac{27}{8}(a+b)(b+c)(c+a)=\frac{27}{8}.$$

于是,$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leqslant\dfrac{3}{2}$.

故 $\dfrac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}\geqslant\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3+\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

因此,原不等式成立.

(刘康宁　提供)

点共圆.

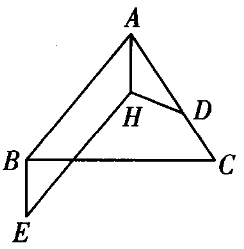

图 1

10. (21 分)设 $0<x<\frac{\pi}{2}$. 证明:

$$0<\frac{x-\sin x}{\tan x-\sin x}<\frac{1}{3}.$$

11. (22 分)设 $x、y\in[0,1]$. 求

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{1+xy}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{1-xy}{1+y^2}}$$

的取值范围.

12. (22 分)设递推数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 满足对于 $n\in\mathbf{N}$,有

$$a_{n+1}=|b_n-c_n|,b_{n+1}=|c_n-a_n|,$$
$$c_{n+1}=|a_n-b_n|.$$

证明:对于任意正整数 $a_1、b_1、c_1$,存在正整数 k,使得

$$a_{k+1}=a_k,b_{k+1}=b_k,c_{k+1}=c_k.$$

参 考 答 案

一、1. 60.

记 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

注意到,

$$\left[\frac{2\,017}{12}\right]-\left[\frac{2\,017}{60}\right]=168-33=135,$$

其中,60 为 12 与 20 的最小公倍数.

2. 5.

设 $w=3+4\mathrm{i}$. 则

$$z=\frac{2\,017w-25}{w-2\,017}=\frac{2\,017w-\bar{w}w}{w-2\,017}$$
$$=\frac{2\,017-\bar{w}}{2\,017-w}w.$$

故 $|z|=|w|=5$.

3. $6\sqrt{10}$.

由余弦定理得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$$
$$=CD^2+DA^2-2CD\cdot DA\cos D.$$

再由 $A、B、C、D$ 四点共圆得

$\angle B+\angle D=\pi$.

则 $\cos B=\frac{3^2+4^2-5^2-6^2}{2(3\times4+5\times6)}=-\frac{3}{7}$.

故 $S_{\text{四边形}ABCD}$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B+\frac{1}{2}CD\cdot DA\sin D$$
$$=\frac{1}{2}(3\times4+5\times6)\frac{\sqrt{40}}{7}=6\sqrt{10}.$$

4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设正八面体的六个顶点的坐标为

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(0,0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

则两个平行平面 $x+y+z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 之间的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. -170.

设 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{u},2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v},|\boldsymbol{u}|=3,|\boldsymbol{v}|=4$.

由 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{u},\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$,得

$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=-6|\boldsymbol{u}|^2-2|\boldsymbol{v}|^2+7\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$.

当 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=-12$ 时,

$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=-54-32-84=-170$ 为最小值.

6. $\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

计算知椭圆参数 $a=\sqrt{3},b=c=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

设直线方程为 $y=k(x-c)$. 则点 $A、B$ 的横坐标 $x_1、x_2$ 满足

$$x^2+2k^2(x-c)^2=3\Rightarrow x_1+x_2=\frac{4k^2c}{1+2k^2}.$$

又椭圆的右准线方程为 $x=\frac{a^2}{c}=\sqrt{6}$,再由

$$AB=\frac{c}{a}(2\sqrt{6}-x_1-x_2),$$

解得$|k| = \sqrt{1+\sqrt{3}}$.

7. $\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$.

注意到,$2\sin\theta = f(1) > 0$.

设$x \in (0,1)$满足

$2x^2\sin\theta = 3(1-x)^2$.

则$f(x) = 2x(1-x)(\sqrt{6\sin\theta} - 2\cos\theta) > 0$.

又$\sin\theta > 0$,且$\sqrt{6\sin\theta} - 2\cos\theta > 0$,可得对于$x \in [0,1]$,均有$f(x) > 0$.

由$g(\theta) = \sqrt{6\sin\theta} - 2\cos\theta$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$,于是,$\theta$的取值范围是$\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$.

8. $\frac{4^n - 3^n}{(2^n-1)^2}$.

由于$\{1,2,\cdots,n\}$共有2^n个子集,其中,C_n^k个子集X满足$|X| = k$,2^{n-k}个子集Y满足$X \cap Y = \varnothing (1 \leqslant k \leqslant n)$.

故所求概率为

$$\frac{1}{(2^n-1)^2}\sum_{k=1}^{n} C_n^k (2^n - 2^{n-k}) = \frac{4^n - 3^n}{(2^n-1)^2}.$$

二、**9.** 由$AH \perp BC$,$AH /\!/ BE \Rightarrow BE \perp BC$.

由$HC \perp AB$,$HE /\!/ AB \Rightarrow HE \perp HC$.

于是,点B、E、C、H均在以EC为直径的圆上.

再由$BH \perp AD$及$HA = HD$,得BH垂直平分线段AD.

则$\angle HBD = \angle HBA$

$= \frac{\pi}{2} - \angle BAC = \angle HCA$.

从而,B、C、D、H四点共圆.

因此,B、E、C、D、H五点共圆.

10. 当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时,$\tan x > x > \sin x$.

事实上,令$f(x) = x - \sin x$. 则

$f'(x) = 1 - \cos x > 0$.

故$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

因此,$f(x) > f(0) = 0$,即

$x > \sin x$.

类似地,$\tan x > x$.

从而,要证原命题,只需证明

$g(x) = \tan x - \sin x - 3(x - \sin x) > 0$.

计算得

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x - 3.$$

据均值不等式得

$$g'(x) \geqslant 3\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cos x \cdot \cos x\right)^{\frac{1}{3}} - 3 = 0.$$

$g'(x) = 0$当且仅当$x = \frac{\pi}{2}$.

故$g(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

从而,$g(x) > g(0) = 0$.

11. 当$x \geqslant y$时,

$$\frac{1+xy}{1+x^2}、\frac{1-xy}{1+y^2} \in [0,1]$$

$$\Rightarrow 2 \geqslant f(x,y) \geqslant \frac{1+xy}{1+x^2} + \frac{1-xy}{1+y^2}$$

$$\geqslant \frac{1+xy}{1+x^2} + \frac{1-xy}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \geqslant 1.$$

当$x \leqslant y$时,显然有

$$f(x,y) \geqslant \sqrt{\frac{1+xy}{1+x^2}} \geqslant 1, x + x^{-1} \geqslant y + y^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 \leqslant f(x,y)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{y-x}{x+x^{-1}}} + \sqrt{1 - \frac{x+y}{y+y^{-1}}}$$

$$\leqslant \sqrt{1 + \frac{y-x}{y+y^{-1}}} + \sqrt{1 - \frac{y-x}{y+y^{-1}}} \leqslant 2.$$

上述最后一个不等式用到了:

当$0 \leqslant t \leqslant 1$时,$\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \leqslant 2$.

由$f(x,y)$的连续性及

$f(1,1) = 1$, $f(0,0) = 2$,

知$f(x,y)$的取值范围是$[1,2]$.

12. 对任意正整数n,用A_n、B_n、C_n分别表示a_n、b_n、c_n的升序排列.

2017中国数学奥林匹克希望联盟夏令营(一)

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2018)01-0032-05

第一试

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 已知集合

$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}, B=\{x\mid x^2-ax+4\geqslant 0\}$.

若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是______.

2. 函数 $f(x)=7\sin x+\sin 2x$ 的最大值为______.

3. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a、b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2,双曲线 C 与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 的一个交点为 P. 若 $\frac{|PF_1|+|PF_2|}{r}$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$,则双曲线 C 的离心率为______.

4. 设 p 为素数. 若存在正整数 n,使得 $p\mid(n^2+7n+23)$,则 p 的最小值为______.

5. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=3,AC=4,BC=5,I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,P 为 $\triangle IBC$(包括边界)内一点. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda、\mu\in\mathbf{R})$,则 $\lambda+\mu$ 的最小值为______.

6. 已知 P 是轴截面为等腰直角三角形的圆锥的顶点,PA 为圆锥的母线,B 为圆锥底面内的动点. 则 $\frac{PA+AB}{PB}$ 的最大值为______.

7. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,规定 $S_0=0$. 若对任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$,均有

$$\frac{a_n}{2\,017}=-\frac{2\,017+S_{n-1}}{n},$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{2\,017}2^na_n=$______.

8. 定义在集合 $\{x\in\mathbf{Z}_+\mid 1\leqslant x\leqslant 12\}$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x+1)-f(x)|=1(x=1,2,\cdots,11),$$

且 $f(1)$、$f(6)$、$f(12)$ 成等比数列. 若 $f(1)=1$,则满足条件的不同函数 $f(x)$ 的个数为______.

二、解答题(共56分)

9. (16分)已知函数

$$f(x)=3\lg(x+2)-\log_2 x,$$

集合 $M=\{n\in\mathbf{Z}\mid f(n^3-3n^2-10n+32)\geqslant 0\}$.

求 M.

10. (20分)已知

椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

的离心率为 $\frac{1}{2}$,F 为右焦点,$A(-a,0)$,$|AF|$

下面证明:存在正整数 n,使得 A_n、B_n、C_n 中至少有两项相等,即

$A_n=B_n\leqslant C_n$ 或 $A_n\leqslant B_n=C_n$.

否则,对任意正整数 n,均有

$A_n<B_n<C_n$.

故 $A_{n+1}=\min\{B_n-A_n,C_n-B_n\}>0$,

且 $C_{n+1}=C_n-A_n<C_n$.

于是,$C_{n+2}=C_{n+1}-A_{n+1}<C_n$.

从而,对任意正整数 k,$C_{2k+1}\leqslant C_1-k$.

当 $k>C_1$ 时,$C_{2k+1}<0$,矛盾.

因此,存在正整数 n,使得 A_n、B_n、C_n 中至少有两项相等. 无论 $A_n=B_n\leqslant C_n$ 或 $A_n\leqslant B_n=C_n$,均有

$A_{n+1}=0,B_{n+1}=C_{n+1}$.

故 $a_{n+2}=a_{n+1},b_{n+2}=b_{n+1},c_{n+2}=c_{n+1}$.

(陈发来　提供)