

2017 年全国高中数学联赛陕西赛区预赛

中图分类号:G424.79

文献标识码:A

文章编号:1005-6416(2018)01-0024-05

第一试

一、选择题(每小题6分,共48分)

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 1$ ($n \in \mathbf{N}_+$). 则 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 =$ ().

- (A)40 (B)44 (C)45 (D)49

2. 设 n 为正整数,以下各组数 a, b 中,使 $\frac{b}{a}$ 为既约分数的是().

- (A) $a = n + 1, b = 2n - 1$
 (B) $a = 2n - 1, b = 5n + 2$
 (C) $a = n + 1, b = 3n + 1$
 (D) $a = 3n + 1, b = 5n + 2$

3. 在空间直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(3, 4, 1)$ 、 $B(0, 4, 5)$ 、 $C(5, 2, 0)$. 则 $\tan \frac{A}{2}$ 的值为().

- (A) $\sqrt{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

4. 如图 1,

椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$= 1 (a > b > 0)$,

$\odot O: x^2 + y^2 = a^2$

与 y 轴正半轴交于点 B , 过点 B 的直线与椭圆 E 相切, 且与

$\odot O$ 交于另一点 A . 若 $\angle AOB = 60^\circ$, 则椭圆 E 的离心率为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

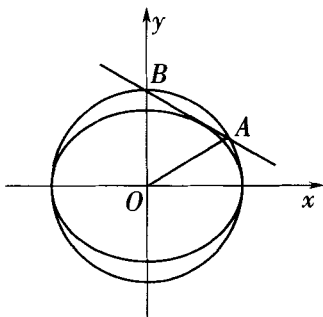


图1

5. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 1, & x < 0; \\ \frac{2}{e^x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

则 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图像上关于坐标原点 O 对称的点共有()对.

- (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

6. 如图 2, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P, Q, R 分别为棱 AB, AD, AA_1 的中点. 以 $\triangle PQR$ 为底面作一个直三棱柱, 使其另一个底面的三个顶点

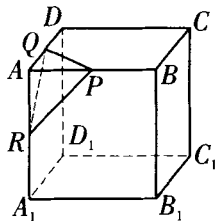


图2

也均在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的表面上. 则这个直三棱柱的体积为().

- (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{16}$

7. 设集合 $A = \left\{ n \mid \frac{n}{3} \in \mathbf{N}_+ \right\}$,

$B = \{ y \mid y = x + 4 + \sqrt{5 - x^2} \}$.

则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为().

- (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

8. 设 $x \geq y > 0$. 若存在实数 a, b 满足

$0 \leq a \leq x, 0 \leq b \leq y$,

且 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 + b^2 = y^2 + a^2$. ①

则 $\frac{x}{y}$ 的最大值为().

- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) 1

二、填空题(每小题8分,共32分)

9. 设函数 $f(x) = \frac{ax}{2x+3}$. 若 $f(f(x)) = x$ 恒成立, 则实数 a 的值为_____.

10. 袋中装有两个红球、三个白球、四个黄球, 从中任取四个球. 则其中三种颜色的球均有的概率为_____.

11. 设 a, b, c 为互不相同的正整数. 则 $\frac{abc}{a+b+c}$ 的最小值为_____.

12. 设方程 $xy = 6(x+y)$ 的全部正整数解为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. 则

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第二试

一、(20分) 设 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c ,

$$\text{向量 } \mathbf{m} = (\sin A, b+c),$$

$$\mathbf{n} = (\sin C - \sin B, a-b),$$

且存在实数 λ , 使得 $\mathbf{m} = \lambda \mathbf{n}$.

- (1) 求 $\angle C$ 的大小;
- (2) 若 $a+b = kc$, 求实数 k 的取值范围.

二、(20分) 已知抛物线 $E: y = x^2$ 的焦点为 F , 过 y 轴正半轴上一点 M 的直线 l 与抛物线 E 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$.

- (1) 证明: 直线 l 过定点;
- (2) 设点 F 关于直线 OB 的对称点为 C , 求四边形 $OABC$ 面积的最小值.

三、(20分) 已知函数

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 且 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上有三个零点, 1 为其中的一个零点.

- (1) 求 $f(2)$ 的取值范围;
- (2) 试讨论直线 $l: y = x - 1$ 与曲线 $C: y = f(x)$ 的公共点的个数.

四、(30分) 如图3, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 A, B 两点, 直线 PQ 为两圆距离点 B 较近的公切线, 且分别与 $\odot O_1, \odot O_2$ 切于点 P, Q . 设 QB, PB 的延长线分别与 AP, AQ 交于点 C, D . 证明: $AC \cdot BC = AD \cdot BD$.

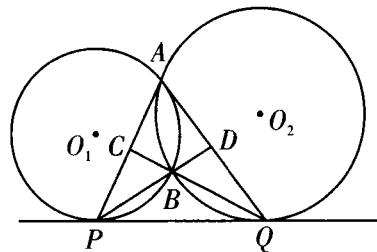


图3

五、(30分) 设 a, b, c 为正实数, 且满足 $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$.

$$\text{证明: } \frac{a^2}{1 + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{1 + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{1 + \sqrt{ab}} \geq \frac{1}{2}.$$

参考答案

第一试

一、1. B.

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 0$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$.

故 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 44$.

2. D.

注意到,

$$\begin{aligned} (3n+1, 5n+2) &= (3n+1, 2n+1) \\ &= (n, 2n+1) = (n, n+1) = 1. \end{aligned}$$

故 $\frac{5n+2}{3n+1}$ 为既约分数.

3. A.

$$\text{由 } \vec{AB} = (-3, 0, 4), \vec{AC} = (2, -2, -1)$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{-10}{5 \times 3} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \sqrt{5}.$$

4. D.

因为 $|OA| = |OB|$, $\angle AOB = 60^\circ$, 所以, $\triangle AOB$ 为正三角形.

则 l_{AB} 的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

于是, $l_{AB}: y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x + a$.

代入椭圆方程得

$$(a^2 + 3b^2)x^2 \pm 2\sqrt{3}a^3x + 3a^2(a^2 - b^2) = 0.$$

$$\text{由 } \Delta = 12a^6 + 12a^2(a^2 + 3b^2)(a^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 3b^2 \Rightarrow 2a^2 = 3(a^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow a^2 = 3c^2 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. C.

函数 $y = f(x)$ 的图像如图 4 中的实线所示.

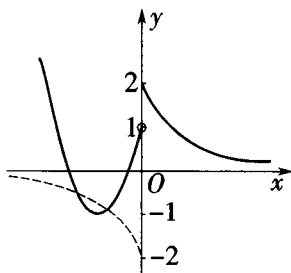


图 4

作 $y = \frac{2}{e^x} (x \geq 0)$ 的图像关于原点 O 对称的

图像(虚线), 其解析式为

$$g(x) = -\frac{2}{e^{-x}} (x \leq 0).$$

由于 $f(-1) = -1 < -\frac{2}{e} = g(-1)$, 于是,

$f(x) = 2x^2 + 4x + 1 (x < 0)$ 的图像与 $g(x) = -\frac{2}{e^{-x}} (x \leq 0)$ 的图像有两个不同的交点.

从而, $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的图像上有且仅有两点关于原点 O 对称.

6. C.

易知, 直三棱柱另一个底面的三个顶点 P_1, Q_1, R_1 分别为正方形 BCC_1B_1 、正方形 CDD_1C_1 、正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心. 则直三棱

柱 $PQR - P_1Q_1R_1$ 的侧棱 $PP_1 = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{又 } S_{\triangle PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}, \text{ 故}$$

$$V_{\text{直三棱柱 } PQR - P_1Q_1R_1} = S_{\triangle PQR} \cdot PP_1 = \frac{3}{16}.$$

7. B.

$$\text{令 } x = \sqrt{5} \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{则 } y = \sqrt{5} \sin \theta + 4 + \sqrt{5} \cos \theta$$

$$= 4 + \sqrt{10} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$\Rightarrow 4 - \sqrt{5} \leq y \leq 4 + \sqrt{10}.$$

又 $A = \{3, 6, 9, \dots\}$, 则 $A \cap B = \{3, 6\}$, 即 $A \cap B$ 中有两个元素.

8. A.

如图 5, 在直角坐标系 xOy 中, 作矩形 $OABC$, 使得 $A(x, 0)$, $B(x, y)$, $C(0, y)$.

在边 OA 、 AB 上分别取点 P 、 Q , 使得 $P(a, 0)$, $Q(x, y-b)$.

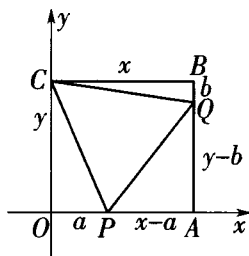


图 5

由式①得

$$|PQ| = |QC| = |CP| \Rightarrow \triangle CPQ \text{ 为正三角形.}$$

$$\text{设 } \angle OCP = \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\text{则 } \angle BCQ = \frac{\pi}{6} - \theta.$$

$$\text{故 } \frac{x}{y} = \frac{|BC|}{|OC|} = \frac{|BC|}{|CQ|} \cdot \frac{|CQ|}{|OC|}$$

$$= \frac{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 上式等号成立.

因此, $\frac{x}{y}$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

二、9. -3.

依题意, 知 $\frac{a \cdot \frac{ax}{2x+3}}{2 \times \frac{ax}{2x+3} + 3} = x$, 即

$$(2a+6)x^2 + 9x = a^2x.$$

$$\text{故} \begin{cases} 2a+6=0, \\ 9=a^2 \end{cases} \Rightarrow a = -3.$$

10. $\frac{4}{7}$.

从袋中的九个球中任取四个, 不同的取法共有 $C_9^4 = 126$ 种, 其中, 三种颜色的球均有的取法有 $C_2^2 C_3^1 C_4^1 + C_2^1 C_3^2 C_4^1 + C_2^1 C_3^1 C_4^2 = 72$ 种.

$$\text{故所求概率 } P = \frac{72}{126} = \frac{4}{7}.$$

11. 1.

不妨设 $a > b > c$. 则 $a \geq 3, b \geq 2, c \geq 1$.

从而, $ab \geq 6, bc \geq 2, ca \geq 3$.

$$\text{故 } \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{a+b+c} \geq 1.$$

当 $a=3, b=2, c=1$ 时, 上式等号成立.

因此, $\frac{abc}{a+b+c}$ 的最小值为 1.

12. 290.

原方程可化为

$$(x-6)(y-6) = 6^2 = 2^2 \times 3^2.$$

注意到, $2^2 \times 3^2$ 的正约数个数为

$$(1+2)(1+2) = 9$$

$$\text{且 } \sum_{k=1}^9 ((x_k - 6) + (y_k - 6))$$

$$= 2 \sum_{k=1}^9 (x_k - 6) = 2 \times \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^3 - 1}{3 - 1}$$

$$= 182.$$

$$\text{故 } \sum_{k=1}^9 (x_k + y_k) = 182 + 2 \times 9 \times 6 = 290.$$

第二试

一、(1) 由 $m = \lambda n$, 得

$$\begin{cases} \sin A = \lambda(\sin C - \sin B), \\ b + c = \lambda(a - b). \end{cases}$$

消去 λ 得

$$(a-b)\sin A = (b+c)(\sin C - \sin B).$$

由正弦定理得

$$(a-b)a = (b+c)(c-b),$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

$$\text{故 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}.$$

因为 $0 < \angle C < \pi$, 所以, $\angle C = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)的结论得

$$\angle B = \frac{2\pi}{3} - \angle A.$$

由已知及正弦定理得

$$k = \frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C}$$

$$= \frac{\sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{3} \sin A + \cos A = 2 \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{由 } 0 < \angle A < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \angle A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1.$$

故 k 的取值范围是 $(1, 2]$.

二、(1) 设 $l: y = kx + m (m > 0)$.

代入 $y = x^2$, 得 $x^2 - kx - m = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

则 $x_1 x_2 = -m$.

从而, $y_1 y_2 = x_1^2 x_2^2 = m^2$.

因为 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 2$, 所以, $m^2 - m - 2 = 0$.

解得 $m = -1$ (舍去) 或 $m = 2$.

故直线 l 过定点 $M(0, 2)$.

(2) 不妨设 $x_1 > 0$.

则由(1)得 $x_2 = -\frac{2}{x_1}$.

由对称性得

$$S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2} |OF| |x_2| = \frac{1}{4x_1}.$$

$$\text{又 } S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle BOM}$$

$$= \frac{1}{2} |OM| (|x_1| + |x_2|) = x_1 + \frac{2}{x_1},$$

$$\text{则 } S_{\text{四边形}OABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC}$$

$$= x_1 + \frac{9}{4x_1} \geq 2\sqrt{x_1 \cdot \frac{9}{4x_1}} = 3.$$

当且仅当 $x_1 = \frac{9}{4x_1}$, 即 $x_1 = \frac{3}{2}$ 时, 上式等

号成立.

故四边形 $OABC$ 面积的最小值为 3.

三、(1) 由条件知

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b.$$

由 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上递减, 在区间 $(0, 1)$ 上递增, 则 $f'(0) = 0$, 得 $b = 0$.

又 $f(1) = 0$, 于是, $c = 1 - a$.

$$\text{则 } f(x) = -x^3 + ax^2 + 1 - a,$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax.$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{2a}{3}.$$

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上递增, 且 $f(x)$ 有三个零点, 所以, $x_2 = \frac{2a}{3} > 1$, 即 $a > \frac{3}{2}$.

故 $f(2) = 3a - 7 > -\frac{5}{2}$, 即 $f(2)$ 的取值范

围是 $(-\frac{5}{2}, +\infty)$.

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = x - 1, \\ y = -x^3 + ax^2 + 1 - a, \end{cases} \text{ 得}$$

$$(x-1)(x^2 + (1-a)x + 2-a) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ 或}$$

$$x^2 + (1-a)x + 2-a = 0 \left(a > \frac{3}{2} \right). \quad \textcircled{1}$$

$$\text{式}\textcircled{1}\text{的判别式 } \Delta = a^2 + 2a - 7 \left(a > \frac{3}{2} \right).$$

当 $\Delta < 0$, 即 $\frac{3}{2} < a < 2\sqrt{2} - 1$ 时, 式①无

实根;

当 $\Delta = 0$, 即 $a = 2\sqrt{2} - 1$ 时, 式①有两个相等的实根;

当 $\Delta > 0$, 即 $a > 2\sqrt{2} - 1$ 时, 式①有两个不等的实根.

而 $a = 2$ 时, 式①的两个根分别为 0, 1.

故当 $\frac{3}{2} < a < 2\sqrt{2} - 1$ 时, 直线 l 与曲线 C 只有一个公共点;

当 $a = 2\sqrt{2} - 1$ 或 $a = 2$ 时, 直线 l 与曲线 C 有两个公共点;

当 $a > 2\sqrt{2} - 1$ 且 $a \neq 2$ 时, 直线 l 与曲线 C 有三个公共点.

四、如图 6, 联结 AB 并延长, 与 PQ 交于点 M .

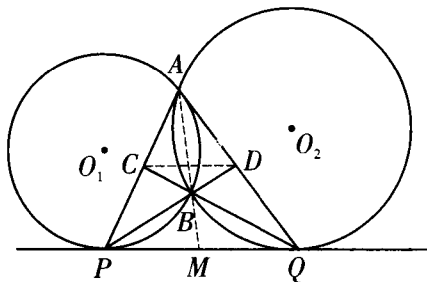


图 6

$$\text{则 } MP^2 = MB \cdot MA = MQ^2 \Rightarrow MP = MQ.$$

在 $\triangle APQ$ 中, 由塞瓦定理得

$$\frac{AC}{CP} \cdot \frac{PM}{MQ} \cdot \frac{QD}{DA} = 1 \Rightarrow \frac{AC}{CP} = \frac{AD}{DQ}$$

$$\Rightarrow CD \parallel PQ.$$

又 $\angle MPB = \angle MAP$, 故

$$\triangle MPB \sim \triangle MAP \Rightarrow \frac{PB}{AP} = \frac{PM}{AM}.$$

$$\text{类似地, } \frac{QB}{AQ} = \frac{QM}{AM}.$$

因为 $PM = QM$, 所以,

$$\frac{PB}{AP} = \frac{QB}{AQ} \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QB}.$$

2017年全国高中数学联赛安徽赛区预赛

中图分类号: G424.79

文献标识码: A

文章编号: 1005-6416(2018)01-0029-03

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 在不大于2017的正整数中,被12整除但不被20整除的数共有_____个.

2. 设复数 z 满足

$$\frac{1017z-25}{z-2017} = 3+4i.$$

则 $|z| =$ _____.

3. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$, $CD=5$, $DA=6$. 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

4. 设正八面体的边长为1. 则其两个平行平面之间的距离为_____.

5. 设平面向量 α 、 β 满足

$$|\alpha+2\beta|=3, |2\alpha+3\beta|=4.$$

则 $\alpha \cdot \beta$ 的最小值为_____.

6. 已知过椭圆 $x^2+2y^2=3$ 的一个焦点作斜率为 k 的直线,与椭圆交于 A 、 B 两点. 若 $AB=2$,则 $|k| =$ _____.

7. 设 $\theta \in [0, 2\pi]$ 满足对于 $x \in [0, 1]$, 均有

$$f(x) = 2x^2 \sin \theta - 4x(1-x) \cos \theta + 3(1-x)^2 > 0.$$

则 θ 的取值范围是_____.

8. 设 n 为正整数. 随机选取 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的非空子集 A 、 B . 则 $A \cap B$ 不是空集的概率为_____.

二、解答题(共86分)

9. (21分) 如图1, 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, 点 D 在直线 AC 上, $HA=HD$, 四边形 $ABEH$ 为平行四边形. 证明: B 、 E 、 C 、 D 、 H 五

又 $CD \parallel PQ$, 因此,

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AC}{AD}, \frac{PB}{QB} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AC \cdot BC = AD \cdot BD.$$

五、由柯西不等式得

$$\frac{a^2}{1+\sqrt{bc}} + \frac{b^2}{1+\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{1+\sqrt{ab}}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}.$$

$$\text{故只需证明: } \frac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq \frac{1}{2}.$$

由均值不等式及已知得

$$a+b+c = \frac{1}{2}((a+b)+(b+c)+(c+a))$$

$$\geq \frac{1}{2} \times 3 \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3}{2}.$$

由赫尔德不等式、均值不等式及已知得

$$\begin{aligned} & (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})^3 \\ &= (\sqrt[3]{\sqrt{ab} \cdot b \cdot a} + \sqrt[3]{\sqrt{bc} \cdot c \cdot b} + \sqrt[3]{\sqrt{ca} \cdot a \cdot c})^3 \\ &\leq (\sqrt{ab} + b + a)(b + \sqrt{bc} + c)(a + c + \sqrt{ca}) \\ &\leq \left(\frac{a+b}{2} + a + b\right) \left(b + \frac{b+c}{2} + c\right) \left(c + a + \frac{c+a}{2}\right) \\ &= \frac{27}{8}(a+b)(b+c)(c+a) = \frac{27}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{故 } \frac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}.$$

因此, 原不等式成立.

(刘康宁 提供)