

2017 中国西部数学邀请赛

中图分类号: G424.79

文献标识码: A

文章编号: 1005-6416(2017)12-0025-08

1. 设素数 p 、正整数 n 满足 $p^2 \mid \prod_{k=1}^n (k^2 + 1)$.

证明: $p < 2n$. (王广廷 供题)

2. 已知 n 为正整数, 使得存在正整数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足

$$x_1 x_2 \cdots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 100n.$$

求 n 的最大可能值. (邹瑾 供题)

3. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, 设 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的内心分别为 I_1 、 I_2 , $\triangle AI_1D$ 、 $\triangle AI_2D$ 的外心分别为 O_1 、 O_2 , 直线 I_1O_2 与 I_2O_1 交于点 P . 证明: $PD \perp BC$.

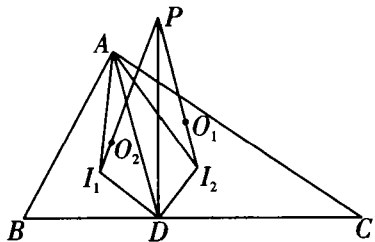


图 1

(张端阳 供题)

4. 给定整数 $n, k (n \geq k \geq 2)$. 甲、乙两人在一张每个小方格均为白色的 $n \times n$ 方格纸上玩游戏: 两人轮流选择一个白格并将其染为黑色, 甲先进行. 若某人染色后, 每个 $k \times k$ 的正方形中均至少有一个黑格, 则游戏结束, 此人获胜. 问: 谁有必胜策略?

(瞿振华 供题)

5. 已知九个正整数 a_1, a_2, \dots, a_9 (允许相同) 满足: 对任意的 $1 \leq i < j < k \leq 9$, 均存在与 i, j, k 不同的 $l (1 \leq l \leq 9)$, 使得

$$a_i + a_j + a_k + a_l = 100.$$

求满足要求的有序九元数组 (a_1, a_2, \dots, a_9) 的个数. (何忆捷 供题)

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 线段 BE 与 DC 交于点 H, M, N 分别为线段 BD, CE 的中点. 证明: H 为 $\triangle AMN$ 的垂心的充分必要条件是 B, C, E, D 四点共圆且 $BE \perp CD$. (石泽晖 供题)

7. 设正整数 $n = 2^\alpha q$, 其中, α 为非负整数, q 为奇数. 证明: 对任意正整数 m , 方程

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = m \quad \text{①}$$

的整数解 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的组数能被 $2^{\alpha+1}$ 整除. (王广廷 供题)

8. 已知整数 $n \geq 2$. 证明: 对任意正实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 均有

$$\sum_{i=1}^n (\max_{1 \leq j \leq i} a_j) (\min_{i \leq j \leq n} a_j) \leq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad \text{①}$$

(张端阳 供题)

参考答案

1. 按照 $\prod_{k=1}^n (k^2 + 1)$ 中的因子所含 p 的幂次分情形讨论.

(1) 若存在 $k (1 \leq k \leq n)$, 使得 $p^2 \mid (k^2 + 1)$, 则 $p^2 \leq n^2 + 1$.

于是, $p \leq \sqrt{n^2 + 1} < 2n$.

(2) 若对任意的 $k (1 \leq k \leq n)$, $p^2 \nmid (k^2 + 1)$, 由条件, 知存在 $1 \leq j \neq k \leq n$, 使得

$$p \mid (j^2 + 1) \text{ 且 } p \mid (k^2 + 1).$$

$$\text{则 } p \mid (k^2 - j^2).$$

$$\text{于是, } p \mid (k - j)(k + j).$$

$$\text{若 } p \mid (k - j), \text{ 则}$$

$$p \leq k - j \leq n - 1 < 2n;$$

若 $p|(k+j)$, 则

$$p \leq k+j \leq n+n-1 = 2n-1 < 2n.$$

综上, $p < 2n$.

2. n 的最大可能值为 9 702.

显然, 由已知等式得 $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$.

$$\text{故 } \prod_{i=1}^n x_i \leq 100.$$

又等号无法成立, 则 $\prod_{i=1}^n x_i \leq 99$.

$$\begin{aligned} \text{而 } \prod_{i=1}^n x_i &= \prod_{i=1}^n ((x_i - 1) + 1) \\ &\geq \sum_{i=1}^n (x_i - 1) + 1 = \sum_{i=1}^n x_i - n + 1, \end{aligned}$$

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n x_i \leq \prod_{i=1}^n x_i + n - 1 \leq n + 98 \quad \text{①}$$

$$\Rightarrow 99(n + 98) \geq 100n$$

$$\Rightarrow n \leq 99 \times 98 = 9\ 702.$$

取 $x_1 = 99, x_2 = x_3 = \dots = x_{9\ 702} = 1$, 可使式①等号成立.

3. 由 $O_1A = O_1I_1 = O_1D$ 及内心的性质,

知 O_1 为 $\triangle ABD$ 外接圆弧 \widehat{AD} 的中点.

如图 2, 延长 BI_1, DI_2 交于点 J_1 , 则 J_1 为 $\triangle ABD$ 中 $\angle B$ 内的旁心, 且 O_1 为 I_1J_1 的中点.

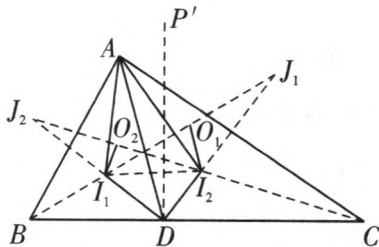


图 2

类似地, 延长 DI_1, CI_2 交于点 J_2 , 则 J_2 为 $\triangle ACD$ 中 $\angle C$ 内的旁心, 且 O_2 为 I_2J_2 的中点.

过点 D 作 $DP' \perp BC$. 只需证明 I_1O_2, I_2O_1, DP' 三线共点.

对 $\triangle DI_1I_2$ 用角元塞瓦定理, 只需证明:

$$\frac{\sin \angle P'DI_2 \cdot \sin \angle DI_1O_2 \cdot \sin \angle O_1I_2I_1}{\sin \angle P'DI_1 \cdot \sin \angle O_2I_1I_2 \cdot \sin \angle DI_2O_1} = 1.$$

事实上, 由 $O_2J_2 = O_2I_2$, 知

$$S_{\triangle O_2I_1J_2} = S_{\triangle O_2I_1I_2}.$$

$$\text{则 } \frac{\sin \angle DI_1O_2}{\sin \angle O_2I_1I_2} = \frac{\sin \angle O_2I_1J_2}{\sin \angle O_2I_1I_2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2S_{\triangle O_2I_1J_2}}{I_1J_2 \cdot I_1O_2} = \frac{I_1I_2}{I_1J_2} \\ &= \frac{2S_{\triangle O_2I_1I_2}}{I_1I_2 \cdot I_1O_2} = \frac{I_1I_2}{I_1J_2}. \end{aligned}$$

$$\text{类似地, } \frac{\sin \angle O_1I_2I_1}{\sin \angle DI_2O_1} = \frac{I_2J_1}{I_1I_2}.$$

又 $\frac{\sin \angle P'DI_2}{\sin \angle P'DI_1} = \frac{\cos \angle CDI_2}{\cos \angle BDI_1}$, 故只需证明:

$$\frac{I_2J_1 \cos \angle CDI_2}{I_1J_2 \cos \angle BDI_1} = 1,$$

即 I_2J_1, I_1J_2 在 BC 上的投影长度相同.

如图 3, 设 I_1, I_2, J_1, J_2 在 BC 上的投影分别为 H_1, H_2, K_1, K_2 .

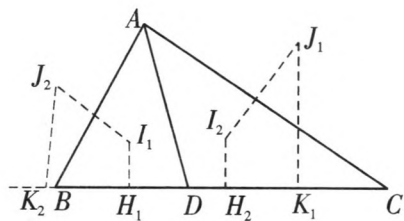


图 3

$$\text{则 } H_2K_1 = DK_1 - DH_2$$

$$= \frac{1}{2}(AB + AD - BD) - \frac{1}{2}(AD + CD - AC)$$

$$= \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

$$\text{类似地, } H_1K_2 = \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

$$\text{故 } H_2K_1 = H_1K_2.$$

命题得证.

4. 将方格纸按从上到下标记行, 从左到右标记列.

若 $n \leq 2k - 1$, 则甲将第 k 行第 k 列的格染为黑色后, 每个 $k \times k$ 正方形中至少有一个

黑格. 因此, 甲获胜.

若 $n \geq 2k$, 证明当 n 为奇数时, 甲有获胜策略; 当 n 为偶数时, 乙有获胜策略.

事实上, 对于一个已经有若干个格染为黑色的局面: 若有两个不相交的 $k \times k$ 正方形所含的全为白格, 且方格纸内白格总数为奇数, 称其为“好局面”; 若有两个不相交的 $k \times k$ 正方形所含的全为白格, 且方格纸内白格总数为偶数, 称其为“坏局面”.

下面证明当某人面对好局面时, 此人有获胜策略.

假设甲面对好局面, 他先取定两个不相交的 $k \times k$ 正方形 A, B , 且均为白格. 由于白格总数为奇数, 可选取不在 A, B 中的另一个白格, 将其染为黑色, 此时, 白格总数为偶数, 且 A, B 中仍然均为白格. 因此, 变为一个坏局面.

轮到乙面对坏局面, 若其染色后, 仍有两个不相交的 $k \times k$ 正方形中均为白格, 此时, 白格总数为奇数, 又回到好局面; 若其染色后, 不存在两个不相交的 $k \times k$ 正方形, 此时注意到, 至少有一个全白格的 $k \times k$ 正方形, 可设 A_1, A_2, \dots, A_m 为所有全白格的 $k \times k$ 正方形, 则它们两两相交, 必包含于某个 $(2k-1) \times (2k-1)$ 的正方形 S . 于是, S 的中心方格 P 为 A_1, A_2, \dots, A_m 的公共格. 因此, 甲将 P 染为黑色后, 所有 $k \times k$ 正方形中均含有黑格, 从而, 甲获胜.

总之, 当某人面对好局面时, 他可以在自己的下一回合获胜或是仍面对好局面, 而游戏必在有限步内结束, 因此, 他有获胜策略; 当某人面对坏局面时, 他要么让对方下一回合即可获胜, 要么留给对方好局面, 因此, 对方有获胜策略.

在 $n \geq 2k$ 时, 由于四个角上的 $k \times k$ 正方形互不相交, 且一开始均为白格, 于是, 当 n

为奇数时, 一开始是好局面, 甲有获胜策略; 当 n 为偶数时, 一开始是坏局面, 乙有获胜策略.

5. 对满足条件的正整数组 (a_1, a_2, \dots, a_9) , 将 a_1, a_2, \dots, a_9 从小到大排列为

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_9.$$

由条件, 知分别存在 $l \in \{4, 5, \dots, 9\}$ 及 $l' \in \{1, 2, \dots, 6\}$, 使得

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_l = b_{l'} + b_7 + b_8 + b_9 = 100. \quad ①$$

注意到,

$$b_{l'} \geq b_1, b_7 \geq b_2, b_8 \geq b_3, b_9 \geq b_l. \quad ②$$

结合式①, 知结论②中的不等号均为等号.

$$\text{于是, } b_2 = b_3 = \dots = b_8.$$

$$\text{故设 } (b_1, b_2, \dots, b_8, b_9) = (x, y, \dots, y, z),$$

其中, $x \leq y \leq z$.

由条件, 知使 $x + y + z + b_l = 100$ 的 b_l 的值只能为 y , 即

$$x + 2y + z = 100. \quad ③$$

(1) 当 $x = y = z = 25$ 时, 有

$$(b_1, b_2, \dots, b_9) = (25, 25, \dots, 25).$$

此时, 得到一组 (a_1, a_2, \dots, a_9) .

(2) 当 x, z 中恰有一个为 y 时, 记另一个为 w .

$$\text{由式③知 } w + 3y = 100.$$

该条件也是充分的. 此时, y 可以取

$$1, 2, \dots, 24, 26, 27, \dots, 33$$

这 32 种不同值, 且每个 y 值对应一组 (b_1, b_2, \dots, b_9) , 进而, 对应九组不同的 (a_1, a_2, \dots, a_9) , 共有 $32 \times 9 = 288$ 个数组 (a_1, a_2, \dots, a_9) .

(3) 当 $x < y < z$ 时, 由条件, 知存在某个 $b_l \in \{x, y, z\}$, 使得 $3y + b_l = 100$, 与式③比较得 $y + b_l = x + z$, 则必有 $b_l = y$.

$$\text{故 } y = 25, x + z = 50.$$

该条件也是充分的. 此时, 对 $x = 1, 2,$

..., 24, 每个 x 值对应一组 (b_1, b_2, \dots, b_9) , 进而, 对应 $9 \times 8 = 72$ 组不同的 (a_1, a_2, \dots, a_9) , 共有 $24 \times 72 = 1\,728$ 个数组 (a_1, a_2, \dots, a_9) .

综上, 知符合条件的数组个数为

$$1 + 288 + 1\,728 = 2\,017.$$

6. 如图 4, 延长 MH , 与 AC 交于点 P ; 延长 NH , 与 AB 交于点 Q .

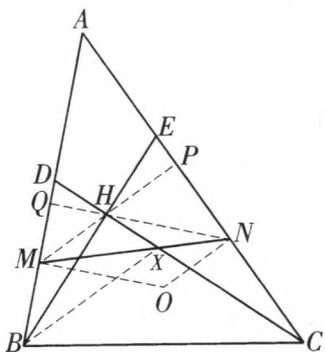


图 4

充分性.

由 B, C, E, D 四点共圆知

$$\angle BDH = \angle CEH.$$

又 $BE \perp CD$, 从而, $\triangle DHB, \triangle EHC$ 均为直角三角形.

注意到, M, N 分别为斜边 BD, CE 的中点.

$$\text{则 } \angle MDH = \angle MHD,$$

$$\angle MHB = \angle MBH.$$

$$\text{故 } \angle EHP + \angle HEC = \angle MHB + \angle HDB \\ = \angle MBH + \angle HDB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MH \perp AC.$$

类似地, $NH \perp AB$.

因此, H 为 $\triangle AMN$ 的垂心.

必要性.

若 H 为 $\triangle AMN$ 的垂心, 则

$$MP \perp AN, NQ \perp AM.$$

$$\text{故 } \frac{DQ}{QB} = \frac{DH \sin \angle DHQ}{BH \sin \angle BHQ}$$

$$= \frac{DH \sin \angle CHN}{BH \sin \angle EHN} = \frac{DH \cdot EH}{BH \cdot CH}.$$

$$\text{类似地, } \frac{EP}{PC} = \frac{DH \cdot EH}{BH \cdot CH}.$$

$$\text{于是, } \frac{EP}{PC} = \frac{DQ}{QB}.$$

利用比例性质及 $DM = MB, EN = NC$, 知

$$\frac{EC}{PC} = \frac{DB}{QB} \Rightarrow \frac{NC}{PC} = \frac{MB}{QB}$$

$$\Rightarrow \frac{NC}{PN} = \frac{MB}{QM} \Rightarrow \frac{EN}{PN} = \frac{DM}{QM}.$$

又因为 H 是 $\triangle AMN$ 的垂心, 所以,

$$\angle DMH = \angle ENH.$$

$$\text{则 } \frac{QM}{MH} = \frac{PN}{NH} \Rightarrow \frac{DM}{MH} = \frac{EN}{NH}$$

$$\Rightarrow \triangle DMH \sim \triangle ENH$$

$$\Rightarrow \angle MDH = \angle NEH$$

$$\Rightarrow B, C, E, D \text{ 四点共圆.}$$

设四边形 $BCED$ 的外心为 O .

易知, $OM \perp AB$.

从而, $OM \parallel NH$.

类似地, $ON \parallel MH$.

于是, 四边形 $MHNO$ 为平行四边形.

因此, $MH = ON$.

过点 B 作 MH 的平行线, 与 DC 交于点 X .

注意到, M 为边 BD 的中点.

$$\text{则 } BX = 2MH = 2ON.$$

由熟知的外心性质, 知 X 为 $\triangle BCE$ 的垂心.

因此, $CX \perp BE$, 即 $CD \perp BE$.

7. 设方程①的解的个数为 $N(m)$, (x_1, x_2, \dots, x_n) 为方程①的一组非负整数解, 不妨设其中有 k 个非零项.

注意到, (x_1, x_2, \dots, x_n) 的每个分量有正负两种情形, 恰对应原方程的 2^k 个整数解.

设 S_k 为方程①恰有 k ($k=1, 2, \dots, n$) 个非零项的非负整数解的个数.

$$\text{则 } N(m) = \sum_{k=1}^n 2^k S_k.$$

因为 k 个非零项的非负整数解有 C_n^k 种位置可选, 所以, $C_n^k | S_k$.

于是, 要证明 $2^{\alpha+1} | N(m)$, 只需证明:

$$2^{\alpha-k+1} | C_n^k.$$

注意到, $C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

则分子中 2 的因子个数至少为 α , 而分母中 2 的因子个数为

$$\sum_{i=1}^{[\log_2 k]} \left[\frac{k}{2^i} \right] < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{k}{2^i} = k,$$

其中, $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

故分母中 2 的因子至多有 $k-1$ 个.

因此, $2^{\alpha-k+1} | C_n^k$, 即 $2^{\alpha+1} | N(m)$.

8. 对 n 用第二数学归纳法.

当 $n=2$ 时,

式①左边 = $a_1 \cdot \min\{a_1, a_2\} + a_2 \cdot \max\{a_1, a_2\}$.

若 $a_1 \geq a_2$, 则

式① $\Leftrightarrow 2a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2$,

命题成立;

若 $a_1 \leq a_2$, 则

式① $\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 \leq a_1^2 + a_2^2$,

命题成立.

假设命题对所有正整数 $k (2 \leq k < n)$ 成立, 考虑 n 时的情形.

对 $2 \leq i \leq n$, 记 $c_i = \frac{i}{2\sqrt{i-1}}$, 定义 $c_1 = 1$.

容易验证 $c_1 = c_2 < c_3 < \cdots < c_n$.

记 $M = \max_{1 \leq j \leq n} a_j$, 并设 $a_k = M$.

当 $k=1$ 时,

式①左边 = $M \sum_{i=1}^n \min_{i \leq j \leq n} a_j$.

由 $\min_{1 \leq j \leq n} a_j = \min_{2 \leq j \leq n} a_j \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n a_i$, 且当

$2 \leq i \leq n$ 时, 有 $\min_{i \leq j \leq n} a_j \leq a_i$.

故 $\sum_{i=1}^n \min_{i \leq j \leq n} a_j \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n a_i + \sum_{i=2}^n a_i$

$$= \frac{n}{n-1} \sum_{i=2}^n a_i.$$

由均值不等式得

$$\begin{aligned} \text{式①左边} &\leq \frac{n}{n-1} M \sum_{i=2}^n a_i \\ &\leq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \left(M^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^n a_i \right)^2 \right) \\ &\leq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \left(M^2 + \sum_{i=2}^n a_i^2 \right) \\ &= \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n a_i^2. \end{aligned}$$

当 $k=n$ 时, $\min_{i \leq j \leq n} a_j = \min_{i \leq j \leq n-1} a_j$.

则式①左边

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (\max_{1 \leq j \leq i} a_j) (\min_{i \leq j \leq n-1} a_j) + M^2.$$

由归纳假设得

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\max_{1 \leq j \leq i} a_j) (\min_{i \leq j \leq n-1} a_j) \leq c_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2.$$

故式①左边 $\leq c_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + M^2$

$$< \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + M^2 \right)$$

$$= \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

当 $2 \leq k \leq n-1$ 时, 结合 $k=1$ 和 $k=n$ 时的证明得

式①左边

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\max_{1 \leq j \leq i} a_j) (\min_{i \leq j \leq n} a_j) + M \sum_{i=k}^n \min_{i \leq j \leq n} a_j \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} (\max_{1 \leq j \leq i} a_j) (\min_{i \leq j \leq k-1} a_j) + \frac{n-k+1}{n-k} M \sum_{i=k+1}^n a_i \\ &\leq c_{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 + \frac{n-k+1}{2\sqrt{n-k}} \left(M^2 + \sum_{i=k+1}^n a_i^2 \right) \\ &= c_{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 + c_{n-k+1} \sum_{i=k}^n a_i^2 \\ &< \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n a_i^2. \end{aligned}$$

综上, 命题得证.

【注】取 $a_1 = \sqrt{n-1}, a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$,
知常数 $\frac{n}{2\sqrt{n-1}}$ 为最佳.

附：本届邀请赛预选题

1. 如图 5, $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$, D 为 $\angle BAC$ 的平分线上一点, BD 与 AC 交于点 F , CD 与 AB 交于点 E , EF 与 $\odot O$ 交于点 G, H (点 E 在线段 GF 上), GD, HD 分别与 $\odot O$ 交于点 N, M . 证明: $MN \parallel BC$.

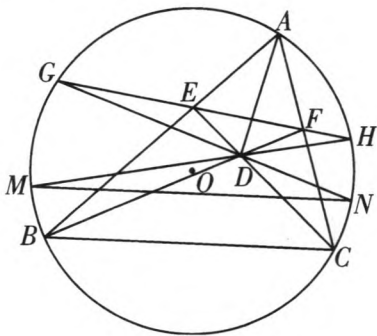


图 5

(石泽晖 供题)

2. 已知 P 为锐角 $\triangle ABC$ 内的一点, P 关于边 BC 的中点 M_A 的对称点为 P_A , P_A 关于边 BC 的对称点为 Q_A , AQ_A 的中点记为 R_A . 类似定义点 R_B, R_C . 若点 P 在边 BC, CA, AB 上的射影分别为 H_A, H_B, H_C , 证明: $\triangle R_A R_B R_C$ 与 $\triangle H_A H_B H_C$ 中心对称. (张甲 供题)

3. 给定整数 $n \geq 2$. 求最小的正实数 c , 使得对任意复数 z_1, z_2, \dots, z_n , 均有

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| + c \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \geq \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

(张端阳 供题)

4. 设 S 为正实数集, 满足:

(1) $1 \in S$, 且对任意的 $x, y \in S$, 有 $x + y, xy \in S$.

(2) 存在 S 的一个子集 P , 使得 $S \setminus \{1\}$ 中的数均能唯一表示成 P 中若干数 (允许相同) 的乘积 (两种写法若只有因子顺序不同,

则视为同一种).

问: S 是否一定为正整数集?

(郑凡 供题)

5. 记 A 为所有整数数列构成的集合. 求所有 $f: A \rightarrow \mathbf{Z}$ 满足: 对任意 $x, y \in A$, 均有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. (郑凡 供题)

参考答案

1. 先证明一个引理.

引理 在圆 Γ 中, AD, BE, CF 三条弦共点于 P , AC 与 BE 交于点 X_1 , AE 与 CF 交于点 X_2 , $X_1 X_2$ 与圆 Γ 交于 Q, Q' 两点. 若 $QP, Q'P$ 与圆 Γ 分别交于点 R, R' , RR' 分别与 BE, CF 交于点 Y_2, Y_1 , 则 B, Y_1, D, F, Y_2, D 分别三点共线.

证明 如图 6, 设 BD 与 RR' 交于点 Y , ER 与 DQ' 交于点 Z (若平行, 设其交于无穷远处).

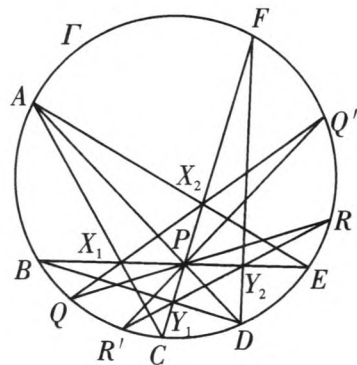


图 6

对圆内接六边形 $DBERR'Q'$, 由帕斯卡定理, 知 Y, P, Z 三点共线.

对圆内接六边形 $READQ'Q$, 由帕斯卡定理, 知 X_2, P, Z 三点共线.

于是, X_2, Y, P 三点共线.

从而, 点 Y 与 Y_1 重合, 此即 B, Y_1, D 三点共线.

类似地, F, Y_2, D 三点共线.

引理得证.

如图7,延长AD、CE、BF,分别与⊙O交于点P、S、T,记PS、PT分别与MN交于点Q、R.

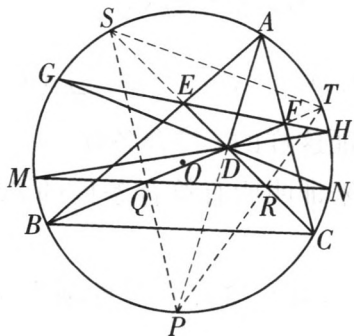


图7

由引理,知S、Q、P、T、R、P分别三点共线. 联结ST.

由P为弧BC的中点
 $\Rightarrow \angle PSC = \angle PTB$
 $\Rightarrow T、R、Q、S$ 四点共圆
 $\Rightarrow \angle QRS = \angle QTS = \angle BTS = \angle BCS$
 $\Rightarrow QR \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC$.

2. 如图8,设线段 $H_A R_A$ 、 $H_B R_B$ 的中点分别为M、N.

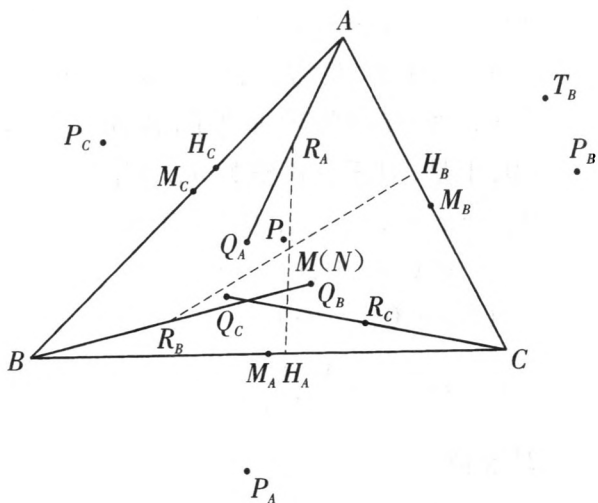


图8

下面证明点M与N重合,即只需证明点M、N到BC的距离相等,点M、N到AC的距离也相等.

设点K到BC所在直线的距离为 y_K ,即

证 $y_M = y_N$.

依题意得 $PQ_A \parallel BC$.

于是, $y_{Q_A} = y_P$.

$$\begin{aligned} \text{故 } y_M &= \frac{1}{2}y_{R_A} + \frac{1}{2}y_{H_A} = \frac{1}{2}y_{R_A} \\ &= \frac{1}{4}(y_{Q_A} + y_A) = \frac{1}{4}(y_P + y_A). \end{aligned}$$

延长 PH_B 至点 T_B ,使得 $PH_B = H_B T_B$.

从而, $PT_B \perp AC$.

又 $Q_B P_B \perp AC$,从而, $Q_B P_B \parallel PT_B$.

结合 $PQ_B \parallel AC$, $T_B P_B \parallel AC$,知四边形 $PT_B P_B Q_B$ 为矩形.

$$\begin{aligned} \text{故 } y_N &= \frac{1}{2}y_{R_B} + \frac{1}{2}y_{H_B} \\ &= \frac{1}{4}(y_{Q_B} + y_B) + \frac{1}{2}y_{H_B} \\ &= \frac{1}{4}y_{Q_B} + \frac{1}{2}y_{H_B} = \frac{1}{4}y_{Q_B} + \frac{1}{4}(y_P + y_{T_B}) \\ &= \frac{1}{4}(y_{Q_B} + y_{T_B}) + \frac{1}{4}y_P \\ &= \frac{1}{4}(y_A + y_C) + \frac{1}{4}y_P = \frac{1}{4}(y_A + y_P). \end{aligned}$$

从而, $y_M = y_N$,即点M、N到BC的距离相等.

类似地,点M、N到AC的距离也相等.

因此,点M与N重合.

设 $H_C R_C$ 的中点为L,类似可得点M与L也重合.

综上, $\triangle R_A R_B R_C$ 与 $\triangle H_A H_B H_C$ 中心对称.

3. 当 $n = 2m$ 时,取

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 = \dots = z_m &= 1, \\ z_{m+1} = z_{m+2} = \dots = z_{2m} &= -1; \end{aligned}$$

当 $n = 2m + 1$ 时,取

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 = \dots = z_m &= 1, \\ z_{m+1} = z_{m+2} = \dots = z_{2m+1} &= -\frac{m}{m+1}. \end{aligned}$$

以上两种情形均有 $c \geq \frac{2}{n}$.

下面证明:对任意复数 z_1, z_2, \dots, z_n , 均有

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| + \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \geq \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

事实上,对 $1 \leq k \leq n$, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| + \sum_{j=1}^n |z_k - z_j| \geq \left| \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{j=1}^n (z_k - z_j) \right| = n |z_k|.$$

对 k 从 1 到 n 求和即得

$$n \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} |z_k - z_j| \geq n \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

综上,所求最小的正实数为 $\frac{2}{n}$.

4. 不一定.

取 $S = \{f(\pi) \mid f \text{ 为整系数多项式, 且对任意的 } x > 0 \text{ 有 } f(x) > 0\}$.

易知,集合 S 满足条件(1).

接下来证明集合 S 满足条件(2).

取 $P = \{f(\pi) \in S \mid f \text{ 在 } \mathbf{Z}[x] \text{ 上不可约}\}$.

对集合 S 中的任一元素 $f(\pi)$, f 可以分解成首项系数为正的若干不可约整系数多项式的乘积 $f = f_1 f_2 \cdots f_n$.

$$\text{则 } f(\pi) = f_1(\pi) f_2(\pi) \cdots f_n(\pi).$$

由于 f 没有正实根,其任一因子 f_i 均没有正实根,且 f_i 首项系数为正,于是,对所有的 $x > 0$, 均有 $f_i(x) > 0$.

从而, $f_i(\pi) \in P$.

下面证明分解的唯一性.

$$\text{设 } f(\pi) = f_1(\pi) f_2(\pi) \cdots f_n(\pi)$$

$$= g_1(\pi) g_2(\pi) \cdots g_m(\pi).$$

则整系数多项式 $f_1 f_2 \cdots f_n - g_1 g_2 \cdots g_m$ 有根 π , 但 π 为超越数,故 $f_1 f_2 \cdots f_n - g_1 g_2 \cdots g_m$ 恒为 0, 即

$$f_1 f_2 \cdots f_n = g_1 g_2 \cdots g_m.$$

于是,由整系数多项式唯一分解定理,知 g_1, g_2, \dots, g_m 为 f_1, f_2, \dots, f_n 的排列.

$$\text{故 } f(\pi) = f_1(\pi) f_2(\pi) \cdots f_n(\pi)$$

$$= g_1(\pi) g_2(\pi) \cdots g_m(\pi)$$

为同一种分解.

取 $f(x) = x$, 知 $\pi \in S$.

因此, S 不为正整数集.

$$5. f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

易验证这样的 f 符合条件.

接下来证明所有符合条件的 f 均具有所给形式.

设 e_n 为第 n 项为 1、其他项为 0 的数列.

设 $f(e_n) = a_n$, 且

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = f(x) - \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

由 g 的构造,知其满足

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

且若 x 仅有有限项非零,则 $g(x) = 0$.

下面只需证明对所有的 $x \in A$, 均有

$$g(x) = 0.$$

设 $x = \{x_n\}$.

由裴蜀定理,知存在数列 $y = \{y_n\}$ 和 $z = \{z_n\}$, 满足对所有正整数 n , 均有

$$x_n = 2^n y_n + 3^n z_n.$$

从而, $g(x) = g(y) + g(z)$.

要证 $g(x) = 0$, 只需证 $g(y) = g(z) = 0$.

由于对所有有限项非零的数列 x 均有 $g(x) = 0$, 于是,对任意正整数 n , 均有

$$\begin{aligned} g(y) &= g(y_1, \dots, y_{n-1}, 0, \dots, 0) + \\ &\quad g(0, \dots, 0, y_n, \dots) \\ &= g(0, \dots, 0, y_n, \dots) \\ &= 2^n g\left(0, \dots, 0, \frac{y_n}{2^n}, \frac{y_{n+1}}{2^n}, \dots\right) \end{aligned}$$

能被 2^n 整除.

故 $g(y) = 0$.

类似地, $g(z) = 0$.

因此, g 恒等于 0.

$$\text{故 } f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

(邹瑾 王广廷 提供)