2016 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 设实数 a 满足 $a<9a^3-11a<|a|$，则 a 的取值范围是__________.

答案：$a\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$.

解：由 $a<|a|$ 可得 $a<0$，原不等式可变形为

$$1>\frac{9a^3-11a}{a}>\frac{|a|}{a}=-1,$$

即 $-1<9a^2-11<1$，所以 $a^2\in\left(\frac{10}{9},\frac{4}{3}\right)$. 又 $a<0$，故 $a\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$.

2. 设复数 z,w 满足 $|z|=3,\ (z+\overline{w})(\overline{z}-w)=7+4\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，$\overline{z},\overline{w}$ 分别表示 z,w 的共轭复数，则 $(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$ 的模为__________.

答案：$\sqrt{65}$.

解：由运算性质，$7+4\mathrm{i}=(z+\overline{w})(\overline{z}-w)=|z|^2-|w|^2-(zw-\overline{zw})$，因为 $|z|^2$ 与 $|w|^2$ 为实数，$\mathrm{Re}(zw-\overline{zw})=0$，故 $|z|^2-|w|^2=7,\ zw-\overline{zw}=-4\mathrm{i}$，又 $|z|=3$，所以 $|w|^2=2$. 从而

$$(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)=|z|^2-4|w|^2-2(zw-\overline{zw})=9-8+8\mathrm{i}=1+8\mathrm{i}.$$

因此，$(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$ 的模为 $\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$.

3. 正实数 $u,\ v,\ w$ 均不等于 1，若 $\log_u vw+\log_v w=5$，$\log_v u+\log_w v=3$，则 $\log_w u$ 的值为__________.

答案：$\frac{4}{5}$.

解：令 $\log_u v=a,\ \log_v w=b$，则

$$\log_v u=\frac{1}{a},\ \log_w v=\frac{1}{b},\quad \log_u vw=\log_u v+\log_u v\cdot\log_v w=a+ab,$$

条件化为 $a+ab+b=5,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$，由此可得 $ab=\frac{5}{4}$. 因此 $\log_w u=\log_w v\cdot\log_v u=\frac{1}{ab}=\frac{4}{5}$.

4. 袋子 A 中装有 2 张 10 元纸币和 3 张 1 元纸币，袋子 B 中装有 4 张 5 元纸币和 3 张 1 元纸币. 现随机从两个袋子中各取出两张纸币，则 A 中剩下的纸币面值

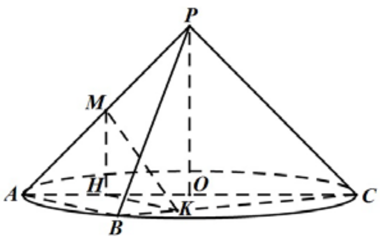
之和大于 B 中剩下的纸币面值之和的概率为____________.

答案：$\dfrac{9}{35}$.

解：一种取法符合要求，等价于从 A 中取走的两张纸币的总面值 a 小于从 B 中取走的两张纸币的总面值 b，从而 $a<b\le 5+5=10$. 故只能从 A 中取走两张1元纸币，相应的取法数为 $\mathrm{C}_3^2=3$. 又此时 $b>a=2$，即从 B 中取走的两张纸币不能都是 1 元纸币，相应有 $\mathrm{C}_7^2-\mathrm{C}_3^2=18$ 种取法. 因此，所求的概率为 $\dfrac{3\times 18}{\mathrm{C}_5^2\times \mathrm{C}_7^2}=\dfrac{54}{10\times 21}=\dfrac{9}{35}$.

5. 设 P 为一圆锥的顶点，A, B, C 是其底面圆周上的三点，满足 $\angle ABC=90^\circ$，M 为 AP 的中点. 若 $AB=1, AC=2, AP=\sqrt{2}$，则二面角 $M-BC-A$ 的大小为____________.

答案：$\arctan\dfrac{2}{3}$.



解：由 $\angle ABC=90^\circ$ 知，AC 为底面圆的直径.

设底面中心为 O，则 $PO\perp$ 平面 ABC. 易知 $AO=\dfrac{1}{2}AC=1$，进而 $PO=\sqrt{AP^2-AO^2}=1$.

设 H 为 M 在底面上的射影，则 H 为 AO 的中点. 在底面中作 $HK\perp BC$ 于点 K，则由三垂线定理知 $MK\perp BC$，从而 $\angle MKH$ 为二面角 $M-BC-A$ 的平面角.

因 $MH=AH=\dfrac{1}{2}$，结合 HK 与 AB 平行知，$\dfrac{HK}{AB}=\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{3}{4}$，即 $HK=\dfrac{3}{4}$，这样 $\tan\angle MKH=\dfrac{MH}{HK}=\dfrac{2}{3}$. 故二面角 $M-BC-A$ 的大小为 $\arctan\dfrac{2}{3}$.

6. 设函数 $f(x)=\sin^4\dfrac{kx}{10}+\cos^4\dfrac{kx}{10}$，其中 k 是一个正整数. 若对任意实数 a，均有 $\left\{f(x)\,\middle|\,a<x<a+1\right\}=\left\{f(x)\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\right\}$，则 k 的最小值为____________.

答案：16.

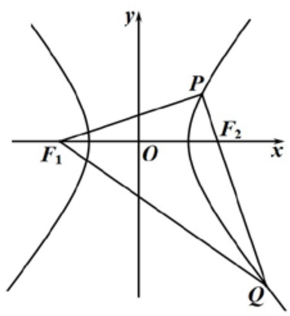
解：由条件知，
$$f(x)=\left(\sin^2\frac{kx}{10}+\cos^2\frac{kx}{10}\right)^2-2\sin^2\frac{kx}{10}\cos^2\frac{kx}{10}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{kx}{5}=\frac{1}{4}\cos\frac{2kx}{5}+\frac{3}{4},$$
其中当且仅当 $x=\dfrac{5m\pi}{k}(m\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 取到最大值. 根据条件知，任意一个长为1的开区间 $(a, a+1)$ 至少包含一个最大值点，从而 $\dfrac{5\pi}{k}<1$，即 $k>5\pi$.

反之，当 $k>5\pi$ 时，任意一个开区间 $(a, a+1)$ 均包含 $f(x)$ 的一个完整周期，此时 $\left\{f(x)\,\middle|\,a<x<a+1\right\}=\left\{f(x)\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\right\}$ 成立.

综上可知，正整数 k 的最小值为 $[5\pi]+1=16$.

7. 双曲线C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，左、右焦点分别为F_1、F_2．过点F_2作一直线与双曲线C的右半支交于点$P,\ Q$，使得$\angle F_1PQ=90^\circ$，则ΔF_1PQ的内切圆半径是___________．

答案：$\sqrt{7}-1$．



解：由双曲线的性质知，$F_1F_2=2\times\sqrt{1+3}=4$，$PF_1-PF_2=QF_1-QF_2=2$．

因$\angle F_1PQ=90^\circ$，故$PF_1^{\ 2}+PF_2^{\ 2}=F_1F_2^{\ 2}$，因此

$$PF_1+PF_2=\sqrt{2(PF_1^{\ 2}+PF_2^{\ 2})-(PF_1-PF_2)^2}$$
$$=\sqrt{2\times4^2-2^2}=2\sqrt{7}.$$

从而直角ΔF_1PQ的内切圆半径是

$$r=\frac{1}{2}(F_1P+PQ-F_1Q)=\frac{1}{2}(PF_1+PF_2)-\frac{1}{2}(QF_1-QF_2)=\sqrt{7}-1.$$

8. 设a_1,a_2,a_3,a_4是$1,\ 2,\ \cdots,100$中的4个互不相同的数，满足

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2,$$

则这样的有序数组(a_1,a_2,a_3,a_4)的个数为___________．

答案：40．

解：由柯西不等式知，$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)\geq(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2$，等号成立的充分必要条件是$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_4}$，即$a_1,a_2,a_3,a_4$成等比数列．于是问题等价于计算满足$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\subseteq\{1,\ 2,\ 3,\cdots,100\}$的等比数列$a_1,a_2,a_3,a_4$的个数．设等比数列的公比$q\neq1$，且$q$为有理数．记$q=\dfrac{n}{m}$，其中$m,n$为互素的正整数，且$m\neq n$．

先考虑$n>m$的情况．

此时$a_4=a_1\cdot\left(\dfrac{n}{m}\right)^3=\dfrac{a_1n^3}{m^3}$，注意到$m^3,n^3$互素，故$l=\dfrac{a_1}{m^3}$为正整数．相应地，$a_1,a_2,a_3,a_4$分别等于$m^3l,\ m^2nl,\ mn^2l,\ n^3l$，它们均为正整数．这表明，对任意给定的$q=\dfrac{n}{m}>1$，满足条件并以$q$为公比的等比数列$a_1,a_2,a_3,a_4$的个数，即为满足不等式$n^3l\leq100$的正整数$l$的个数，即$\left[\dfrac{100}{n^3}\right]$．

由于$5^3>100$，故仅需考虑$q=2,\ 3,\ \dfrac{3}{2},\ 4,\ \dfrac{4}{3}$这些情况，相应的等比数列的个数为$\left[\dfrac{100}{8}\right]+\left[\dfrac{100}{27}\right]+\left[\dfrac{100}{27}\right]+\left[\dfrac{100}{64}\right]+\left[\dfrac{100}{64}\right]=12+3+3+1+1=20$．

当$n<m$时，由对称性可知，亦有20个满足条件的等比数列a_1,a_2,a_3,a_4．

综上可知，共有40个满足条件的有序数组(a_1,a_2,a_3,a_4)．

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）在 ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$．求 $\sin C$ 的最大值．

解：由数量积的定义及余弦定理知，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$．

同理得，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$．故已知条件化为

$$b^2+c^2-a^2+2(a^2+c^2-b^2)=3(a^2+b^2-c^2),$$

即 $a^2+2b^2=3c^2$． ……………………8 分

由余弦定理及基本不等式，得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{3}(a^2+2b^2)}{2ab}$$

$$=\frac{a}{3b}+\frac{b}{6a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{3b}\cdot\frac{b}{6a}}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以 $$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\le\frac{\sqrt{7}}{3},$$ ……………………12 分

等号成立当且仅当 $a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{6}:\sqrt{5}$．因此 $\sin C$ 的最大值是 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$．

……………………16 分

10.（本题满分 20 分）已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(1)=1$，且对任意 $x<0$，均有 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=xf(x)$．

求 $f(1)f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{1}{99}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)f\left(\dfrac{1}{98}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{50}\right)f\left(\dfrac{1}{51}\right)$ 的值．

解：设 $a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)(n=1,2,3,\cdots)$，则 $a_1=f(1)=1$．

在 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=xf(x)$ 中取 $x=-\dfrac{1}{k}(k\in\mathbf{N}^*)$，注意到 $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{-\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k}-1}=\dfrac{1}{k+1}$，及 $f(x)$ 为奇函数，可知

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right)=-\frac{1}{k}\cdot f\left(-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}\cdot f\left(\frac{1}{k}\right),$$ ……………5 分

即 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{1}{k}$．从而 $a_n=a_1\cdot\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{(n-1)!}$． ……………………10 分

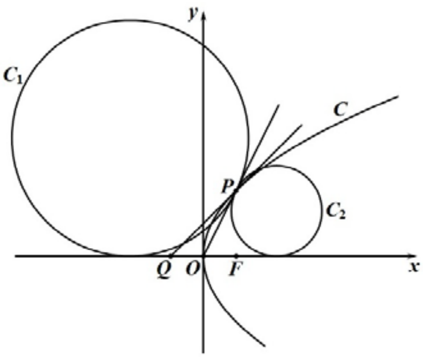
因此

$$\sum_{i=1}^{50}a_ia_{101-i}=\sum_{i=1}^{50}\frac{1}{(i-1)!\cdot(100-i)!}=\sum_{i=0}^{49}\frac{1}{i!\cdot(99-i)!}$$

$$=\frac{1}{99!}\cdot\sum_{i=0}^{49}\mathrm{C}_{99}^{i}=\frac{1}{99!}\cdot\sum_{i=0}^{49}\frac{1}{2}\left(\mathrm{C}_{99}^{i}+\mathrm{C}_{99}^{99-i}\right)=\frac{1}{99!}\times\frac{1}{2}\times2^{99}=\frac{2^{98}}{99!}.$$

………………20 分

11.（本题满分 20 分）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是 x 轴正半轴上的一个动点．以 F 为焦点、O 为顶点作抛物线 C．设 P 是第一象限内 C 上的一点，Q 是 x 轴负半轴上一点，使得 PQ 为 C 的切线，且 $|PQ|=2$．圆 C_1, C_2 均与直线 OP 相切于点 P，且均与 x 轴相切．求点 F 的坐标，使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值．



解：设抛物线 C 的方程是 $y^2=2px\,(p>0)$，点 Q 的坐标为 $(-a,0)\,(a>0)$，并设 C_1, C_2 的圆心分别为 $O_1(x_1,y_1), O_2(x_2,y_2)$．

设直线 PQ 的方程为 $x=my-a\,(m>0)$，将其与 C 的方程联立，消去 x 可知

$$y^2-2pmy+2pa=0.$$

因为 PQ 与 C 相切于点 P，所以上述方程的判别式为 $\Delta=4p^2m^2-4\cdot2pa=0$，解得 $m=\sqrt{\frac{2a}{p}}$．进而可知，点 P 的坐标为 $(x_P,y_P)=(a,\sqrt{2pa})$．于是

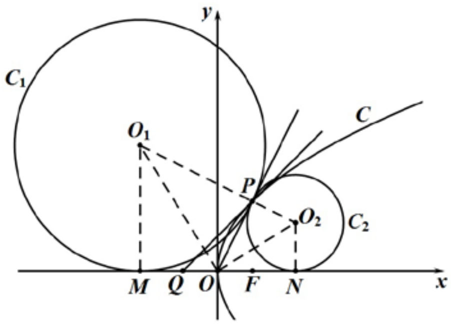
$$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_P-0|=\sqrt{1+\frac{2a}{p}}\cdot\sqrt{2pa}=\sqrt{2a(p+2a)}.$$

由 $|PQ|=2$ 可得

$$4a^2+2pa=4. \qquad ①$$

………………5 分

注意到 OP 与圆 C_1,C_2 相切于点 P，所以 $OP\perp O_1O_2$．设圆 C_1,C_2 与 x 轴分别相切于点 M,N，则 OO_1, OO_2 分别是 $\angle POM, \angle PON$ 的平分线，故 $\angle O_1OO_2=90^\circ$．从而由射影定理知



$$\begin{aligned}y_1y_2&=O_1M\cdot O_2N=O_1P\cdot O_2P=OP^2\\&=x_P^2+y_P^2=a^2+2pa.\end{aligned}$$

结合①，就有

$$y_1y_2=a^2+2pa=4-3a^2. \qquad ②$$

………………10 分

由 O_1, P, O_2 共线，可得

$$\frac{y_1-\sqrt{2pa}}{\sqrt{2pa}-y_2}=\frac{y_1-y_P}{y_P-y_2}=\frac{O_1P}{PO_2}=\frac{O_1M}{O_2N}=\frac{y_1}{y_2},$$

化简得

$$y_1+y_2=\frac{2}{\sqrt{2pa}}\cdot y_1y_2. \qquad ③$$

…………………15 分

令 $T=y_1^2+y_2^2$，则圆 C_1, C_2 的面积之和为 πT．根据题意，仅需考虑 T 取到最小值的情况．

根据②、③可知，

$$T=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\frac{4}{2pa}y_1^2y_2^2-2y_1y_2$$

$$=\frac{4}{4-4a^2}(4-3a^2)^2-2(4-3a^2)=\frac{(4-3a^2)(2-a^2)}{1-a^2}.$$

作代换 $t=1-a^2$．由于 $4t=4-4a^2=2pa>0$，所以 $t>0$．于是

$$T=\frac{(3t+1)(t+1)}{t}=3t+\frac{1}{t}+4\geq 2\sqrt{3t\cdot\frac{1}{t}}+4=2\sqrt{3}+4.$$

上式等号成立当且仅当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$，此时 $a=\sqrt{1-t}=\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$．因此结合①得，

$$\frac{p}{2}=\frac{1-a^2}{a}=\frac{t}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}}=\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}},$$

从而 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}},\ 0\right)$. …………………20 分