关于两道数学奥林匹克题的推广与证明

喻德生

（南昌航空大学数学与信息科学学院 330063）

1985 年第 26 届国际数学奥林匹克竞赛一道候选题是这样的[1]：已知：三角形 ABC 及形外的点 X,Y,Z，$\angle BAZ=\angle CAY$，$\angle CBX=\angle ABZ$，$\angle ACY=\angle BCX$，求证：AX,BY,CZ 共点．该题的证明，通常要利用正弦定理和梅内劳斯定理的逆定理，较具技巧性．本文利用有向度量定值法[2-7]研究该问题，得到一个涵盖面十分广泛的定值定理．利用该定理，不仅容易推出该题和另一道数学奥林匹克题的结论，而且还将它们推广到更为广泛的情形．

定义 1[2] 三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 P_iP_{i+1}（$i=1,2,3$；$P_{3+j}=P_j$，以下类同）所在直线把平面分成两部分，三角形所在的部分称为直线 P_iP_{i+1} 的内侧，另一部分称为直线 P_iP_{i+1} 的外侧．

定义 2[2] 设点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离为 d_{P_0-l}，则称该点到该直线带符号的距离 $\pm d_{P_0-l}$ 为点 P_0 到直线 l 的有向距离，记为 D_{P_0-l}．即 $D_{P_0-l}=\pm d_{P_0-l}$，其中当 $Ax_0+By_0+C>0$ 时，取“+”号；当 $Ax_0+By_0+C<0$ 时，取“—”号．

特别地，当 $d_{P_0-l}=0$，即 P_0 在直线 l 上时，规定 P_0 到直线 l 有向距离为零，即 $D_{P_0-l}=0$．

显然，点到直线的有向距离具有有向性：点 P_0 到方向相反的两直线 $l:Ax+By+C=0$ 与 $l^-:-Ax-By-C=0$ 有向距离的绝对值相等，符号相反，即 $D_{P_0-l^-}=-D_{P_0-l}$．

根据定义 2 和点到直线距离公式，容易证明点到直线有向距离公式：

引理 1[2] 点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的有向距离

$$D_{P_0-l}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

定理 设 $P_1P_2Q_1$，$P_2P_3Q_2$，$P_3P_1Q_3$（$P_1P_2Q'_1$，$P_2P_3Q'_2$，$P_3P_1Q'_3$）分别是三角形 $P_1P_2P_3$ 各边的外（内）侧三角形，且 $\angle P_{i+1}P_iQ_i=\angle P_{i+2}P_iQ_{i+2}=\alpha_i$（$\angle P_{i+1}P_iQ'_i=\angle P_{i+2}P_iQ'_{i+2}=\alpha'_i$）（$i=1,2,3$），令 $\alpha_{3+j}=\alpha_j$，$\alpha'_{3+j}=\alpha'_j$，P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点，则

$$\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})d_{P_iQ_{i+1}}D_{P-P_iQ_{i+1}}=0,\tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha'_i(\tan\alpha'_{i+1}+\tan\alpha'_{i+2})d_{P_iQ'_{i+1}}D_{P-P_iQ'_{i+1}}=0.\tag{2}$$

证明 (i) 如图 1 所示．设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)$（$i=1,2,3$），可得 P_iP_{i+1} 外侧三角形 $P_iP_{i+1}Q_i$ 顶点 Q_i 的坐标为[2]

$$\begin{cases} x_{Q_i}=\dfrac{x_i\tan\alpha_i+x_{i+1}\tan\alpha_{i+1}+(y_{i+1}-y_i)\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+1}}{\tan\alpha_i+\tan\alpha_{i+1}} \\ y_{Q_i}=\dfrac{y_i\tan\alpha_i+y_{i+1}\tan\alpha_{i+1}-(x_{i+1}-x_i)\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+1}}{\tan\alpha_i+\tan\alpha_{i+1}} \end{cases}$$

$(i=1,2,3)$．

设任意点的坐标为 $P(x,y)$，于是由有向直线 P_iQ_{i+1} 的直线方程

$$(y_i-y_{Q_{i+1}})x+(x_{Q_{i+1}}-x_i)y+(x_iy_{Q_{i+1}}-x_{Q_{i+1}}y_i)=0$$

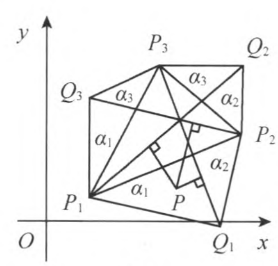


图 1

和点到直线的有向距离公式，可得

$$d_{P_iQ_{i+1}}D_{P-P_iQ_{i+1}}=(y_i-y_{Q_{i+1}})x+(x_{Q_{i+1}}-x_i)y+(x_iy_{Q_{i+1}}-x_{Q_{i+1}}y_i).$$

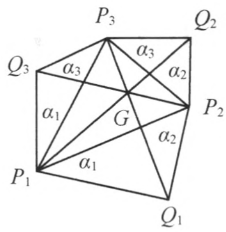


图 2

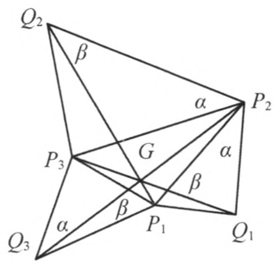


图 3

因为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})(y_i-y_{Q_{i+1}})\\
=&\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i[y_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})-(y_{i+1}\tan\alpha_{i+1}+y_{i+2}\tan\alpha_{i+2})]\\
&+\sum_{i=1}^{3}(x_{i+2}-x_{i+1})\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+1}\tan\alpha_{i+2}\\
=&\sum_{i=1}^{3}(y_i-y_{i+1})\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+1}\\
&+\sum_{i=1}^{3}(y_i-y_{i+2})\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+2}\\
&+\tan\alpha_1\tan\alpha_2\tan\alpha_3\sum_{i=1}^{3}(x_{i+2}-x_{i+1})\\
=&\sum_{i=1}^{3}(y_i-y_{i+1})\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+1}\\
&+\sum_{i=1}^{3}(y_{i+1}-y_i)\tan\alpha_{i+1}\tan\alpha_i+0=0,
\end{aligned}$$

类似地,可得

$$\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})(x_{Q_{i+1}}-x_i)=0,$$

而 $\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})(x_iy_{Q_{i+1}}-x_{Q_{i+1}}y_i)$

$$\begin{aligned}
=&\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i\{x_i[y_{i+1}\tan\alpha_{i+1}+y_{i+2}\tan\alpha_{i+2}-(x_{i+2}-x_{i+1})\tan\alpha_{i+1}\tan\alpha_{i+2}]-[x_{i+1}\tan\alpha_{i+1}+x_{i+2}\tan\alpha_{i+2}\\
&+(y_{i+2}-y_{i+1})\tan\alpha_{i+1}\tan\alpha_{i+2}]y_i\}\\
=&\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+1}\\
&+\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+2}\\
&-\sum_{i=1}^{3}[(x_ix_{i+2}-x_ix_{i+1})+(y_iy_{i+2}-y_iy_{i+1})]\cdot\\
&\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+1}\tan\alpha_{i+2}\\
=&\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\tan\alpha_i\tan\alpha_{i+1}\\
&+\sum_{i=1}^{3}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})\tan\alpha_{i+1}\tan\alpha_i\\
&-\tan\alpha_1\tan\alpha_2\tan\alpha_3\sum_{i=1}^{3}[(x_{i+1}x_i-x_ix_{i+1})+\\
&(y_{i+1}y_i-y_iy_{i+1})]\\
=&0,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})d_{P_iQ_{i+1}}D_{P-P_iQ_{i+1}}\\
=&x\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})(y_i-y_{Q_{i+1}})+\\
&y\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})(x_{Q_{i+1}}-x_i)+\\
&\sum_{i=1}^{3}\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})(x_iy_{Q_{i+1}}-x_{Q_{i+1}}y_i)\\
=&0,
\end{aligned}$$

因此式(1)成立.

(ii)类似地,当 Q'_1,Q'_2,Q'_3 不重合和不共线时,可以证明式(2)成立;而当 Q'_1,Q'_2,Q'_3 重合或共线时,式(2)显然成立.

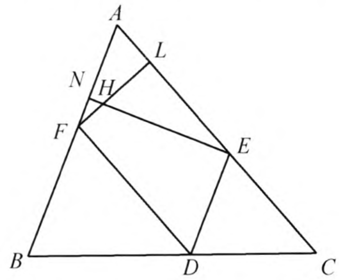
推论1 设 $P_1P_2Q_1,P_2P_3Q_2,P_3P_1Q_3(P_1P_2Q'_1,P_2P_3Q'_2,P_3P_1Q'_3)$ 分别是三角形 $P_1P_2P_3$ 各边的外(内)侧三角形,且 $\angle P_{i+1}P_iQ_i=\angle P_{i+2}P_iQ_{i+2}=\alpha_i(\angle P_{i+1}P_iQ'_i=\angle P_{i+2}P_iQ'_{i+2}=\alpha'_i)(i=1,2,3)$,则 $P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1(P_1Q'_2,P_2Q'_3,P_3Q'_1)$ 所在的三条直线均共点.

证明 (i)如图2所示.设 P_1Q_2,P_2Q_3 所在直线的交点为 G,则 $D_{G-P_1Q_2}=D_{G-P_2Q_3}=0$.代入式(1)并注意到 $\tan\alpha_i(\tan\alpha_{i+1}+\tan\alpha_{i+2})d_{P_iQ_{i+1}}\neq0$,可得 $D_{G-P_3Q_1}=0$,因此 G 在直线 P_3Q_1 上.故 P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1 所在直线相交于点 G.

(下转封底)

$\perp AC$，N、L 分别为垂足，EN 与 FL 交于 H，求证：

$$AN^2+AL^2+BC^2=BN^2+CL^2.$$



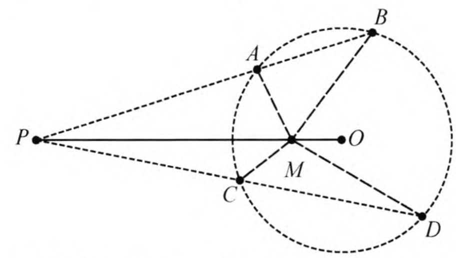
（江西师范高等专科学校 王建荣 335000，温州私立第一实验学校 刘沙西 325000）

2369 设点 I，H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心，则有

$$\frac{IA}{HA}+\frac{IB}{HB}+\frac{IC}{HC}\geqslant 3.$$

（天津水运高级技工学校 黄兆麟 300456）

2370 如图所示，从海岸上的 P 地瞭望某海岛周边的4座海洋科研观察站 A，B，C，D，发现 P，A，B 与 P，C，D 分别处在同一视线上，又测得 P 地到海岛中心 O 地的距离为 d 千米，各观察站到 O 地的距离均为 r 千米．从 P 地到 O 地已建成直线通达的物流干线，现拟在海岛内的既有干线上设立中转站 M，新建4条由 M 分别直线通达各观察站的物流支线，试确定中转站的选址，使得新建支线的总长度最短．



（河南省辉县市一中 贺基军 453600）

（上接第 62 页）

(ii)类似地，当 Q'_1，Q'_2，Q'_3 不重合和不共线时，可以证明则 $P_1Q'_2$，$P_2Q'_3$，$P_3Q'_1$ 所在的三条直线均共点；而当 Q'_1，Q'_2，Q'_3 重合或共线时，结论显然成立．

推论 2 设 $P_1P_2Q_1$，$P_2P_3Q_2$，$P_3P_1Q_3$（$P_1P_2Q'_1$，$P_2P_3Q'_2$，$P_3P_1Q'_3$）分别是三角形 $P_1P_2P_3$ 各边的外（内）侧三角形，且 $\angle P_2P_1Q_1=\angle P_3P_1Q_3=\angle P_2Q_2P_3$，$\angle P_1P_2Q_1=\angle P_3P_2Q_2=\angle P_1Q_3P_3$（$\angle P_2P_1Q'_1=\angle P_3P_1Q'_3=\angle P_2Q'_2P_3$，$\angle P_1P_2Q'_1=\angle P_3P_2Q'_2=\angle P_1Q'_3P_3$），则 P_1Q_2，P_2Q_3，P_3Q_1（$P_1Q'_2$，$P_2Q'_3$，$P_3Q'_1$）所在的三条直线均共点．

证明 如图 3 所示．设$\angle P_2P_1Q_1=\angle P_3P_1Q_3=\angle P_2Q_2P_3=\beta$，$\angle P_1P_2Q_1=\angle P_3P_2Q_2=\angle P_1Q_3P_3=\alpha$（$\angle P_2P_1Q'_1=\angle P_3P_1Q'_3=\angle P_2Q'_2P_3=\alpha'$，$\angle P_1P_2Q'_1=\angle P_3P_2Q'_2=\angle P_1Q'_3P_3=\beta'$），在推论 1 中，令$\alpha_1=\alpha$，$\alpha_2=\beta$，$\alpha_3=\pi-\alpha-\beta$（$\alpha'_1=\alpha'$，$\alpha'_2=\beta'$，$\alpha'_3=\pi-\alpha'-\beta'$）即得．

注 三角形各边外侧三角形的情形，推论 1 即为 1985 年第 26 届国际数学奥林匹克竞赛候选题；而当 $P_1P_2P_3$ 锐角三角形时，推论 2 即 1973 年第 7 届全苏数学奥林匹克题的第(2)部分．但应注意本文定理及其推论，对 $\alpha_i\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)(i=1,2,3)$ 都成立，因此即使是对三角形各边外侧三角形的情形，两推论的范围比两竞赛题的结论也要广泛得多．这种非常一般性的结论，用传统方法是不易证明的．

参考文献

1 中国数学奥林匹克委员会等编，世界数学奥林匹克解题大辞典：几何卷，河南出版传媒集团，2012.

2 喻德生著，平面有向几何学[M，科学出版社，2014.

3 喻德生，平面四边形有向面积的两个定理及其应用[J]，赣南师范学院学报，2000(3)：18－21.

5 Yu Desheng，On A Fixed Value Theorem for Directed Areas in Conic Circumscribed Polygons and Applications[J]，数学季刊，2009，24(4)，485－490.

6 Yu Desheng，On two Fixed Value Theorems for Directed Areas in Conic Circumscribed 2n＋1 Polygon and Applications [J]. The 2nd International Conference on Multimedia Technology，2011，Vol3 (2)：2781－2784.

7 喻德生，Brianchon 定理在二次曲线外切 2n 边形中的推广[J]，数学的实践与认识，2007，37(13)：109－113.

刊号：ISSN 0583－1458 / CN11－2254/O1　全国各地邮局订购　代号：2－501　全年定价：72.00 元　每期定价：6.00 元